关于超可解群的若干结果

陈顺民[1],张良才[2]

(1. 渝西学院数学与计算机系,402168,重庆,永川)
(2. 重庆大学数理学院,400044,重庆)

[摘要]　利用弱拟正规子群,得到有限群成为超可解群的一系列充分条件.

[关键词]　弱拟正规子群,可解群,超可解群

[中图分类号]O152.1,　[文献标识码]A,　[文章编号]1001-4616(2005)02-0033-05

Some Results on Supersolvable Groups

Chen Shunmin[1], Zhang Liangcai[2]

(1. Department of Mathematics and Computer Science, Western Chongqing University, 402168, Yongchuan, China)
(2. College of Mathematics and Physics, Chongqing University, 400044, Chongqing, China)

Abstract: This paper deals with some kinds of weakly quasinormal subgroups to obtain a series of sufficient conditions which imply a finite group to be supersolvable.

Key words: weakly quasinormal subgroup, solvable group, supersolvable group

0　引言

从某一特殊的子群出发来研究原群的结构是有限群论研究中的一种重要方法,推广正规子群为拟正规子群、半正规子群、弱拟正规子群[1]来研究有限群的结构是近年来有限群研究的热点. 利用限制条件比拟正规子群更弱的弱拟正规子群这一概念,钱国华和朱平天在文[1]中得到了有限群为超可解群的一些刻画,赵啸海在文[2]中给出了商群超可解的群的超可解性,推广了文[1]中的一些结论,本文利用弱拟正规子群来研究群的超可解性,得到了超可解群的一些充分条件,推广了文[1]、文[2]中的一些结果. 本文中的群恒为有限群,$M <\cdot G$表M是群G的极大子群;$\Phi(G)$、$F(G)$及G'分别表群G的Frattini子群、Fitting子群和导群;π表一些素数的集合;π'表π在所有素数所成之集的补集;$\pi(G)$表$|G|$的素因子的集合;$|G|_\pi$表$|G|$的π-部分;G_p表群G的Sylow p-子群;$G_{p'}$表示群G的Hall p'-子群;H char G表示H是群G的特征子群;G与H无关是指群G的任一子群均与H不同态.

定义　群G的子群H称为在G中弱拟正规,如果对G的任意子群K,至少存在一个K的共轭子群K^x,$x \in G$,使得$HK^x = K^xH$.

引理1[1]　若$M <\cdot G$,且M在G中弱拟正规,则$|G:M|$为素数.

引理2[1]　若G的子群H在G中弱拟正规,则

(1)对任意$N \lhd G$,HN在G中弱拟正规,HN/N在G/N中弱拟正规;

(2)对任意$x \in G$,H^x在G中弱拟正规;

(3)对任意$K \leqslant G$,K与H的某共轭子群乘积成群.

引理3[2]　设$K \leqslant G$,N　G,若K的极大子群均在G中弱拟正规,则KN/N的极大子群均在G/N中弱拟正规.

收稿日期:2004-06-28.
基金项目:渝西学院自然科学基金资助项目(Y2004SJ29).
作者简介:陈顺民,1968—,讲师,主要从事有限群的教学与研究. E-mail:chen129600@sina.com

引理4[3]　设G为可解外-超可解群,则$G = MN, M <\cdot G, M \cap N = 1$,$N$为$G$的唯一极小正规子群,且$M$的Sylow p-子群为Abel群,N为p^{α}阶初等Abel p-群,$\alpha > 1$;当G的导群G'幂零时,M循环,且$N \in Syl_p(G)$.

引理5[4]　若G有两个子群M、K,使得$G = MK$,则对任意x、$y \in G$,均有$G = M^x K^y$.

1　主要结果

定理1　群G超可解当且仅当G的包含Sylow子群正规化子的极大子群均在G中弱拟正规.此时,对任意$p \in \pi(G)$,均有$l_p(G) \leqslant 1$,其中$l_p(G)$为G的p-长.

证明　若群G超可解,据文[1,定理1]可知:G的包含Sylow子群正规化子的极大子群均在G中弱拟正规.反之,若G的包含Sylow子群正规化子的极大子群均在G中弱拟正规,据引理1,G的包含Sylow子群正规化子的极大子群在G中有素数指数,这样,据文献[3]可知:G超可解.

对任意$p \in \pi(G)$,由于G超可解,于是对G的每个p主因子H/K有$|H/K| = p$,据文献[5],G在H/K上所诱导出的自同构群$Aut_G(H/K)$的方指数整除$p-1$,当然$Aut_G(H/K)$的阶与p互素,这样,据文献[4]可知:$l_p(G) \leqslant 1$.

注1　定理1为文[1]及文[2]定理2的推广.

定理2　设$|G|$的不同素因子为$p_1, p_2, \cdots, p_k$,若G有$k-1$个阶两两互异的Sylow子群及其极大子群均在G中弱拟正规,则G超可解.

证明　任取p、$q \in \pi(G)$,若p、$q \in \pi(H)$,因H为G的可解Hall子群,从而G有Hall $\{p,q\}$-子群.若p、q至少有一个不属于$\pi(H)$,我们不妨假定$p \notin \pi(H)$,由假设条件,G的Sylow p-子群P在G中弱拟正规,于是P必与G的某一Sylow q-子群Q乘积作成群,这样,G仍有Hall $\{p,q\}$-子群.故G可解.现令P_i为G的Sylow p_i-子群,$i = 1,2,\cdots,k$,P_j及其极大子群均在G中弱拟正规,$j = 1,2,\cdots,k-1$,据引理2及引理3,假设条件是商群闭的,令G为极小阶反例,则G为可解外-超可解群.据引理4可知:$G = MN, M <\cdot G, M \cap N = 1$,$N$为$G$的唯一极小正规子群,且$N$为$p^{\alpha}$阶初等Abel p-群,$\alpha > 1$.

令P为M的Sylow p-子群,则PN为G的Sylow p-子群,取PN的含P的极大子群S,令$N_1 = S \cap N$,从而$S = PN \cap S = P(N \cap S) = PN_1$,$N_1 \neq 1$,$N_1 <\cdot N$.

(1)当$p \neq p_j (j = 1,2,\cdots,k-1)$时,令$M_{p_j} \in Syl_{p_j}(M)$,显然$M_{p_j}$均为$G$的Sylow子群,且分别与$P_j$共轭,$j = 1,2,\cdots,k-1$.据引理2,$M_{p_j}$均在$G$中弱拟正规,于是$M_{p_j}$必与$N_1$的某共轭子群乘积成群,也即$N_1$与$M_{p_j}$的某共轭子群乘积成群,从而$M_{p_j}^{g_j} N_1 \leqslant G$,$g_j = m_j n_j$,其中$m_j \in M$,$n_j \in N$,进而$M_{p_j}^{m_j} N_1^{n_j^{-1}} \leqslant G$,又$N_1 \lhd N$,故$M_{p_j}^{m_j} N_1 \leqslant G$,$j = 1,2,\cdots,k-1$.又$M_{p_1}^{m_1} M_{p_2}^{m_2} \cdots M_{p_{k-1}}^{m_{k-1}} P = M$及$PN_1 = S$,我们有$MN_1$成群,从而$M < MN_1 < G$,这与$M <\cdot G$相矛盾.

(2)当p等于某个p_j时,不妨假定$p = p_1$,此时,$N \leqslant P_1$,故可取P,使得$PN = P_1$,于是$S = PN_1$在G中弱拟正规,从而$M^x S$成群,其中$x \in G$.因$M^x <\cdot G$,从而$M^x S = M^x$或$M^x S = G$.若为前者,则$S = PN_1 \leqslant M^x$,从而$|P| < |PN_1| = |S| \leqslant |M^x|_p = |P|$,矛盾.若为后者,据引理5有:$G = MS = MPN_1 = MN_1 < MN = G$,矛盾.

注2　定理2为文[1]中定理2的部分推广.

推论1　若可解群G的每个Sylow子群及其极大子群均为G的弱拟正规子群或自正规子群,则G超可解.

证明　若G无自正规的Sylow p-子群,$p \in \pi(G)$,因G的任一Sylow子群的每个极大子群都不是G的自正规子群,从而G的每个Sylow子群及其所有极大子群均在G中弱拟正规,据定理2,G超可解.

若G有自正规的Sylow子群,因G可解,于是G存在Sylow基.注意到:若G的一个Sylow p-子群P是自正规的,则$N_G(P^x) = N_G(P)^x = P^x$,其中$x$为$G$中的任意元,故$G$的每个Sylow p-子群均在G中自正规.这样,我们可令R为G的一组Sylow基中的所有自正规的Sylow子群的乘积,则R的每个Sylow子群均为R的自正规子群,据文献[6]可知:R为r-群,$r \in \pi(G)$,于是$R \in Syl_r(G)$.这说明G有$|\pi(G)|-1$个阶两两互异的Sylow子群在G中弱拟正规,又G的Sylow子群的极大子群均在G中弱拟正规,据定理2,G超可解.

定理3 设 $M<\cdot G$,且 M 在 G 中弱拟正规,若 G 满足下列条件之一,则 G 为超可解群:(1) M 循环;(2) M 幂零,但 $F(G)\not\leq M$.

证明 (1) 令 $U=\bigcup\limits_{g\in G}M^g$,由于 $M<\cdot G$,从而 U 为 G 的真子群(见文献[7]),于是存在 $x\in G\backslash U$. 因 M 在 G 中弱拟正规,从而存在 $y\in G$,使 $M<x>^y$ 成群,又 $M<\cdot G$,于是 $M<x>^y=M$ 或 $M<x>^y=G$. 若为前者,则 $<x>^y\leq M$, $<x>\leq M^{y^{-1}}$,$x\in M^{y^{-1}}$,这与 x 的取法相矛盾,故必有 $G=M<x>^y=M<x^y>$,据文献[8]可知:G 超可解.

(2) 若 $\Phi(G)\neq 1$,则 $M/\Phi(G)<\cdot G/\Phi(G)$,且 $F(G/\Phi(G))=F(G)/\Phi(G)\not\leq M/\Phi(G)$,又 $M/\Phi(G)$ 幂零,据引理2,有 $M/\Phi(G)$ 在 $G/\Phi(G)$ 中弱拟正规,由归纳假设,$G/\Phi(G)$ 超可解,从而 G 超可解.

若 $\Phi(G)=1$,由于 $M<\cdot G$,且 M 在 G 中弱拟正规,据引理1可知:$|G:M|=p$(p 为素数). 若 $p=2$,则 $M\lhd G$,又 M,从而 G 可解.若 $p\neq 2$,则 M 为 G 的幂零极大子群且有奇素数指数,据文[9,定理1]可知:G 可解,所以 $F(G)=N_1\times N_2\times\cdots\times N_k$,其中 $N_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为 G 的极小正规子群. 因 $F(G)\not\leq M$,从而存在某 $N_i\not\leq M$,于是 $G=MN_i$,且 $M\cap N_i=1$,故 $G/N_i\cong M$ 幂零,当然 G/N_i 超可解;又 $M<\cdot G$,且 M 在 G 中弱拟正规,据引理1,$|G:M|=p$(p 为某素数),从而 $|N_i|=|G:M|=p$,故 G 超可解.

定理4 设 G 为可解群,若 G 满足下列条件之一,则 G 超可解:

(1) $F(G)$ 的每个子群均在 G 中弱拟正规;

(2) G 的 Sylow p - 子群的循环子群均在 G 中弱拟正规,其中 $p\in\pi(F(G))$.

证明 (1) 若 $\Phi(G)\neq 1$,则 $F(G/\Phi(G))=F(G)/\Phi(G)$,据引理2,$G/\Phi(G)$ 满足假设条件,由归纳假设可知:$G/\Phi(G)$ 超可解,于是 G 超可解.

若 $\Phi(G)=1$,任取 $M<\cdot G$,使得 $F(G)\not\leq M$,由于 G 可解,从而存在 G 的极小正规子群 $N\leq F(G)$,使得 $G=MN$;又 N 为初等 Abel p - 群,$p\in\pi(G)$,于是 $M\cap N=1$. 若 $|N|=p^\alpha$,$\alpha>1$,现任取 N 的 p 阶子群 N_1,由于 $N\leq F(G)$,从而 $N_1<F(G)$,且 N_1 在 G 中弱拟正规. 这样,存在 $x\in G$,使 MN_1^x 成群,又 $N_1^x<N^x=N$,且 $M\cap N_1^x=1$,于是 $M<MN_1^x<MN=G$,这与 $M<\cdot G$ 相矛盾,故 $\alpha=1$,即 $|N|=p$,从而 $|G:M|=|N|=p$,据文献[5]有 G 超可解.

(2) 若 $\Phi(G)\neq 1$,则对 $G/\Phi(G)$ 的任意 Sylow p - 子群 $S\Phi(G)/\Phi(G)$,其中 $S\in \mathrm{Syl}_p(G)$,$p\in\pi(F(G/\Phi(G)))$,其循环子群均可表为 $<x>\Phi(G)/\Phi(G)$ 的形式,$x\in S$. 因 $F(G/\Phi(G))=F(G)/\Phi(G)$,$\pi(F(G/\Phi(G)))=\pi(F(G)/\Phi(G))\subseteq\pi(F(G))$,据引理2,$<x>\Phi(G)/\Phi(G)$ 在 $G/\Phi(G)$ 中弱拟正规,由归纳假设,$G/\Phi(G)$ 超可解,从而 G 超可解.

若 $\Phi(G)=1$,任取 G 的极小正规子群 N,则 N 为初等 Abel$p$ - 群,$p\in\pi(G)$,$N\leq F(G)$. 由于 $\Phi(G)=1$,于是存在 $M<\cdot G$,使得 $N\not\leq M$,$G=MN$. 因 $M\cap N\lhd M$,$M\cap N\lhd N$,从而 $M\cap N\lhd G$,由 N 的极小正规性及 $N\not\leq M$,必有 $M\cap N=1$.

任取 $1\neq x\in N$,$o(x)=p$,因 $<x>$ 在 G 中弱拟正规,故存在 $g\in G$,使 $M<x>^g=M<x^g>$ 成群,又 $M<\cdot G$,故 $M<x^g>=M$ 或 $M<x^g>=G$. 若 $M<x^g>=M$,则 $<x^g>\leq M$,又 $N\lhd G$,从而 $x^g\in N$,于是 $1\neq x^g\in M\cap N=1$,矛盾.故必有 $M<x^g>=G$,又 $M\cap N=1$,$x^g\in N$,从而 $M\cap<x^g>=1$,所以 $N=<x^g>$ 为 p 阶循环群.

由 N 的任意性可知:G 的任意一极小正规子群均为素数阶循环群,又 $\Phi(G)=1$ 及 G 可解,从而 $F(G)$ 为 G 的素数阶的极小正规子群的直积.

任取 $\overline{M}<\cdot G$,若 $F(G)\not\leq\overline{M}$,则必存在 G 的极小正规子群 $N_1\leq F(G)$,使得 $N_1\not\leq\overline{M}$,从而 $G=\overline{M}N_1=\overline{M}F(G)$,且 $\overline{M}\cap N_1=1$. 现令 $|N_1|=q$(q 为素数),则 $|F(G):\overline{M}\cap F(G)|=|G:\overline{M}|=|N_1|=q$,即 $\overline{M}\cap F(G)$ 为 $F(G)$ 的极大子群,据文献[5]可知:G 超可解.

注3 定理4(2)为文[1]中定理4的推广.

对于群 G 的阶 $|G|$ 的任一因数 n,G 都有一个阶为 n 的子群,则称 G 为 CLT - 群.群 G 的所有商群都是 CLT - 群,则称 G 为 QCLT - 群. Humphreys[10] 证明了:奇阶 QCLT - 群为超可解群. 张继平作了进一步研究,在文

[11]中证明了:QCLT - 群 G 为超可解群的充要条件是 G 与 S_4 无关. 这里,我们把'与 S_4 无关"换成'与弱拟正规相关的条件"仍可得群 G 超可解.

首先,我们需要证明下列结论:

设 G 为 QCLT - 群,若 G 为可解外 - 超可解群,则 $G = MN, M <\cdot G, M \cap N = 1$,$N$ 为 G 的唯一极小正规子群,且 N 为 p^{α} 阶的初等 Abel p - 群,$\alpha > 1$,此时必有 $p = 2$.

事实上,据引理4,我们只须证明 $p = 2$. 由于 G 为 QCLT - 群,据文[11],G' 是2 - 闭的,从而 G' 的 Sylow 2 - 子群 Q char $G' \lhd G$,于是 $Q \lhd G$. 若 $Q = 1$,令 $G_2 \in Syl_2(G)$,则 $G'_2 \leqslant G'$,由于 $Q = 1$,从而 $G'_2 = 1$,于是 $G_2 = G_2/G'_2$ 为 Abel 群,因此 G 与 S_4 无关,据文[11]可知:G 超可解,矛盾,故 $Q \neq 1$. 现由 N 的唯一极小正规性有 $N \leqslant Q$,又 Q 为2 - 群,于是 N 为2 - 群,故必有 $p = 2$.

定理5 设 G 为 QCLT - 群,若 G 满足下列条件之一,则 G 超可解:

(1) G 的 Sylow 2 - 子群的极大子群均在 G 中弱拟正规;

(2) G 的某个 Sylow 2 - 子群的导群在 G 中弱拟正规;

(3) G 的某个 Hall $2'$ - 子群在 G 中弱拟正规.

证明 (1) 若 $2 \notin \pi(G)$,则 G 为奇阶 QCLT - 群,G 超可解,故不妨假定 $2 \in \pi(G)$. 因 G 为 QCLT - 群,当然 G 为 CLT - 群,故 G 可解. 对任意 $1 \neq K \quad G$,若 $2 \notin \pi(G/K)$,则 G/K 为奇阶 QCLT - 群,于是 G/K 超可解;若 $2 \in \pi(G/K)$,据引理3,G/K 满足假设条件,由归纳假设,G/K 超可解. 这样,令 G 为极小阶反例,则 G 为可解外 - 超可解群. 据引理4可知:$G = MN, M <\cdot G, M \cap N = 1$,$N$ 为 G 的唯一极小正规子群,且 N 为 p^{α} 阶的初等 Abel p - 群,$\alpha > 1$. 又 G 为 QCLT - 群,从而必有 $p = 2$.

令 $P \in Syl_2(M)$,则 $PN \in Syl_2(G)$. 现取 P_1 为 PN 的包含 P 的极大子群,由于 $|N| = 2^{\alpha}, \alpha > 1$,从而 $P < P_1$. 由条件知 P_1 在 G 中弱拟正规,于是存在 $x \in G$,使 $M^x P_1$ 成群,由于 $M^x <\cdot G$,从而 $M^x P_1 = M^x$ 或 $M^x P_1 = G$. 若为前者,则 $P_1 \leqslant M^x$,于是 $|P_1| \leqslant |P^x| = |P|$,这与 $P < P_1$ 相矛盾;若为后者,据引理5,$G = MP_1$,又 M 可解,可令 $M = M_{2'}P$,其中 $M_{2'}$ 为 M 的 Hall $2'$ - 子群,从而 $G = M_{2'}PP_1 = M_{2'}P_1$,于是 $|G|_2 = |P_1| < |PN| = |G|_2$,矛盾.

(2) 若 $2 \notin \pi(G)$,则 G 为奇阶 QCLT - 群,G 超可解,故可假定 $2 \in \pi(G)$. 因为 G 为 QCLT - 群,当然 G 为 CLT - 群,于是 G 可解. 对任意 $1 \neq K \quad G$,若 $2 \notin \pi(G/K)$,则 G/K 为奇阶 QCLT - 群,于是 G/K 超可解;若 $2 \in \pi(G/K)$,据引理2,G/K 满足假设条件,由归纳假设,G/K 超可解. 这样,令 G 为极小阶反例,则 G 为可解外 - 超可解群. 据引理4可知:$G = MN, M <\cdot G, M \cap N = 1$,$N$ 为 G 的惟一极小正规子群,且 N 为 p^{α} 阶的初等 Abel p - 群,$\alpha > 1$,M 的 Sylow p - 子群为 Abel p - 群. 又 G 为 QCLT - 群,从而必有 $p = 2$,于是 N 为初等 Abel 2 - 群.

令 $Q \in Syl_2(G)$,且其导群 Q' 在 G 中弱拟正规. 由于 $N \lhd G$,从而 $N \leqslant Q$,于是 $Q = G \cap Q = MN \cap Q = (M \cap Q)N$,并且 $[M, N] \leqslant N$. 因 M 的 Sylow 2 - 子群为 Abel 群,从而 $[m_1n_1, m_2n_2] = [m_1, n_2][n_1, m_2]$,其中 $m_i \in M \cap Q, n_i \in N, i = 1, 2$,于是 $Q' \leqslant N$. 若 $Q' = 1$,则 $Q = Q/Q'$ 为 Abel 群,从而 G 与 S_4 无关,据文[11,定理4],G 超可解,矛盾;若 $Q' = N$,则 $N = Q' \leqslant \Phi(Q)$,这样,N 中的元均为 Q 的非生成元,从而 $Q = (M \cap Q)N = M \cap Q < Q$,矛盾;故必有 $1 < Q' < N$. 因 Q' 在 G 中弱拟正规,据引理2,存在 $y \in G$,使 MQ'^y 成群,又 $Q'^y < N^y = N$,从而 $M < MQ'^y < MN = G$,这与 $M <\cdot G$ 相矛盾.

(3) 若 $2 \notin \pi(G)$,则 G 为奇阶 QCLT - 群,G 超可解,故可假定 $2 \in \pi(G)$. 因为 G 为 QCLT - 群,当然 G 为 CLT - 群,于是 G 可解. 对任意 $1 \neq K \quad G$,若 $2 \notin \pi(G/K)$,则 G/K 为奇阶 QCLT - 群,于是 G/K 超可解;若 $2 \in \pi(G/K)$,据引理2及文献[7],G/K 满足假设条件,由归纳假设,G/K 超可解. 这样,令 G 为极小阶反例,则 G 为可解外 - 超可解群. 据引理4可知:$G = MN, M <\cdot G, M \cap N = 1$,$N$ 为 G 的唯一极小正规子群,且 N 为 p^{α} 阶的初等 Abel p - 群,$\alpha > 1$. 又 G 为 QCLT - 群,从而必有 $p = 2$,于是 N 为初等 Abel 2 - 群.

现令 G 的 Hall $2'$ - 子群 H 在 G 中弱拟正规,不妨假定 $H \leqslant M$,于是 H 是 M 的 Hall $2'$ - 子群. 又令 $M_2 \in$

$Syl_2(M)$，则 $M_2N\in Syl_2(G)$. 现取 N 的极大子群 N_1，使 $N_1\lhd M_2N$（见文献[7]），由于 H 在 G 中弱拟正规，据引理2，存在 $g\in G$，使 H^gN_1 成群，从而 $N_1=H^gN_1\cap N\lhd H^gN_1$，故 $H^g\leqslant N_G(N_1)$. 由群的阶易得 $G=H^gM_2N$，从而 $N_1\lhd G$，由 N 的极小正规性可知：$N_1=1$，所以 $|N|=2$，这与 $\alpha>1$ 相矛盾.

令 $H\leqslant G$，我们称子群 $P_G(H)=\langle x\mid x\in G,\ \langle x\rangle H=H\langle x\rangle\rangle$ 为 H 在 G 中的置换化子. 进一步，称群 G 满足置换条件[12]，如果对每一个 $H<G$ 恒有 $H<P_G(H)$. 这里，我们把定理5中"G 为 QCLT－群"换为"G 为满足置换条件的有限群"仍可得 G 为超可解群，这就是下面的定理6.

定理6 设 G 为满足置换条件的有限群，若 G 满足下列条件之一，则 G 超可解：

(1) G 的 Sylow 2－子群的极大子群均在 G 中弱拟正规；

(2) G 的某个 Sylow 2－子群的导群在 G 中弱拟正规；

(3) G 的某个 Hall $2'$－子群在 G 中弱拟正规.

证明 (1) 若 $2\notin\pi(G)$，据文献[5]可知：满足置换条件的奇阶有限群 G 是超可解群，故可假定 $2\in\pi(G)$. 由于 G 满足置换条件，据文献[12]可知：G 可解. 对任意 $1\neq K\trianglelefteq G$，若 $2\notin\pi(G/K)$，则 G/K 为满足置换条件的奇阶群，于是 G/K 超可解. 若 $2\in\pi(G/K)$，据引理3，G/K 满足假设条件，由归纳假设，G/K 超可解. 这样，令 G 为极小阶反例，则 G 为可解外－超可解群. 据引理4可知：$G=MN$，$M<\cdot G$，$M\cap N=1$，N 为 G 的唯一极小正规子群，且 N 为 p^α 阶的初等 Abel p－群，$\alpha>1$.

因 G 满足置换条件，且 $M<\cdot G$，故存在 $g=mn\in G$，其中 $m\in M$，$n\in N$，使 $M\langle g\rangle=\langle g\rangle M=G$. 因 $M\leqslant N_G(N)$，从而 $[M,N]\leqslant N$，于是存在 $y\in N$，使得 $G=M\langle g\rangle=M\langle mn\rangle=M\langle y\rangle$，又 $M\cap N=1=M\cap\langle y\rangle$，这样，$N=\langle y\rangle$. 又 N 为初等 Abel p－群，从而 $|N|=p$，由于 G/N 超可解，于是 G 超可解，矛盾. 综上所述，G 超可解.

对(2)、(3)可采用类似于(1)的方法进行证明.

[参考文献]

[1] 钱国华，朱平天. 超可解群的一些充分条件[J]. 南京师大学报(自然科学版)，1998，21(1)：15—17.
[2] 赵啸海. 超可解群的几个充分条件[J]. 广西大学学报(自然科学版)，2001，26(2)：137—139.
[3] 陈重穆. 内外 $\sum$-群与极小非 $\sum$-群[M]. 重庆：西南师范大学出版社，1988.
[4] Huppert B. Endiche Gruppen I[M]. Berlin-heidelberg-New York：Springer-Verlag，1967.
[5] Bray H G，Deskins W E，Johnson D，著. 张远达，文志雄，朱德高，等译. 幂零与可解之间[M]. 武汉：武汉大学出版社，1988.
[6] Huppert B，Blackburn N. Finite Groups III[M]. Berlin-Heidelberg-New York：Springer-Verlag，1982.
[7] 徐明曜. 有限群导引(上册)[M]. 北京：科学出版社，1999.
[8] 张远达. 有限群构造(下册)[M]. 北京：科学出版社，1982.
[9] 王坤仁. 关于一个例子的注记[J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2002，25(1)：11—13.
[10] Humphreys J F. On groups satisfying the convers of Lagrange 's theorem[J]. Proc Camb Phil Soc，1974，75：25—32.
[11] 张继平. 关于 QCLT-群的超可解性[J]. 数学学报，1988，31(1)：29—32.
[12] 徐明曜，黄建华，李慧陵，等. 有限群导引(下册)[M]. 北京：科学出版社，1999.

[责任编辑：陆炳新]