# 关于 $3^k+p^\alpha$ 型整数

孙学功[1], 戴丽霞[2]

(1. 淮海工学院数理系, 222005, 江苏, 连云港)
(2. 南京师范大学数学与计算机科学学院, 210097, 江苏, 南京)

[摘要] 本文中,笔者证明了存在一个正偶整数的无穷算术数列,其中每一项都与3互素且不能表为 $3^k+p^\alpha$ 形式,由此证得存在无穷多个素数 $q$,使得 $2q$ 不能表为 $3^k+p^\alpha$ 形式.

[关键词] $3^k+p^\alpha$ 型整数,算术数列,素数
[中图分类号]O156.1, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2005)03-0027-03

# On Integers of the Form $3^k+p^\alpha$

Sun Xuegong[1], Dai Lixia[2]

(1. Department of Mathematics and Science, Huai Hai Institute of Technology, 222005, Lianyungang, China)
(2. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

**Abstract**: In this paper, we prove that there is an infinite arithmetic progression of positive even numbers each of which is prime to 3 and has no representation of the form $3^k+p^\alpha$, this shows that there are infinitely many primes $q$ such that $2q$ has no representation of the form $3^k+p^\alpha$.

**Key words**: integers of the form $3^k+p^\alpha$, arithmetic progressions, prime numbers.

## 0 引言

在1934年,Romanoff[9]证明了能表成2的方幂与一个素数之和形式的正整数在正整数集合中有正的比例.在1950年,P Erdö s[6]引进同余覆盖系,证明了存在一个由正奇数组成的算术数列,其中每一项都不能表成2的方幂与一个素数之和.设 $A(x)=\{n\in Z^+, \mid n\leqslant x$,且存在素数 $p$ 及正整数 $k$,使得 $n=p+2^k\}$.陈永高与笔者[5]证明了对于充分大的 $x$,有 $|A(x)|\geqslant 0.0868x$.设 $A(x)=\{n\in Z^+ \mid n\leqslant x$,且存在素数 $p$ 及正整数 $k$,使得 $n=p+a^k\}$.笔者[11]证明了存在定量的常数 $c>0$,使得对于充分大的 $x$,有 $|A(x)|\geqslant cx$.最近,笔者[12]证明了存在一个正偶整数的无穷算术数列,其中每一项都与3互素且不能表为 $3^k+p$ 形式.相关的结果见Chen[1 ~ 4],Guy[7],A19, B21, F13 和 Nathanson[8].

在本文中,笔者研究了 $3^k+p^\alpha$ 型整数,发现使得 $k-3^n$ 有两个不同素因数且与3互素的正整数 $k$ 在正整数集合中有正的比例.具体地,我们证明了如下结果:

**定理1** 存在一个由正偶整数组成的无穷算术数列,其中每一项都与3互素且不能表为 $3^k+p^\alpha$ 形式.

**定理2** 存在无穷多个素数 $q$,使得 $2q$ 不能表为 $3^k+p^\alpha$ 形式.

## 1 定理的证明

为了证明主要定理,我们首先给出如下引理:

**引理1** 设 $\{a_i(\bmod m_i)\}_{i=1}^{12}=\{1\ (\bmod 3),\ 2\ (\bmod 4),\ 5\ (\bmod 6),\ 4\ (\bmod 8),\ 0\ (\bmod 9),\ 0\ (\bmod 12),\ 0\ (\bmod 16),\ 3\ (\bmod 18),\ 3\ (\bmod 24),\ 33\ (\bmod 36),\ 8\ (\bmod 48),\ 15\ (\bmod 72)\}$,则

收稿日期: 2004-10-13.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10171046).
作者简介: 孙学功, 1972—, 讲师, 主要从事数论的教学与研究. E-mail: xgsunlyg@163.com

$$\cup_{i=1}^{12} a_i(\bmod m_i) = Z,$$

且存在奇素数 $p_1, p_2, \cdots, p_{12}$ 使得

$$3^{m_i} \equiv 1 \ (\bmod p_i),\ 而 3^m \not\equiv 1 \ (\bmod p_i),\ 1 \leqslant m < m_i,\ i = 1,2, \cdots, 12.$$

**证明**　能够验证对于在 $0 \leqslant n < 144$ 之间的每一个 $n$,都存在一个 $i$,使得 $n \equiv a_i(\bmod m_i)$,又每一个 $m_i \mid 144$,故

$$\cup_{i=1}^{12} a_i(\bmod m_i) = Z.$$

经过计算,能够验证对于每一个 $i$,都存在一个奇素数 $p_i$,使得

$$3^{m_i} \equiv 1 \ (\bmod p_i),\ 而 3^m \not\equiv 1 \ (\bmod p_i),\ 1 \leqslant m < m_i,\ i = 1,2, \cdots, 12.$$

这样,引理1得证.

**引理2**　存在不等于引理1中的 $p_1, p_2, \cdots, p_{12}$ 且两两不等的奇素数 $q_1, q_2, \cdots, q_{12}$,使得

$$3^{p_i} \equiv 1 \ (\bmod q_i),\ i = 1,2, \cdots, 12.$$

**证明**　由 $3^{p_i} - 1 \equiv 2 \ (\bmod 4)$,知存在奇素数 $q_i \mid 3^{p_i} - 1$.

若 $3^{p_i} \equiv 1 \ (\bmod q_i)$,且 $3^{p_i} \equiv 1 \ (\bmod q_j)$, $i \neq j$,

注意到 $3^{p_j} \equiv 1 \ (\bmod q_j)$,

又 $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$,

则有 $3^{(p_i,p_j)} \equiv 1 \ (\bmod q_j)$,矛盾.

因此 $q_1, q_2, \cdots, q_{12}$ 两两不等.

若有 $p_i = q_j$,则有 $3^{p_j} \equiv 1 \ (\bmod p_i)$,从而 $m_i \mid p_j$,这与 $m_i, p_j$ 的取法矛盾.

这样,引理2得证.

**引理3**　设 $p$ 是素数,$m$ 是满足 $a^s \equiv 1 \ (\bmod p)$ 的最小的正整数 $s$,$k$ 是满足 $a^m \equiv 1 \ (\bmod p^k)$ 且 $a^m \not\equiv 1 \ (\bmod p^{k+1})$ 的正整数,则任给非负整数 $r$,$mp^r$ 是满足

$$a^s \equiv 1 \ (\bmod p^{k+r})$$

的最小的正整数 $s$.

**证明**　我们先用归纳法证明

$$a^{mp^r} \equiv 1 \ (\bmod p^{k+r})\ 且\ a^{mp^r} \not\equiv 1 \ (\bmod p^{k+r+1}). \tag{1}$$

当 $r = 0$ 时,由已知结论成立.

假设当 $r < t$ 时结论成立.

当 $r = t$ 时,由归纳假设

$$a^{mp^{t-1}} = 1 + p^{k+t-1}T_{t-1},\ p \nmid T_{t-1}.$$

因此

$$a^{mp^t} = (1 + p^{k+t-1}T_{t-1})^p = 1 + p^{k+t}T_t,$$

其中 $T_t$ 为整数,$p \nmid T_t$.

由归纳法知(1)式对所有非负整数都成立.

假设 $n$ 是满足 $a^s \equiv 1 \ (\bmod p^{k+r})$ 的最小正整数 $s$,

则 $a^n \equiv 1 \ (\bmod p)$.

由 $m$ 的最小性知 $m \mid n$,由(1)式及 $n$ 的最小性知 $n \mid mp^r$.

因此可设 $n = mp^t$, $t \leqslant r$.

由(1)式知 $a^n = a^{mp^t} = 1 + p^{k+t}K$, $p \nmid K$.

又 $a^n \equiv 1 \ (\bmod p^{k+r})$,

故 $k + r \leqslant k + t$,即 $r \leqslant t$.

所以 $t = r$, $n = mp^r$,结论得证.

**引理4**　在引理3的假定下,再设 $l \mid a^{p^r} - 1$. 若 $a^x \equiv a^y (\bmod p^{k+r})$,则 $l \mid a^x - a^y$.

**证明**　由 $a^x \equiv a^y(\bmod p^{k+r})$,又注意到 $(a,p) = 1$,得 $a^{x-y} \equiv 1 \ (\bmod p^{k+r})$,又由引理3知 $mp^r \mid x - y$,因此 $a^{mp^r} - 1 \mid a^{x-y} - 1$. 又 $l \mid a^{p^r} - 1$,那么 $l \mid a^{x-y} - 1$,所以 $l \mid a^x - a^y$.

**定理 1 的证明**

对于每一个 $i$,都存在一个正整数 $u_i$,使得 $p_i^{u_i} \mid 3^{m_i}-1, p_i^{u_i+1} \nmid 3^{m_i}-1$. 取整数 $m$,使得 $3^m > \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 12}\{p_i^{u_i+1}\}+2$.

由中国剩余定理知

$$M \equiv 2+3^m+3^{m+1} (\bmod 2\cdot 3^{2m}), \tag{2}$$
$$M \equiv 3^{a_i} (\bmod p_i^{u_i+1}q_i),\ i=1,2,\cdots,12,$$

有解.

设 $n$ 为非负整数. 由引理1知存在一个 $i$,使得 $n\equiv a_i(\bmod m_i)$,且 $3^{m_i}\equiv 1\ (\bmod p_i)$,从而 $3^n\equiv 3^{a_i}(\bmod p_i)$,于是 $M-3^n=p_i^{\alpha_i}K_i, \alpha_i\geqslant 1, p_i\nmid K_i$. 因此,要证明定理,只需证明 $|K_i|>1$.

由(2),知 $|M-3^n|=|2+3^m+3^{m+1}+2\cdot 3^{2m}U-3^n|$,

再根据文献[12],知 $|M-3^n|=|2+3^m+3^{m+1}+2\cdot 3^{2m}U-3^n|\geqslant 3^m-2>p_i^{u_i+1}$.

若 $\alpha_i\leqslant u_i$,由 $|K_i|p_i^{\alpha_i}=|M-3^n|>p_i^{u_i+1}$,知 $|K_i|>1$.

若 $\alpha_i\geqslant u_i+1$,则 $3^n\equiv 3^{a_i}(\bmod p_i^{u_i+1})$,注意到 $p_i^{u_i}\mid 3^{m_i}-1, p_i^{u_i+1}\nmid 3^{m_i}-1, q_i\mid 3^{p_i}-1$,

由引理4,得 $q_i\mid 3^{a_i}-3^n$,又 $q_i\mid M-3^{a_i}$,因此 $q_i\mid K_i$.

这样,定理 1 证毕.

**定理 2 的证明**

设

$$M_0\equiv 2+3^m+3^{m+1}(\bmod 2\cdot 3^{2m}), M_0\equiv 3^{a_i}(\bmod p_i^{u_i+1}q_i),\ i=1,2,\cdots,12,$$

则

$$(M_0, 2\cdot 3^{2m}p_1^{u_1+1}p_2^{u_2+1}\cdots p_{12}^{u_{12}+1}q_1q_2\cdots q_{12})=2.$$

由 Dirichlet 关于在算术数列中的素数定理,知在

$$\{M_0/2+3^{2m}p_1^{u_1+1}p_2^{u_2+1}\cdots p_{12}^{u_{12}+1}q_1q_2\cdots q_{12}l,\ l=0,1,\cdots\}$$

中存在无穷多个素数 $q$,使得 $2q$ 不能表为 $3^k+p^\alpha$ 形式.

这样,定理 2 证毕.

致谢:感谢导师陈永高教授的热情指导和帮助.

## [参考文献]

[1] Chen Y G. On integers of the form $2^n\pm p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$[J]. Proc Amer Math Soc, 2000, 128:1613—1616.
[2] Chen Y G. On integers of the form $k2^n+1$[J]. Proc Amer Math Soc, 2001, 129:355—361.
[3] Chen Y G. On integers of the forms $k-2^n$ and $k2^n+1$[J]. J Number Theory, 2001, 89:121—125.
[4] Chen Y G. On integers of the forms $k^r-2^n$ and $k^r2^n+1$[J]. J Number Theory, 2003, 98:310—319.
[5] Chen Y G, Sun X G. On Romanoff's Constant[J]. J Number Theory, 2004, 106:275—284.
[6] Erdö s P. On integers of the form $2^r+p$ and some related problems[J]. Brasil Math, 1950, 2:113—123.
[7] Guy R K. Unsolved Problems in Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1994.
[8] Nathanson M B. Additive Number Theory: The Classical Bases[M]. New York: Springer-Verlag, 1996.
[9] Romanoff N P. Über einige sätze der additiven Zahlentheorie[J]. Math Ann, 1934, 57:668—678.
[10] Sun Z W. On integers not of the form $\pm p^\alpha\pm q^\beta$[J]. Proc Amer Math Soc, 2000, 128:997—1002.
[11] 孙学功. 关于 $p+a^k$ 型整数[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2004, 27(1):20—23.
[12] 孙学功. 关于 $p+3^k$ 型整数[J]. 扬州大学学报(自然科学版), 2004, 7(3):10—11.

[责任编辑:陆炳新]