

外力 F_{ext} 作用下六角密排颗粒结构中力的分布

张 林

(南京师范大学物理科学与技术学院, 210097, 江苏, 南京)

[摘要] 研究了二维无摩擦的六角密排结构的球形颗粒系统在顶层单个外力作用下的力的分布. 在此过程中使用了统计方法: 认为在各种接触力的作用下该系统的结构分布是等概率的. 发现在该系统中: 当深度 $z \ll 1$ 时, 各层力的分布会出现双峰的结构, 并且双峰的高度会随着深度 z 的增加而呈幂函数递减.

[关键词] 外力作用, 六角密排颗粒系统, 力的分布

[中图分类号] O469, [文献标识码] A, [文章编号] 1001-4616(2005)03-0043-04

Force Distribution of a Hexagonal Packing Granular System Under a External Force F_{ext}

Zhang Lin

(School of Physical Science and Technology, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

Abstract: The force distribution of a two-dimensional hexagonal packing granular system of rigid, frictionless, spherical grains is studied under a vertical downward point force on a single grain at the top layer. A statistical approach that each configuration of the contact force is equally likely is used. The results show that the force distribution in each layer of the system is double-peaked when the depth $z \ll 1$ and the height of the peak quickly decrease as a power law with the depth increases.

Key words: external force, hexagonal packing granular system, force distribution

0 引言

颗粒系统中力的分布已经成为当前颗粒研究领域的热点问题之一^[1]. 目前, 有关颗粒的连续弹性介质理论在工程上得到了广泛的应用, 但是这种理论在微观领域却是不成功的; 而一些相关的模型(例如 q 模型^[2,3], 或者更为复杂的 stress-only 模型)在过去的几年中也得到了迅速的发展, 但是这些模型在微观方面也没有形成理论上的一致. 颗粒系统中的力是各相异性的, 很大程度上依赖于颗粒的形状和空间的结构. 即使在相同的颗粒结构中, 系统中的力也会出现很大的波动^[4,5], 在这种情况下, 统计方法的选择是很重要的. 几年前, Edwards 提出了一个重要的统计假设^[6], 认为在系统中所有的接触结构都是等概率分布的. 首先, 系统中的力显然依赖于下层接触颗粒的网络结构, 这意味着不同的网络结构就会产生不同的接触力. 其次, 力大小的随机性变化即使在一个固定的网络结构中也会出现. 这是因为力不能由接触结构唯一确定. 因此, 为了消去这种自发的随机性, 一种很自然的方法就是先对固定的结构求系统力的平均, 再对系统可能会出现结构求系统结构的平均.

1 模型和方法

本文将讨论一个二维的无摩擦的六角密排的颗粒系统. 该系统具有两个竖直的周期性边界, 并且系统中的颗粒都被认为是刚性的球粒^[1]. 外力 F_{ext} 从最上层的单个颗粒沿下层近邻的两个颗粒逐层往下传递, 如图 1 所示. 在此模型中我们主要考虑平均力 $\langle W^{(i,j)} \rangle$ 在 i 层随水平位置 j 的分布(其中 $W^{(i,j)}$ 表示第 i 层

第 j 列的颗粒传递给下层颗粒的接触力的竖直分量,尖括号是对系统所有的等概率分布求平均).

首先介绍一下处理该问题的一般方法:对于 P 个颗粒组成的二维无摩擦的刚性颗粒系统而言,假设颗粒之间、颗粒与边界之间共有 Q 个接触点,根据经典力学的知识可知:系统就有 Q 个未知的接触力和 $2P$ 个平衡方程(系统共有 P 个颗粒,每个颗粒都具有 x 和 y 方向上的两个力平衡方程),则系统中力的平衡方程就可以写成

$$A \cdot F = F_{\text{ext}},$$

这里的 A 是 $2P \times Q$ 维的系数矩阵; F_{ext} 是 $2P$ 维已知的列向量(在实际过程中, F_{ext} 是可以给定或测量得到的),通过求解上述线性方程组就可以得到系统中的力. 通常情况下,平衡方程的数目 $2P$ 要小于未知力的数目 Q ,其解不是唯一的,必然有无穷多个解,即系统的结构通常是超平衡的. 我们可以将系统中力的集合写成由 d_k 个正交、不相关的基矢量 $\{F^l\} (l = 1, \dots, d_k = Q - 2P)$ 组成的解空间的形式. 即可写成:

$$F = F^* + \sum_{l=1}^{Q-2P} f_l F_l,$$

其中 F^* 是与 $F_l (l = 1, \dots, d_k = Q - 2P)$ 都正交的一个特解. 这样的解只是系统中力平衡方程的数学解,它不一定是符合物理实际的解. 系统中力的解的集合 $\{F_n^{(i,j)}\}$ 要符合物理实际就必须满足以下两个基本条件:

① 平衡条件:即系统中作用在每个颗粒上的接触力的合力为零,

$$\sum_k F_{k,x}^{(i,j)} = 0, \sum_k F_{k,y}^{(i,j)} = 0,$$

其中上标 (i, j) 表示颗粒的位置是第 i 层第 j 列;下标 k 表示作用在该颗粒上的第 k 个力; x, y 表示力在水平和竖直方向上的分量.

② coulomb 条件:要求所有的 $F_k^{(i,j)} \geq 0$.

在我们的计算方法中,力的方向已经包括在系数矩阵 A 中,因此所有的 $F_k^{(i,j)}$ 都必须大于等于零.

在 Srdjan Ostojic 等人的模型中:他们将颗粒的重力 mg 都看成是系统的外力,因此系统中需要求解的力包括颗粒之间的内力、颗粒与边界之间的作用力. 对于图 1 所示的一个 $(N+2) \times P$ 维的系统而言,其中未知力的数目 $Q = 3NP + 5P$,共有 $2(N+2)P$ 个平衡方程,那么解空间基矢量的数目 $d_k = (N+1)P$. 他们选取了 $F_3^{(i,1)} (i \leq (N+1))$ 和 $F_4^{(i,j)} (i \leq N, 1 \leq j \leq P)$ 为解空间基矢量. 我们在该模型中先不考虑颗粒的重力,则系统中各层颗粒的受力情况如图 2 所示:

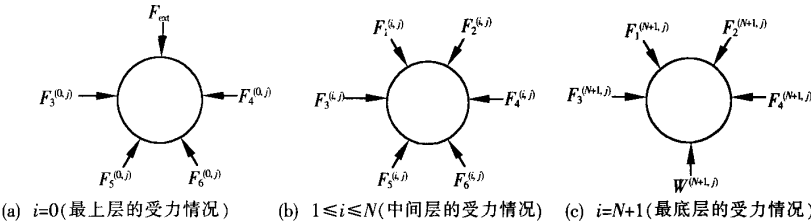


图 2 系统中第 i 层第 j 列颗粒的受力情况

下面,着重介绍一下我们求解该模型中的力所使用的近似方法:对于图 3 所示的系统而言:两条粗实线表示各层竖直作用力 $W^{(i,j)}$ 出现峰值的位置,区域 1、3 表示了峰线以外的两个区域,区域 2 表示峰线以内的区域. 我们以两条峰线为边界,分别讨论峰线以外的区域,峰线,以及峰线以内区域颗粒的受力情况. 为了方便起见,我们将 $F_1^{(i,j)}$ 、 $F_2^{(i,j)}$ 看成是系统颗粒的输入力,将 $F_5^{(i,j)}$ 和 $F_6^{(i,j)}$ 看成是输出力. 因为 $W^{(i,j)} = \frac{\sqrt{3}}{2}(F_5^{(i,j)} + F_6^{(i,j)})$,所以有必要将各层的 $F_5^{(i,j)}$ 和 $F_6^{(i,j)}$ 都表示出来,在我们的模型中必须保证对于所有的 $F_n^{(i,j)} \geq 0$,这是一个重要的前提条件.

对于最上层的颗粒的受力情况由图 2(a) 可知:

$$F_5^{(0,j)} = \frac{1}{\sqrt{3}} F_{\text{ext}} + (F_4^{(0,j)} - F_3^{(0,j)}) \quad (1)$$

$$F_6^{(0,j)} = \frac{1}{\sqrt{3}} F_{\text{ext}} - (F_4^{(0,j)} - F_3^{(0,j)}) \quad (2)$$

同样对于中间层的颗粒的受力情况由图 2(b) 可知:

$$F_5^{(i,j)} = F_2^{(i,j)} + (F_4^{(i,j)} - F_3^{(i,j)}) \quad (3)$$

$$F_6^{(i,j)} = F_1^{(i,j)} - (F_4^{(i,j)} - F_3^{(i,j)}) \quad (4)$$

对于最底层颗粒的受力情况由图 2(c) 可知:

$$\langle W^{(N+1,j)} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} (F_1^{(N+1,j)} + F_2^{(N+1,j)}) \quad (5)$$

根据上面单个颗粒的受力情况,可以对三个不同区域颗粒的竖直力做必要的分析和近似.

(1) 峰线以外的颗粒(如图 3 中的区域 1,3)

由于最上层的 $F_{\text{ext}} = 0$,由方程(1)和(2)可知:

$$F_3^{(0,j)} = F_4^{(0,j)} \quad (6)$$

$$F_5^{(0,j)} = F_6^{(0,j)} = 0 \quad (7)$$

同理对于中间层的颗粒而言: $F_5^{(i,j)}$ 和 $F_6^{(i,j)}$ 既是 i 层颗粒的输出力,又分别等于 $i+1$ 层颗粒的输入力 $F_1^{(i+1,j)}$ 和 $F_2^{(i+1,j)}$,因此中间层的力具有与最上层相同的解的形式.

在峰线以外的各层颗粒中的输出力都将满足(6)和(7),则必然有

$$W^{(i,j)} = \frac{\sqrt{3}}{2} (F_5^{(i,j)} + F_6^{(i,j)}) \equiv 0 \quad (8)$$

(8) 式就是峰线以外竖直力的解.

(2) 峰线上的颗粒(如图 3 中的粗实线所示)

同样最上层的颗粒因为 $F_{\text{ext}} \neq 0$,所以该处的输出力 $F_5^{(0,j)}$ 和 $F_6^{(0,j)}$ 将不为零.

对于中间层的颗粒,由于 $F_1^{(i,j)}$ 是峰线外的作用力,由(7)知:其必然为零.再由(4)知,为了保证 $F_6^{(i,j)} \geq 0$,则必然要求 $F_4^{(i,j)} \leq F_3^{(i,j)}$,为了计算方便,我们取 $F_4^{(i,j)} = 0$,并且取 $F_3^{(i,j)} = F_2^{(i,j)} q_i$,其中 $q_i \in (0, 0.5)$. 这样就可以得到峰线上任意层输出力和输入力之间的关系:

$$F_5^{(i,j)} = F_2^{(i,j)} (1 - q_i) \quad (9)$$

$$F_6^{(i,j)} = F_2^{(i,j)} q_i \quad (10)$$

由(9)和(10)可以进一步得到峰线上任一层输出力与外力的递推关系:

$$F_5^{(i,j)} = F_{\text{ext}} \prod_{i'=1}^i (1 - q_{i'}) \quad (11)$$

$$F_6^{(i,j)} = F_{\text{ext}} \prod_{i'=1}^i (1 - q_{i'-1}) q_i \quad (12)$$

由(11)和(12)式就可以得到峰线上竖直力 $W^{(i,j)} = \frac{\sqrt{3}}{2} (F_5^{(i,j)} + F_6^{(i,j)})$ 的解.

(3) 峰线以内的颗粒(如图 3 中的区域 2)

因为 $F_1^{(i,j)} \neq 0$, $F_2^{(i,j)} \neq 0$ 并且是随机变化的,只有通过求解方程(3)和(4)才能得到相关的解.我们采用了相关的标量 q 模型近似,即认为 $F_5^{(i,j)} = F_6^{(i,j)}$,则

$$F_5^{(i,j)} = F_6^{(i,j)} = \frac{F_2^{(i,j)} + F_1^{(i,j)}}{2} \quad (13)$$

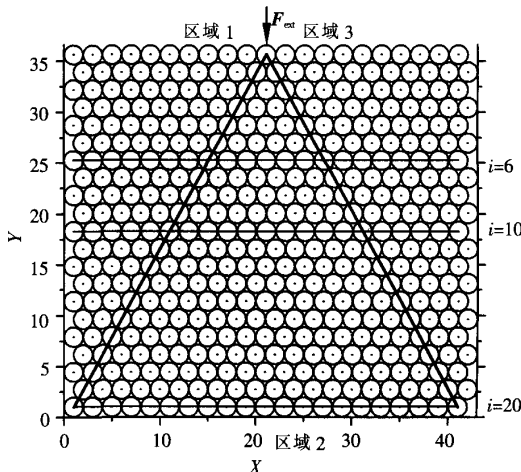


图 3 21×21 的颗粒系统

由(13)式就可以得到峰线内竖直力 $W^{(i,j)} = \frac{\sqrt{3}}{2}(F_5^{(i,j)} + F_6^{(i,j)})$ 的解.

2 结论

根据上述近似方法我们具体模拟了 21×21 的颗粒系统(如图3所示),从图中可以看出系统中的 $N = 19$, $P = 21$,则有1302个未知作用力,882个平衡方程,需要420个基矢量,取参量 $F_{\text{ext}} = 20.0$,定义 $x = \frac{j-11}{N+1}$ 和 $x = \frac{j-11+0.5}{N+1}$,分别对应奇数层和偶数层,并且定义深度 $z = \frac{i}{N+1}$. 我们在计算过程中对同一系统结构取了1000次平均,分别计算了 $i = 6, 10, 20$ 层的竖直力的分布,从而得到以下几点结论:

(1) 当 $z \ll 1$ 时, $\langle W^{(i,j)} \rangle$ 值在峰线外恒等于零(图4中 $z = 0.3, 0.5$ 的区域1、3);在峰线上达到最大值,在峰线内是单峰的对称平滑曲线(图4中 $z = 0.3, 0.5$ 的区域2). 当 $z = 1.0$ 时,并不出现双峰结构,而是一个单峰的平滑曲线(图4中 $z = 1.0$ 的曲线).

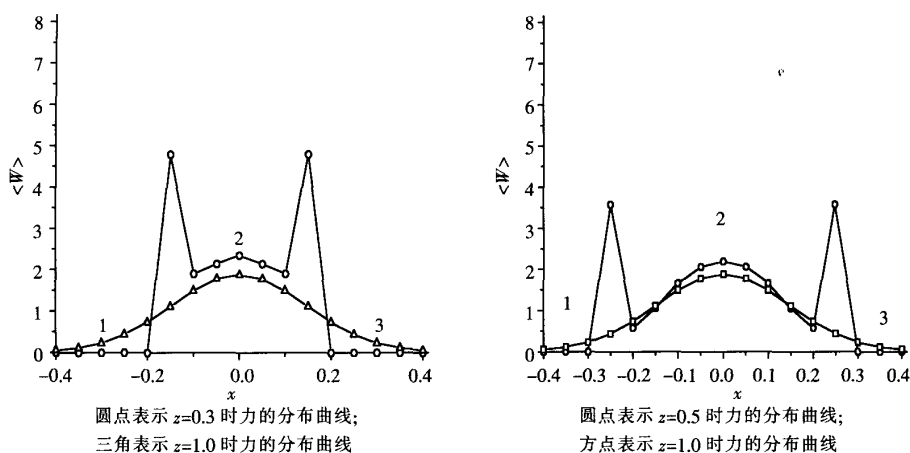


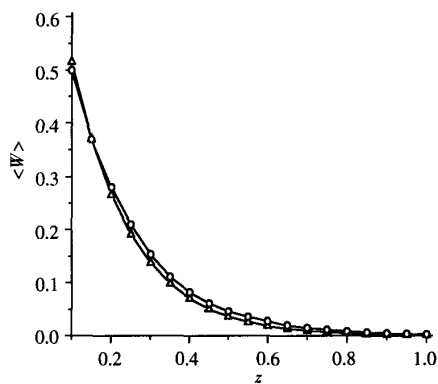
图4 系统中各层力随位置的分布图

(2) 峰线内中心会出现平滑的单峰结构(图4区域2),它也会随着深度 z 的增加而缓慢递减.

(3) 峰线内的光滑曲线随着深度 z 的增加,会随着峰线逐渐向两边边界扩散(图4区域2).

(4) 峰值 $\langle W^{(i,j)} \rangle$ 随着深度 z 的增加而呈幂函数递减(图5).

我们所得到的结论与 Srdjan 等人对系统结构取等概率假设的结果非常相似,一定程度上也反映了实验的结论,例如峰线上极值力的出现及其随深度增加呈幂函数的衰减规律.我们在处理问题的过程中用了许多近似方法(例如标量的 q 模型),不可能完全反映系统中力的分布的实际情况,例如峰线上极值力的宽度在我们的模型中是不变的,而在实验中是随着层数递增的.但是对大量颗粒做大量统计的极限的情况下,我们的结论还是近似正确的.当然,本文的工作只是初步的,有关工作还有待进一步深入和完善.



圆点表示 $x=z$ 处平均力的分布结构,即峰线上的力 $\langle W^{(i,j)} \rangle$ 随着深度 z 呈幂函数衰减的关系;三角表示在式(11)中取 $q=0.282$ 的曲线图

图5 $x=z$ 处力的分布图

(下转第64页)

2.7 反应温度对酸化反应的影响

选择反应物料比 $n_{\text{HCl}}:n_{\text{亚氨基二乙酸钙}} = 4:1$, 反应时间为 1.5 h, 考察不同反应温度对产品回收率的影响, 实验结果见图 7.

随着反应温度的增大, 亚氨基二乙酸的回收率也逐渐增大. 最适宜反应温度为 80 °C 左右.

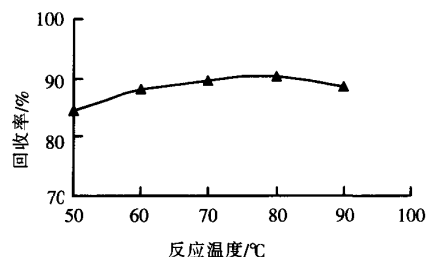


图7 反应温度对产品回收率的影响

3 结论

(1) 在亚氨基二乙酸酸化母液中加入 Ca^{2+} , 在一定条件下使它们形成亚氨基二乙酸钙络合物沉淀, 沉淀分离后酸化得到亚氨基二乙酸产品. 亚氨基二乙酸产品总回收率达到 87.8%.

(2) 将回收得到的亚氨基二乙酸产品进行元素分析, 结果 C:36.07%; H:5.27%; N:10.42%. 证实回收所得产品为亚氨基二乙酸.

(3) 合成亚氨基二乙酸钙最佳实验操作条件为: 反应温度: 80 °C、反应时间: 2 h、反应酸度: pH = 11.00、物料用量比 $n_{\text{Ca(OH)}_2}:n_{\text{亚氨基二乙酸}} = 1.25:1$, 亚氨基二乙酸钙回收率为 97.4%.

(4) 酸化亚氨基二乙酸钙制备亚氨基二乙酸最佳实验操作条件为: 反应温度: 80 °C、反应时间: 1 ~ 1.5 h、物料用量比 $n_{\text{HCl}}:n_{\text{亚氨基二乙酸钙}} = 4:1$, 所得产品回收率为 90.2%.

[参考文献]

- [1] 曾小君, 杨高文, 杨刚. 亚氨基二乙酸的合成研究[J]. 农药, 2002, 41(6): 19—20.
- [2] 刘长春. 亚氨基二乙酸的开发与应用[J]. 应用化学, 2001, 30(2): 16—18.
- [3] 金丽, 冯世宏. 亚氨基二乙酸的合成与应用[J]. 辽宁工学院学报, 2001, 21(1): 15—16.
- [4] Robert W Bragdon, Jon C Thunberg, William P Moore. Process for recovering iminodiacetic acid from sodium chloride solutions[P]. USPat.: 3852344, 1973—11—15.
- [5] De Diego Zori Asuncion, Martin Ramon Juan Luis, Ochoa Gomez Jose Ramon. Process for the isolation and purification of free acids, starting from their salts, By electrodialysis [P]. EPPat: 0438369, 1991—07—24.
- [6] 蔡哲斌, 严赞开, 李爱国. 亚氨基二乙酸盐酸盐的合成[J]. 湖北农学院学报, 1999, 19(3): 256—259.

[责任编辑: 孙德泉]

(上接第46页)

[参考文献]

- [1] Ostojic S, Panja D. Response of a hexagonal granular packing under a localized external force[J]. J Stat Mech, 2005: p01011-1—p01011-38.
- [2] Coppersmith S N, Liu C, Majumdar S, et al. Model for force fluctuations in bead packs[J]. Phys Rev E, 1996, 53(5): 4673—4685.
- [3] Liu C H, Nagele S R, Coppersmith S N, et al. Force fluctuations in bead packs[J]. Science, 1995, 269(5223): 513—515.
- [4] Geng J, Howell D, Longhi E, et al. Footprints in sand: the response of a granular material to local perturbations[J]. Phys Rev Lett, 2001, 87(3): 035506-1—035506-4.
- [5] Geng J, Reydellet G, Clement E, et al. Green's function measurements of force transmission in 2D granular materials[J]. Physica D, 2002, 182(3—4): 274—303.
- [6] Edwards S F, Grinev D V. Transmission of stress in granular material as a problem of statistical mechanics[J]. Physica A, 2001, 302(1—4): 162—186.

[责任编辑: 丁蓉]