

关于两个 Cartesian 闭范畴交的一点注记

刘菡^{1,2}, 贺伟¹

(1. 南京师范大学数学与计算机科学学院 210097, 江苏, 南京)

(2. 徐州师范大学数学系 221116, 江苏, 徐州)

[摘要] 讨论了关于双 Scott 拓扑的一些性质. 证明了范畴 $BICONT$ (即以双连续格为对象, 以双 Scott 连续映射为态射的范畴) 作为两个 Cartesian 闭范畴 $BICONT_S$ (即以双连续格为对象, 以 Scott 连续映射为态射的范畴) 和 $BICONT_{Sop}$ (即以双连续格为对象, 以对偶 Scott 连续映射为态射的范畴) 的交范畴不是 Cartesian 闭范畴.

[关键词] 双 Scott 拓扑, 双连续格, 双 Scott 连续映射, 对偶 Scott 连续映射, Cartesian 闭范畴

[中图分类号] O153.1, O154, [文献标识码] A, [文章编号] 1001-4616(2005)04-0013-05

A Remark on the Meet of Two Cartesian Closed Categories

Liu Han^{1,2}, He Wei¹

(1. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

(2. Department of Mathematics, Xuzhou Normal University, 221116, Xuzhou, China)

Abstract In this paper we discuss some properties of bicont topology. Then we prove that the category $BICONT$ (i. e. the category whose objects are bicontinuous lattices and whose morphisms are bicontinuous maps), as the intersectional category of two Cartesian closed categories $BICONT_S$ (i. e. the category whose objects are bicontinuous lattices and whose morphisms are scott continuous maps) and $BICONT_{Sop}$ (i. e. the category whose objects are bicontinuous lattices and whose morphisms are dual scott continuous maps) is not a Cartesian closed category.

Key words bicont topology, bicontinuous lattice, bicontinuous map, dual scott continuous map, Cartesian closed category

现代数学工具范畴论在格上拓扑学研究中的渗透,使得格上拓扑学更加充满生机. 无论从范畴论角度还是在具体应用中, Cartesian 闭范畴都是一个重要的概念. 我们知道以连续格为对象, 以 Scott 连续映射为态射的范畴 $CONT$ 是 Cartesian 闭的. 在连续格理论中, Scott 拓扑与 Lawson 拓扑是两个重要的研究对象, 但格上 Scott 拓扑与 Lawson 拓扑不具有对称性, 即格 L 与其对偶格 L^o 上的相应拓扑一般不同, 这往往不利于问题的解决. 在 [2] 中曾给出双 Scott 拓扑的定义, 它是一个对称概念, 相应的可以定义双 Scott 连续映射, 但是以连续格为对象, 以双 Scott 连续映射为态射的范畴 $CONTBI$ 不是 Cartesian 闭的. 自然的, 我们会问以双连续格为对象, 以双 Scott 连续映射为态射的范畴 $BICONT$ 是否是 Cartesian 闭的? 以及 $BICONT$ 范畴的满子范畴 $CDBI$ (即以完全分配格为对象, 以双 Scott 连续映射为态射的范畴) 是否 Cartesian 闭? 本文将证明这两个范畴都不是 Cartesian 闭范畴, 同时我们证明以双连续格为对象, 以 Scott 连续映射为态射的范畴 $BICONT_S$ 和以双连续格为对象, 以对偶 Scott 连续映射为态射的范畴 $BICONT_{Sop}$ 都是 Cartesian 闭范畴, 因此范畴 $BICONT$ 作为两个 Cartesian 闭范畴 $BICONT_S$ 和 $BICONT_{Sop}$ 的交范畴不是 Cartesian 闭的. 文中没有定义的符号和术语参看文献 [1] 和 [3].

收稿日期: 2005-05-28.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10331010).

作者简介: 刘菡, 女, 1974—, 博士研究生, 主要从事拓扑学的学习与研究. E-mail: liuhan_001@yahoo.com.cn

通讯联系人: 贺伟, 1964—, 教授, 博士生导师, 主要从事拓扑学的教学与研究. E-mail: weihe@njnu.edu.cn

1 预备知识

设 L 是完备格, $\sigma(L)$ 表示 L 上的 Scott 拓扑, 记 $\Sigma(L) = (L, \sigma(L))$.

$\omega(L)$ 表示 L 上的下拓扑, 它是由 $\{L \uparrow x \mid x \in L\}$ 生成的.

$\lambda(L)$ 表示 L 上的 Lawson 拓扑, 它是由 $\sigma(L) \cup \{L \uparrow x \mid x \in L\}$ 生成的, 显然 $\omega(L) \subseteq \lambda(L)$.

定义 1.1 设 L 是完备格, $\bar{\sigma}(L)$ 表示 L 上的双 Scott 拓扑, 它是由 $\sigma(L) \cup \sigma(L^{op})$ 生成的, 记 $\bar{\Sigma}(L) = (L, \bar{\sigma}(L))$.

显然 $\bar{\sigma}(L)$ 有一组基 $\mathcal{B} = \{U \cap V \mid U \in \sigma(L), V \in \sigma(L^{op})\}$; 又 $\bar{\sigma}(L^{op}) = \bar{\sigma}(L)$, 所以双 Scott 拓扑具有对称性. 由 $\omega(L) \subseteq \sigma(L^{op})$ 知 $\lambda(L) \subseteq \bar{\sigma}(L)$.

设 S, T 是完备格, $f: S \rightarrow T$ 是一个函数. 若 $f: \Sigma(S) \rightarrow \Sigma(T)$ 连续, 则称 f 为 Scott 连续映射; 若 $f: \Sigma(S^{op}) \rightarrow \Sigma(T^{op})$ 连续, 则称 f 为对偶 Scott 连续映射; 若 $f: \bar{\Sigma}(S) \rightarrow \bar{\Sigma}(T)$ 连续, 则称 f 为双 Scott 连续映射. 由 [1] 知 f 是 Scott 连续映射当且仅当 f 保定向并, 对偶的 f 是对偶 Scott 连续映射当且仅当 f 保滤子化交.

设 $a, b \in L$, 称 a waybelow b , 记作 $a \ll b$, 若对任意定向集 $D \subseteq L, b \leq \bigvee D$, 则存在 $d \in D$, 使得 $a \leq d$.

若对任意 $a \in L$, 有 $a = \bigvee \{b \in L \mid b \ll a\}$, 则称完备格 L 为连续格. 在连续格 L 中, 若 $a, b \in L, a \ll b$, 则存在 $u \in L$, 使 $u \ll a$, 但 $u \not\ll b$. 由此得 $a \leq b$ 当且仅当对任意 $t \in L, t \ll a$, 有 $t \leq b$.

对偶的, 设 $a, b \in L$, 定义 $a \ll^{op} b$, 若对任意滤子化集 $E \subseteq L, b \geq \bigwedge E$, 则存在 $e \in E$, 使得 $a \geq e$. 显然在 L 中 $a \ll^{op} b$ 当且仅当在 L^{op} 中 $a \ll b$. 从而 L^{op} 为连续格当且仅当对任意 $a \in L$, 有 $a = \bigwedge \{b \in L \mid b \ll^{op} a\}$. 易知关系 \ll^{op} 有下述性质:

命题 1.2 设 L 是完备格, $a, b \in L$,

- (1) 若 $a \ll^{op} b$, 则 $a \geq b$;
- (2) 若 $a \ll^{op} b$ 且 $b \geq c$, 则 $a \ll^{op} c$.

命题 1.3 设 L^{op} 为连续格, 若 $a, b \in L, a \not\ll b$, 则存在 $u \in L, u \ll^{op} a$, 但 $u \not\ll b$.

命题 1.4 设 L^{op} 为连续格, 则 $a \geq b$ 当且仅当对任意 $t \in L, t \ll^{op} a$, 有 $t \geq b$.

若 L 与 L^{op} 均为连续格, 则称 L 为双连续格. 由 [1] 知 L 为完全分配格当且仅当 L 是分配的双连续格. 下面介绍一些范畴论的基础知识.

定义 1.5 设 $G: A \rightarrow B$ 为函子, B 为 B 对象, B 上一个 G 万有映射 (G -universal map over B) 是一个 B 态射 $u: B \rightarrow G(A)$, 使对任意 A 对象 A' 和任意 B 态射 $f: B \rightarrow G(A')$, 存在唯一的 A 态射 $\bar{f}: A \rightarrow A'$, 使 $f = G(\bar{f}) \circ u$, 即下面图表交换:

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xleftarrow{u} & B \\ G(\bar{f}) \downarrow & \swarrow f & \\ G(A') & & \end{array}$$

对偶的, 以 B 为值域的一个 G 余万有映射 (G -co-universal map with codomain B) 是一个 B 态射 $v: G(A) \rightarrow B$, 使对任意 A 对象 A' 和任意 B 态射 $g: G(A') \rightarrow B$, 存在唯一的 A 态射 $\bar{g}: A' \rightarrow A$, 使得 $g = v \circ G(\bar{g})$, 即下面图表交换:

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{v} & B \\ G(\bar{g}) \uparrow & \nearrow g & \\ G(A') & & \end{array}$$

定义 1.6 函子 $G: A \rightarrow B$ 称为伴随的 (adjoint), 如果对于任意 B 对象 B , 存在一个 B 上的 G 万有映射.

对偶的, 函子 $G: A \rightarrow B$ 称为余伴随的 (co-adjoint), 如果对于任意 B 对象 B , 存在一个以 B 为值域的 G 余万有映射.

定义 1.7 设范畴 A 有有限乘积, A 为 A 对象, 定义函子 $(A \times -): A \rightarrow A$ 如下:

$$(A \times -)(f: B \rightarrow C) = id_A \times f: A \times B \rightarrow A \times C.$$

定义 1.8 范畴 A 称为 Cartesian 闭的,如果 A 有有限乘积,且对任意 A 对象 A , 函子 $(A \times -): A \rightarrow A$ 是余伴随的.

2 双 Scott 拓扑的性质

首先讨论完备格 L 上双 Scott 拓扑的分离性.

由 [1] 知 $\lambda(L)$ 是 T_1 拓扑,又 $\lambda(L) \subseteq \overline{\sigma}(L)$, 所以 $\overline{\sigma}(L)$ 也是 T_1 拓扑. 进一步,当 L 是连续格时,由 [1] 知 $\lambda(L)$ 是 Hausdorff 拓扑,同理 $\overline{\sigma}(L)$ 也是 Hausdorff 拓扑. 由此得:

命题 2.1 设 L 是完备格,则 $\overline{\lambda}(L)$ 是 T_1 拓扑空间.

命题 2.2 设 L 是连续格,则 $\overline{\lambda}(L)$ 是 Hausdorff 拓扑空间.

下面讨论完备格上双 Scott 拓扑之间连续函数的性质.

引理 2.3^[4] 设 L 是完备格, $D \subseteq L$ 是定向集,若将 D 视作网,那么 $\lim_{\sigma} D = \bigvee D$; 同理若 $E \subseteq L$ 是滤子化集,那么 $\lim_{\sigma} E = \bigwedge E$. 且极限都惟一.

定理 2.4 设 S, T 是完备格, $f: S \rightarrow T$ 是一个函数,则下述条件等价:

(1) $f: \overline{\lambda}(S) \rightarrow \overline{\lambda}(T)$ 连续;

(2) $f(\underline{\lim} x_j) \leq \underline{\lim} f(x_j)$ 且 $f(\overline{\lim} x_j) \geq \overline{\lim} f(x_j)$, 其中 $\{x_j\}_{j \in J}$ 是 S 中的网;

(3) f 保定向并与滤子化交.

证明 (1) \Rightarrow (3). 设 $f: \overline{\lambda}(S) \rightarrow \overline{\lambda}(T)$ 连续.

首先证 f 保序. 设 $x, y \in S, x \leq y$. 若 $f(x) \not\leq f(y)$, 则 $V = T \setminus \downarrow f(y)$ 是 $\overline{\sigma}(T)$ 开集,且 $f(x) \in V$, 于是 $x \in f^{-1}(V)$, 且 $f^{-1}(V)$ 是 $\overline{\sigma}(S)$ 开集,所以 $y \in f^{-1}(V)$, 即 $f(y) \in T \setminus \downarrow f(y)$, 矛盾. 故 f 保序;

再证 f 保定向并. 设 $D \subseteq S$ 定向,由 f 保序知 $f(D)$ 是 T 中的定向集,且

$$f(\bigvee D) = f(\lim_{\sigma} D) = \lim_{\sigma} (f(D)) = \bigvee f(D),$$

所以 f 保定向并;

同上可证 f 保滤子化交.

因此 (3) 成立.

(3) \Rightarrow (1) 由于 f 保定向并,所以 $f: \overline{\lambda}(S) \rightarrow \overline{\lambda}(T)$ 连续;对偶的, f 保滤子化交,则 $f: \overline{\lambda}(S^{op}) \rightarrow \overline{\lambda}(T^{op})$ 连续,因此 $f: \overline{\lambda}(S) \rightarrow \overline{\lambda}(T)$ 连续.

(2) \Rightarrow (3) 首先证 f 保序. 设 $a, b \in S, a \leq b$, 令 $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = a, x_4 = b, \dots$, 则 $\underline{\lim} x_j = a$, 所以

$$f(a) = f(\underline{\lim} x_j) \leq \underline{\lim} f(x_j) = f(a) \wedge f(b),$$

故 $f(a) \leq f(b)$;

再证 f 保定向并. 设 D 是 S 的定向子集,由 f 保序知 $f(\bigvee D) \geq \bigvee f(D)$.

令 $x_d = d, d \in D$, 则

$$\underline{\lim} x_d = \bigvee_{d \in D, d \leq c} c = \bigvee D,$$

于是

$$f(\bigvee D) = f(\underline{\lim} x_d) \leq \underline{\lim} f(x_d) = \bigvee_{d \in D, d \leq c} f(c) = \bigvee_{d \in D} f(d) = \bigvee f(D).$$

所以 f 保定向并;

同上可证 f 保滤子化交.

(3) \Rightarrow (2). 设 $\{x_j\}_{j \in J}$ 是 S 中的网, 则 $\{\bigwedge_{j \leq j'} x_j \mid j \in J\}$ 是 S 中的定向子集, 且 $f(\underline{\lim} x_j) = f(\bigvee_{j \in J} \bigwedge_{j \leq j'} x_j) =$

$$\bigvee_{j \in J} f(\bigwedge_{j \leq j'} x_j) \leq \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{j \leq j'} f(x_j) = \underline{\lim} f(x_j).$$

同理 $f(\overline{\lim} x_j) \geq \overline{\lim} f(x_j)$.

命题 2.5 设 S, T 是完备格,使得 $\sigma(T)$ 与 $\sigma(T^{op})$ 都是连续格,则

$$\overline{\lambda}(S \times T) = \overline{\lambda}(S) \times \overline{\lambda}(T).$$

证明 因 $\sigma(T)$ 是连续格,由 [1] II-4.11 知 $\overline{\lambda}(S \times T) = \overline{\lambda}(S) \times \overline{\lambda}(T)$; 同理,由 $\sigma(T^{op})$ 是连续格,有 $\overline{\lambda}(S \times T)^{op} = \overline{\lambda}(S^{op} \times T^{op}) = \overline{\lambda}(S^{op}) \times \overline{\lambda}(T^{op})$. 从而可证结论成立.

类似于文献 [1] 中相关定理的证明,可以证明下面定理成立.

定理 2.6 设 L 是交连续格,且 $\sigma(L)$ 与 $\sigma(L^{op})$ 都是连续格,则 $\bar{\lambda}(L)$ 是拓扑交半格,即交运算 \wedge

$$(x \wedge y) \wedge z = (x \wedge y) \wedge (L \bar{\sigma}(L)) \times (L \bar{\sigma}(L)) = (L \times L \bar{\sigma}(L \times L)) \rightarrow (L \bar{\sigma}(L))$$

连续.

对偶的,有

定理 2.7 设 L 是并连续格,且 $\sigma(L)$ 与 $\sigma(L^{op})$ 都是连续格,则 $\bar{\lambda}(L)$ 是拓扑并半格,即并运算 \vee

$$(x \vee y) \vee z = (x \vee y) \vee (L \bar{\sigma}(L)) \times (L \bar{\sigma}(L)) = (L \times L \bar{\sigma}(L \times L)) \rightarrow (L \bar{\sigma}(L)).$$

连续.

推论 2.8 设 L 既是交连续格又是并连续格,且 $\sigma(L)$ 与 $\sigma(L^{op})$ 都是连续格,则 $\bar{\lambda}(L)$ 是拓扑格.

由预备知识我们知道 Lawson 拓扑粗于双 Scott 拓扑,但反之不一定成立.那么何时双 Scott 拓扑与 Lawson 拓扑相等?下面我们给出一个充分条件.

定理 2.9 若交运算 \wedge $(L \bar{\sigma}(L^{op})) \times (L \bar{\sigma}(L^{op})) \rightarrow (L \bar{\sigma}(L^{op}))$ 连续,则 $\bar{\sigma}(L) \subseteq \lambda(L)$,从而 $\bar{\sigma}(L) = \lambda(L)$.

证明 要证 $\bar{\sigma}(L) \subseteq \lambda(L)$,只要证 $\sigma(L^{op}) \subseteq \omega(L)$.

设 $U \in \sigma(L^{op})$,记 $A = L \setminus U, x = \bigwedge A$,则 A 是上集.要证 $A = \uparrow x$,只要证 $x \in A$.又 A 是 $\sigma(L^{op})$ 闭集,所以只要证 A 是滤子化集.若 A 不是滤子化集,则存在 $a, b \in A$,但 $a \wedge b \notin A$,即 $a \wedge b \in U$.因为交运算 \wedge $(L \bar{\sigma}(L^{op})) \times (L \bar{\sigma}(L^{op})) \rightarrow (L \bar{\sigma}(L^{op}))$ 连续,所以存在 a, b 的 $\sigma(L^{op})$ 开邻域 V, W ,使 $V \wedge W \subseteq U$,又 V, W 是下集,于是 $V \wedge W = V \cup W \subseteq U$,故 $a \wedge b \in U$,矛盾.因此 A 是滤子化集,从而 $x = \bigwedge A \in A$.又 A 是上集,于是 $A = \uparrow x$,即 $U = L \setminus \uparrow x \in \omega(L)$.

故结论成立.

3 Cartesian 闭性

引理 3.1 设 A, B 是双连续格, $L = B^A$ 表示从 A 到 B 的 Scott 连续映射的全体,则 $L = B^A$ 也是双连续格.

证明 由文献 [1] 可知,如果 B 是连续格,则 $L = B^A$ 也是连续格;对偶的,由于 B^{op} 是连续格,故 L^{op} 也是连续格.因此 L 是双连续格,即 L 是范畴 $BICONT_S$ 中的对象.

引理 3.2 设 A, B, B^A 同上,则赋值映射 $e: A \times B^A \rightarrow B, (x, f) \mapsto f(x)$ 是 Scott 连续映射.

证明 设 D 是 $A \times B^A$ 的定向子集,令 $D_1 = p_1(D), D_2 = p_2(D)$,则

$$\begin{aligned} \epsilon(\bigvee D) &= \epsilon(\bigvee D_1, \bigvee D_2) = (\bigvee D_2) \wedge (\bigvee D_1) = \bigvee_{d_2 \in D_2} d_2(\bigvee D_1) \\ &= \bigvee_{d_2 \in D_2} \bigvee_{d_1 \in D_1} d_2(d_1) = \bigvee_{d_2 \in D_2} \bigvee_{d_1 \in D_1} \epsilon(d_1, d_2) = \bigvee \epsilon(D). \end{aligned}$$

故赋值映射 e 是范畴 $BICONT_S$ 中的态射.

引理 3.3^[1] 设 A, B, C 都是双连续格, $f: A \times C \rightarrow B$ 是函数,则以下两个条件等价:

- (1) $f: A \times C \rightarrow B$ 是 Scott 连续的;
- (2) f 对每一个变量都是 Scott 连续的,即
 - (a) 对任意的 $a \in A$, 函数 $f(a, \cdot): C \rightarrow B, \lambda c. f(a, c)$ 是 Scott 连续的.
 - (b) 对任意的 $c \in C$, 函数 $f(\cdot, c): A \rightarrow B, \lambda a. f(a, c)$ 是 Scott 连续的.

引理 3.4 设 A, B, C, B^A 同上, $f: A \times C \rightarrow B$ 是 Scott 连续函数,定义函数 $\hat{f}: C \rightarrow B^A$,对任意 $c \in C, a \in A, \hat{f}(c)(a) = f(a, c)$,则 \hat{f} 也是 Scott 连续函数.

证明 设 D 是 C 的定向子集,则对任意 $a \in A$,有

$$\hat{f}(\bigvee D)(a) = f(a, \bigvee D) = \bigvee_{d \in D} f(a, d) = \bigvee_{d \in D} \hat{f}(d)(a) = \bigvee \hat{f}(D)(a),$$

由 a 的任意性知 $\hat{f}(\bigvee D) = \bigvee \hat{f}(D)$,即 \hat{f} 保定向并.

记 $BICONT_S$ 范畴为 A 范畴.

引理 3.5 对任意 A 对象 A , 函子 $(A \times -): A \rightarrow A$ 是余伴随的.

证明 对任意 A 对象 B ,存在一个以 B 为值域的 $(A \times -)$ 余万有映射 $e: (A \times -)(B^A) = A \times B^A \rightarrow B$.

事实上,对任意 A 对象 C ,任意 A 态射 $f(A \times -)C = A \times C \rightarrow B$,存在 A 态射 $\hat{f}:C \rightarrow B^A$,对任意 $(a, c) \in A \times C$,有

$$e \circ (A \times -) \hat{f} (a, c) = e \circ (id_A \times \hat{f}) (a, c) = \epsilon(a, \hat{f}(c)) = \hat{f}(c)(a) = f(a, c),$$

于是 $e \circ (id_A \times \hat{f}) = f$,即下面图表交换:

$$\begin{array}{ccc} A \times B^A & \xrightarrow{e} & B \\ id_A \times \hat{f} \uparrow & \nearrow f & \\ A \times C & & \end{array}$$

满足上述条件的 \hat{f} 是惟一的.若存在 $\bar{f}:C \rightarrow B^A$,对任意 $(a, c) \in A \times C$,有

$$e \circ (id_A \times \bar{f}) (a, c) = \epsilon(a, \bar{f}(c)) = \bar{f}(c)(a) = f(a, c),$$

由 \hat{f} 的定义知 $\bar{f} = \hat{f}$.即 \hat{f} 是惟一.

故 $e(A \times -)(B^A) \rightarrow B$ 是以 B 为值域的 $(A \times -)$ 余万有映射.再由余伴随的定义知函子 $(A \times -):A \rightarrow A$ 是余伴随的.

定理 3.6 BICONT_S 范畴是 Cartesian 闭范畴.

证明 若 A, B 是双连续格,显然 $A \times B$ 也是双连续格,即范畴 BICONT_S 有有限乘积.再由引理 3.5 和 Cartesian 闭范畴的定义知结论成立.

定理 3.7 BICONT_{S_{op}} 范畴是 Cartesian 闭范畴.

证明 定理 3.6 的对偶命题.

引理 3.8 如果范畴 BICONT 是 Cartesian 闭范畴,则对任意两个双 Scott 拓扑空间 A, B ,幂对象 B^A 恰好由从 A 到 B 的所有双 Scott 连续映射构成.

证明 设赋值映射为 $e:A \times B^A \rightarrow B, f \in B^A, D \subseteq A$ 是定向集,由于 e 保持定向并,故 $f(\bigvee D) = \epsilon(\bigvee_{d \in D} (d, f)) = \bigvee_{d \in D} \epsilon(d, f) = \bigvee_{d \in D} f(d)$,即 f 保持定向上确界.类似可证 f 保持滤子下确界.

另一方面若 $f:A \rightarrow B$ 是双 Scott 连续映射,令 $f':A \times A \rightarrow B, (a, b) \mapsto f(a)$,则容易验证 f' 是一个双 Scott 连续映射.由赋值映射的万有性,存在惟一的双 Scott 连续映射 $\bar{f}:A \rightarrow B^A$ 使得 $f' = \epsilon(id_A \times \bar{f})$,即下面图表交换:

$$\begin{array}{ccc} A \times B^A & \xrightarrow{e} & B \\ id_A \times \bar{f} \uparrow & \nearrow f' & \\ A \times A & & \end{array}$$

这时 \bar{f} 只有定义为 $\bar{f}(b)(a) = f'(a, b) = f(a)$,故 $f \in B^A$.

例 即使 A, B 是完全分配格, B^A 也不是完备格.

设 $A = [1, 2], B = [0, 1]$,这时 A, B 上的双 Scott 拓扑就是通常的区间拓扑,而双 Scott 连续映射就是通常的连续映射.对任意的自然数 n ,令 $f_n:A \rightarrow B, f_n(x) = \frac{1}{x^n}$,则 $f = \bigwedge f_n$ 满足 $f(1) = 1$,而当 $x \neq 1$ 时 $f(x) = \bigwedge (\frac{1}{x^n}) = 0$,因此 f 不连续.从而 B^A 不是一个完备格.

由引理 3.8 和例知范畴 BICONT 不是 Cartesian 闭范畴,即两个 Cartesian 闭范畴 BICONT_S 和 BICONT_{S_{op}} 的交范畴 BICONT 不是 Cartesian 闭范畴.同理范畴 CDBI 也不是 Cartesian 闭范畴.

[参考文献]

[1] Gierz G, Hofmann K H, Keimel K, et al. A Compendium of Continuous Lattices [M]. New York : Springer-Verlag, 1980.
 [2] Gierz G, Lawson J D. Generalized continuous and hypercontinuous lattices [J]. Rocky Mountain J Math, 1981, 11(2): 271—296.
 [3] Adamek J, Herrlich H, Strecker G E. Abstract and Concrete Categories [M]. New York : Wiley Interscience, 1990.
 [4] 赵东升. 格上的双 Scott 拓扑 [J]. 数学年刊, 1989, 10A : 187—193.
 [5] 郑崇友等. Frame 与连续格 [M]. 北京 : 首都师范大学出版社, 1994.

[责任编辑 陆炳新]