厦与蓝图

夏建国

(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,江苏,南京)

[摘要] 本文讨论了厦(Building)与蓝图(Blueprint)之间的各种关系,举例说明了即使所有广义多边形都是Moufang的蓝图也不一定能被厦实现以及一个厦可共变于两个不同构蓝图.

[关键词] 厦,蓝图,典则标签

[中图分类号]21E32, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2005)04-0018-03

Building and Blueprint

Xia Jianguo

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

Abstract: In this paper, we discuss relations between buildings and blueprints. We show that a blueprint may not be realizable by building whose each generalized polygon is Moufang and that a building may conform to two non-isomorphic blueprints.

Key words: building, blueprint, canonical labeling

0 引言

Ronan M和Tits J在[1]中首先引入了蓝图这个概念,蓝图的引入对秩$\geqslant 3$的球形厦的分类及秩$\geqslant 4$的仿射厦的分类起着非常关键的作用,由[2],所有Moufang厦一定共变于它的自然标签在$E_2(C)$(即包含C的所有秩2 residue的并)上的限制所给出的蓝图.特别地,球型厦一定共变于蓝图.由[3]中厦的构造知,存在许多不共变于任一蓝图的厦.

由[1]定理1知,一个蓝图能否被厦实现取决于它限制到每个秩为3的球型子图表时的子蓝图能否被厦实现.因为在秩$\geqslant 3$的球型厦中每个秩2的residue都是Moufang广义多边形,因此在秩3的球型蓝图中,若存在非Moufang的广义多边形,则此蓝图一定不能被厦实现.为此我们提出问题1:所有广义多边形都是Moufang的蓝图一定能被厦实现吗?在第二节中我们给出了一个反例(即例1).

由[2],一个蓝图若能被厦实现,在同构的意义下厦是惟一的.反过来,自然就会提出问题2:一个厦若共变于蓝图,在同构的意义下蓝图惟一吗?特别地,在第二节中我们对具有单可迁自同构群的厦Δ引入了典则标签[4],并证明了Δ共变于典则标签在$E_2(1)$上的限制所决定的蓝图.如果Δ同时是Moufang的,则Δ共变于自然标签在$E_2(1)$上的限制所决定的蓝图.这两个蓝图同构吗?在第二节中我们给出了两个例子(即例2与例3)说明它们一定不同构,从而也回答了问题2.

1 定义

设I是一个有限集合,对于I中任意两个不同的元素i和j,设$m_{ij}=m_{ji}$是一个大于等于2的整数,$M=\{m_{ij}\}$.一个厦Δ称为型M的厦,如果Δ的每个$\{i,j\}$-residue是广义m_{ij}-多边形.若$\sum\frac{1}{m_{ij}}>1$,则Δ称为球

收稿日期:2005-04-01.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10171086),江苏省自然科学基金资助项目(BK2002023).
作者简介:夏建国,1963—,副教授,博士,主要从事厦理论和代数数论的教学与研究.E-mail:jgxia@pine.njnu.edu.cn

型厦. 若 $\sum \frac{1}{m_{ij}} = 1$,则 Δ 称为仿射厦.

一个参数系是一个集合簇 $\{S_i\}_{i\in I}$,其中每个 S_i 有一个称为基点的特殊元素 s_i. 记 S'_i 为 $S_i - \{s_i\}$.

对于一个型 M 的厦 Δ,给定一个 Chamber c,对于 Δ 的任何 residue R,由[5]知,R 包含惟一的一个最接近 c 的 Chamber,记为 $\mathrm{proj}_R c$. 若对于 Δ 的每个 i-residue π,指定一个双射

$$\phi_\pi: S_i \to \pi$$

使得 $\phi_\pi(s_i) = \mathrm{proj}_\pi c$,则称参数系 $\{S_i\}_{i\in I}$ 给了厦 Δ 一个基于 c 的标签,并且对于 $x \in \pi$,$\phi_\pi^{-1}(x)$ 称为 x 的 i-标签.

我们看一个重要的例子. 设 S 是指标集 $\{i,j\}$ 上的广义 m-多边形(即秩 2 的厦),并且假定参数系 $\{S_i, S_j\}$ 给了 S 一个基于 $s \in S$ 的标签. 对于 S 的任何 Chamber x,从 s 到 x 有极小 gallery $(s = x_0, x_1, \cdots, x_d = x)$(这时我们说 x 与 s 的距离为 d). 如果 $d \leqslant m$,这个 gallery 是惟一的;如果 $d = m$,从 s 到 x 恰有两个极小 gallery,分别具有型 $p(i,j) = ij\cdots$ 和 $p(j,i) = ji\cdots$. 设 u_t 是包含 x_{t-1} 和 x_t 的秩 1 residue 上 x_t 的标签,则 gallery$(s = x_0, x_1, \cdots, x_d = x)$ 决定标签序列$(u_1, \cdots, u_d)$,这儿 u_t 交替地属于 S'_i 和 S'_j. 当 $d < m$ 时,x 决定惟一的标签序列;当 $d = m$ 时,x 恰好决定两个标签序列,我们称这两个标签序列是等价的.

一个型 M 的蓝图由参数系 $\{S_i\}_{i\in I}$ 以及广义 m_{ij}-多边形 S_{ij} 的簇 $\{S_{ij}\}_{i,j\in I}$ 组成,并且每个 S_{ij} 已由 $\{S_i, S_j\}$ 给出了基于某个 Chamber s_{ij} 的标签.

我们说一个厦 Δ 共变于一个蓝图 $\{S_i, S_{ij}\}$,如果 Δ 存在一个由 $\{S_i\}$ 给出的标签,使得对于 Δ 的每个 $\{i,j\}$-residue R 有一个同构 $\phi_R: S_{ij} \to R$ 满足 x 和 $\phi_R(x)$ 有同样的 i-标签和同样的 j-标签. 一个蓝图称为可实现的,如果存在一个厦共变于它.

2 反例

在给出反例之前,我们先对具有单可迁自同构群的厦给一个称之为典则的标签.

设 G 是一个群,$S_1, \cdots, S_n$ 是 G 的子群,取 G 的元素作为 Chamber,定义 G 的两个元素 g 与 h 是 i-相邻的当且仅当 $h^{-1}g \in S_i$,这样的 Chamber System 记为$(G; 1; S_1, \cdots, S_n)$. 若 $\Delta = (G; 1; S_1, \cdots, S_n)$ 是厦,对于任一 Chamber x,设包含 x 的 i-residue 为 π_i,$y_i = \mathrm{proj}_{\pi_i} 1$,令 x 的 i-标签为 $y_i^{-1}x \in S_i$. 这样我们用参数系 $\{S_i\}$ 给了厦 Δ 一个基于 1 的标签,其中每个 s_i 均为 1. 我们把这个标签称为 Δ 的典则标签.

定理 设 $\Delta = (G; 1; S_1, \cdots, S_n)$ 是厦,则 Δ 共变于典则标签在 $E_2(1)$ 上的限制所决定的蓝图.

证明 设 S_{ij} 为包含 1 的 $\{i,j\}$-residue,R 为任一 $\{i,j\}$-residue,$a = \mathrm{proj}_R 1$. 令

$$\phi_R: S_{ij} \to R$$

为 $\phi_R(x) = ax$. 显然 ϕ_R 为同构. 设包含 $x(\in S_{ij})$ 的 i-residue 为 π_i,包含 ax 的 i-residue 为 β_i,从 1 到 x 有一极小 gallery$(1 = x_0, x_1, \cdots, x_d = x)$,相应地从 a 到 ax 有极小 gallery$(a = ax_0, ax_1, \cdots, ax_d = ax)$. 任取一个从 1 到 a 的极小 gallery$(1, \cdots, a)$,因为 Δ 是厦且 $a = \mathrm{proj}_R 1$,因此$(1, \cdots, a = ax_0, ax_1, \cdots, ax)$ 是一个从 1 到 ax 的极小 gallery. 当 $d < m_{ij}$ 时,若 x_{d-1} 与 x_d 是 i-相邻的,则 $x_{d-1} = \mathrm{proj}_{\pi_i} 1$,$ax_{d-1} = \mathrm{proj}_{\beta_i} 1$,这时 x 的 i-标签为 $x_{d-1}^{-1}x_d$,ax 的 i-标签为$(ax_{d-1})^{-1}(ax_d) = x_{d-1}^{-1}x_d$;若 x_{d-1} 与 x_d 是 j-相邻的,则 $x_d = \mathrm{proj}_{\pi_i} 1$,$ax_d = \mathrm{proj}_{\beta_i} 1$,$x$ 与 ax 的 i-标签均为 1. 当 $d = m_{ij}$ 时,从 1 到 x 有两个极小 gallery,其中一个使得 x_{d-1} 与 $x_d = x$ 是 i-相邻的,这时 x 与 ax 的 i-标签均为 $x_{d-1}^{-1}x_d$.

综上所述,在任何情况下,x 与 ax 都有同样的 i-标签,当然也就有同样的 j 标签,即 ϕ_R 是保标签的.

例 1 设

$$G_{12} = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = 1, (ab)^2 = ba \rangle,$$

$$G_{23} = \langle b, c \mid b^3 = c^3 = 1, (bc)^2 = cb \rangle,$$

$$G_{13} = \langle a, c \mid a^3 = c^3 = 1, ac = ca \rangle.$$

则 G_{12} 与 G_{23} 均同构于阶 21 的 Frobenius 群,G_{13} 同构于阶 9 的初等 Abel 群. 设 $S_1 = \{1, a, a^2\}$,$S_2 = \{1, b, b^2\}$,$S_3 = \{1, c, c^2\}$,$S_{12} = (G_{12}; 1; S_1, S_2)$,$S_{23} = (G_{23}; 1; S_2, S_3)$,$S_{13} = (G_{13}; 1; S_1, S_3)$,则 S_{12} 与 S_{23} 都是 Moufang 广义 3-边形,S_{13} 是 Moufang 广义 2-边形. 赋予 S_{12}, S_{23}, S_{13} 典则标签,则有蓝图 $\{S_1, S_2, S_3, S_{12}, S_{23},$

S_{13}},它的型 $M = A_3$(即 $m_{12} = m_{23} = 3, m_{13} = 2$). 我们将证明这个蓝图不能被厦实现. 假设上述蓝图能被厦 Δ 实现,我们考察下面的 A_3 的最长字的本质自同伦对应的 Δ 的等价标签序列:

标签序列型

a	b	c	a	b	a	1	2	3	1	2	1
a	b	a	c	b	a	1	2	1	3	2	1
b	a	b^2	c	b	a	2	1	2	3	2	1
b	a	c	b	c	a	2	1	3	2	3	1
b	c	a	b	a	c	2	3	1	2	1	3
b	c	b	a	b^2	c	2	3	2	1	2	3
c	b	c^2	a	b^2	c	3	2	3	1	2	3
c	b	a	c^2	b^2	c	3	2	1	3	2	3
c	b	a	b	c	b^2	3	2	1	2	3	2
c	a^2	b	a	c	b^2	3	1	2	1	3	2
a^2	c	b	c	a	b^2	1	3	2	3	1	2
a^2	b^2	c	b	a	b^2	1	2	3	2	1	2
a^2	b^2	c	a	b	a	1	2	3	1	2	1

由[2]定理 7.2,我们有 $(a, b, c, a, b, a) = (a^2, b^2, c, a, b, a)$,从而 $a = a^2$ 且 $b = b^2$,这与 $a \neq 1$ 矛盾. 因此蓝图 $\{S_1, S_2, S_3, S_{12}, S_{23}, S_{13}\}$ 不能被厦实现.

例 2 和例 3 分别是球型厦和仿射厦有两个不同构的蓝图的例子.

例 2　S_{12} 同例 1,有由典则标签决定的蓝图. 因为 S_{12} 是 Moufang 广义 3-边形,由[2],它有由自然标签决定的蓝图. 由[2]附录 1,自然标签有性质:若型为 121 的标签序列 (u, v, w) 等价于型为 212 的标签序列 (x, y, x),一定有 $u = w$. 而在典则标签中,检查与 1 距离为 3 的 8 个 Chamber 对应的标签序列的等价,型为 121 的标签序列 (u, v, u) 与型为 212 的标签序列 (x, y, x) 一定不等价,因此上述两个蓝图一定不同构.

例 3　设

$$G = \langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^3 = 1, (ab)^2 = ba, (ac)^2 = ca, (c^2b)^2 = bc^2 \rangle,$$

$S_1 = \{1, a, a^2\}, S_2 = \{1, b, b^2\}, S_3 = \{1, c, c^2\}$. 由[6],$\Delta = (G; 1; S_1, S_2, S_3)$ 是仿射厦,并且由[7]定理 3,Δ 是同构于域 K 上的型为 $\tilde{A}_2$ 的厦,其中 $K = GF(2)(x)$ 是局部紧局部域,因此 Δ 是 Moufang 厦. 由本节定理,Δ 共变于典则标签在 $E_2(1)$ 上的限制所决定的蓝图;由[2],Δ 共变于自然标签在 $E_2(1)$ 上的限制所决定的蓝图. 与例 2 同样的理由可说明这两个蓝图一定不同构.

[参考文献]

[1] Ronan M A, Tits J. Building buildings [J]. Math Annalen, 1987, 278: 291—306.

[2] Ronan M A. Lecture on Buildings [M]. London: Academic Press, 1989.

[3] Ronan M A. A Construction of Buildings with no Rank 3 Residues of Spherical Type [M]. Lect Notes Math 1181, Berlin: Springer-Verlag, 1986: 159—190.

[4] Xia J G. Triangle buildings and triangle groups over GF(8) [J]. Algebra Colloquium, 1999, 6(4): 385—400.

[5] Tits J. Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs [M]. Lect Notes Math 386, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1974.

[6] Ronan M A. Triangle geometries [J]. JCT, 1984, 37A: 294—319.

[7] Köhler P, Meixner Th, Wester M. The affine building of type $\tilde{A}_2$ over a local field of characteristic two [J]. Arch Math, 1984, 42: 400—407.

[责任编辑: 陆炳新]