一类半线性椭圆型方程组正解的存在性与不存在性

朱立平[1]，张正策[2]

(1. 西安建筑科技大学理学院,陕西 西安 710054)
(2. 西安交通大学理学院,陕西 西安 710049)

[摘要] 通过 Kelvin 变换,对移动平面法作了重要的改进和简化,利用移动球面法证明了一类半线性椭圆型方程组古典正解的存在性与不存在性定理;移动球面法并不需要方程组的极大值原理,推广了应用积分法得到的结果,而且还证明了临界情形时古典正解的确切形式;此外,移动球面法也容易推广应用到一般非线性椭圆方程(组)的 Liouville 问题.

[关键词] 存在性,不存在性,移动球面法
[中图分类号] O175.25 [文献标识码] A [文章编号]1001-4616(2006)01-0025-05

Nonexistence and Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Systems

Zhu Liping[1], Zhang Zhengce[2]

(1. College of Science, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710054, China)
(2. College of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In this paper, we introduce the Kelvin transforms and apply the method of moving spheres which is the significant simplifications of moving plane method to prove the existence and nonexistence of positive solutions for a class of semilinear elliptic systems. The method of moving spheres doesnt not need the maximum principle for elliptic systems and obtains the exact form of positive solutions for the critical case which extends the results proved by the integral method. Moreover, this method is also used to prove the Liouville theorems for the general nonlinear elliptic equations or systems.

Key words: existence, nonexistence, method of moving spheres

0 引言

本文我们考虑半线性椭圆方程组

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u,v) \\ -\Delta v = g(u,v) \end{cases} \quad x \in \mathbf{R}^N (N \geqslant 3) \tag{1}$$

我们关心的问题是非线性项 f 和 g 在什么条件下,方程组(1) 的非负解只能是平凡解,即$(u,v) = (0,0)$. 这里我们指古典解 $u,v \in C^2(\mathbf{R}^N)$. 对 Emden-Fowler 方程

$$\Delta u + u^k = 0,\ u \geqslant 0\ x \in \mathbf{R}^N. \tag{2}$$

当 $1 \leqslant k < (N+2)/(N-2)$ $(N \geqslant 3)$, Gidas 和 Spruck 在[1] 中已经证明方程(2) 的非负解只能是 $u = 0$. 当 $N = 2$ 时,对任意 $0 \leqslant k < \infty$,有类似的结论. 众所周知,对临界情形 $k = (N+2)/(N-2)$,方程(2) 存在一类含两个参数的正解

$$u(x) = \left(\frac{c}{d + |x - \bar{x}|^2}\right)^{\frac{N-2}{2}}, \tag{3}$$

收稿日期: 2005-09-28.
基金项目: 西安交通大学自然科学基金和国家自然科学基金资助项目(10426027,10571022).
作者简介: 朱立平,女,1977—,助教,主要从事偏微分方程理论和数值计算的学习与研究.
通讯联系人: 张正策,1976—,博士,主要从事偏微分方程理论的教学与研究. E-mail: zhangzc@mail.xjtu.edu.cn

万方数据

其中 $c = [N(N-2)d]^{\frac{1}{2}}, d > 0, \bar{x} \in \mathbf{R}^N$. 利用积分方法,Mitidieri[2] 证明了下面的不存在性定理:

定理A　若对任意 $u,v \in [0,\infty)$, f,g 满足:$f(u,v) \geqslant a_1u^k + a_2v^p, g(u,v) \geqslant a_3u^q + a_4v^t$,其中 $f(0,0) = g(0,0) = 0, a_i > 0, k,p,q,t > 1$. 如果

$$\frac{N-2}{2} \leqslant \max\left\{\frac{1}{k-1}, \frac{p+1}{pq-1}, \frac{1}{t-1}, \frac{q+1}{pq-1}\right\},$$

则方程组(1)不存在 $C^2(\mathbf{R}^N)$ 的正解.

在本文中,我们利用移动球面法讨论(1),并得到了下面关于正解的存在性与不存在性定理.

定理1.1　若对任意 $u,v \in [0,\infty)$, $f(u,v) = a_1u^k + a_2v^p$, $g(u,v) = a_3u^q + a_4v^t$,其中 $a_i > 0, k,t \geqslant 0, p,q > 0$. 如果 $\max\{k,p\} \leqslant (N+2)/(N-2)$ 和 $\max\{q,t\} \leqslant (N+2)/(N-2)$,但 k,p,q,t 不同时等于 $(N+2)/(N-2)$,则方程组(1)不存在 $C^2(\mathbf{R}^N)$ 的正解.

定理1.2　若对任意 $u,v \in [0,\infty)$, $f(u,v) = a_1u^k + a_2v^p, g(u,v) = a_3u^q + a_4v^t$,其中 $a_i > 0$. 如果 $k = p = q = t = (N+2)/(N-2)$,则方程组(1)仅存在如(3)的 $C^2(\mathbf{R}^N)$ 正解,即对常数 $d > 0, \bar{x} \in \mathbf{R}^N$,有

$$u(x) = \left(\frac{c_1}{d + |x - \bar{x}|^2}\right)^{\frac{N-2}{2}}, \quad v(x) = \left(\frac{c_2}{d + |x - \bar{x}|^2}\right)^{\frac{N-2}{2}}$$

这里 $c_1, c_2 > 0$,且满足下面等式

$$[N(N-2)d]c_1^{\frac{N-2}{2}} = a_1c_1^{\frac{N+2}{2}} + a_2c_2^{\frac{N+2}{2}},$$
$$[N(N-2)d]c_2^{\frac{N-2}{2}} = a_3c_2^{\frac{N+2}{2}} + a_4c_1^{\frac{N+2}{2}}.$$

注1.1　显然,定理1.1包含了定理A所不能覆盖的新区域. 令 $f(u,v) = g(u,v) = u^k + v^k$,由定理A可知,当 $1 < k < N/(N-2)$ 时方程组(1)没有正解,而由定理1.1则可以得到更广的范围,$0 < k < (N+2)/(N-2)$. 此外,定理1.2还得到了 $C^2(\mathbf{R}^N)$ 正解的确切形式.

与方程组(1)有着密切联系的还有很多问题. 当 $a_1 = a_4 = 0$ 和 $a_2 = a_3 = 1$ 时,Figueiredo和Felmer[3]利用移动平面法和一个关于方程组的极大值原理证明了定理1.1;而Busca和Manásevich([4,定理2.1])利用同样方法和一个非常巧妙的变量替换证明了一个新的结果:参数 p,q 之一可以取超临界值;在文[5]中,张正策等人则通过Kelvin变换利用移动球面法证明了定理1.1. 此方法首先在文[6]中引入,同时李严严和张磊[7]又作了重要的简化来证明单个方程的Liouville定理. 本文我们考虑更一般的情形 $a_i > 0$,并不需要方程组的极大值原理. 而且,定理1.2还得到了正解的确切形式. 我们猜测也能用移动球面法来证明文[4]中定理2.1,但需要找到一种合适的变换而非Kelvin变换,有兴趣者不妨试一试.

与此同时,一般非线性椭圆型方程(组)的Liouville结果和正解存在性也越来越受到学者们的关注,以及大量与之相关的工作,包括在不同区域上考虑的各种拟线性算子问题,参见[8,9,10,11,12]及其参考文献.

1　Kelvin变换和移动球面

我们用移动球面法证明定理1.1和定理1.2,首先要证明几个引理. 对 $x \in \mathbf{R}^N$ 和 $\lambda > 0$,引入Kelvin变换

$$u_{x,\lambda}(y) = \frac{\lambda^{N-2}}{|y-x|^{N-2}}u\left(x + \frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right), \quad v_{x,\lambda}(y) = \frac{\lambda^{N-2}}{|y-x|^{N-2}}v\left(x + \frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right),$$

其中 $y \in \mathbf{R}^N \setminus \{x\}$. 容易验证,$u_{x,\lambda}$, $v_{x,\lambda}$ 满足方程组, $\forall y \in \mathbf{R}^N \setminus \{x\}$,

$$\begin{cases} -\Delta u_{x,\lambda} = a_1\left(\dfrac{\lambda}{|y-x|}\right)^{N+2-k(N-2)} u_{x,\lambda}^k + a_2\left(\dfrac{\lambda}{|y-x|}\right)^{N+2-p(N-2)} v_{x,\lambda}^p \\ -\Delta v_{x,\lambda} = a_3\left(\dfrac{\lambda}{|y-x|}\right)^{N+2-q(N-2)} u_{x,\lambda}^q + a_4\left(\dfrac{\lambda}{|y-x|}\right)^{N+2-t(N-2)} v_{x,\lambda}^t \end{cases} \tag{4}$$

引理2.1意味着移动球面过程可以开始.

引理2.1　$\forall x \in \mathbf{R}^N$,存在 $\lambda_0(x) > 0$ 使得对所有的 $0 < \lambda < \lambda_0(x)$, $|y-x| \geqslant \lambda$,有 $u_{x,\lambda}(y) \leqslant u(y)$,

万方数据

$v_{x,\lambda}(y) \leqslant v(y)$.

证明 不失一般性,我们取 $x=0$,用 u_λ, v_λ 分别表示 $u_{0,\lambda}$, $v_{0,\lambda}$. 显然,存在 $r_0>0$ 使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^{\frac{N-2}{2}}u(r,\theta)\right)>0,\ \forall 0<r<r_0, \theta\in \mathbf{S}^{N-1}.$$

由此可得,

$$u_\lambda(y)\leqslant u(y),\ \forall 0<\lambda\leqslant |y|<r_0. \tag{5}$$

由 u 的上调和性和极大值原理(见[3,推论 1.1])知,

$$u(y)\geqslant (\min_{\partial B_{r_0}} u) r_0^{N-2}|y|^{2-N},\ \forall |y|\geqslant r_0. \tag{6}$$

令

$$\hat{\lambda}_0 = r_0\left(\frac{\min\limits_{\partial B_{r_0}} u}{\max\limits_{\bar{B}_{r_0}} u}\right)^{\frac{1}{N-2}} \leqslant r_0.$$

则对所有的 $0<\lambda<\hat{\lambda}_0$, $|y|\geqslant r_0$,有

$$u_\lambda(y)\leqslant \frac{\hat{\lambda}_0^{N-2}}{|y|^{N-2}}\max_{\bar{B}_{r_0}} u \leqslant \frac{r_0^{N-2}\min\limits_{\partial B_{r_0}} u}{|y|^{N-2}}. \tag{7}$$

于是,由(5),(6) 和(7) 知,对所有的 $0<\lambda<\hat{\lambda}_0$,

$$u_\lambda(y)\leqslant u(y),\ |y|\geqslant \lambda.$$

类似地,存在 $\tilde{\lambda}_0>0$ 使得对所有的 $0<\lambda<\tilde{\lambda}_0$,有

$$v_\lambda(y)\leqslant v(y),\ |y|\geqslant \lambda.$$

我们取 $\lambda_0=\min\{\hat{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_0\}$ 即可.

$\forall x\in \mathbf{R}^N$,令

$\bar{\lambda}_u(x)=\sup\{\mu>0 \mid u_{x,\lambda}(y)\leqslant u(y)$,对所有 $|y-x|\geqslant\lambda, 0<\lambda\leqslant\mu\}$,

$\bar{\lambda}_v(x)=\sup\{\mu>0 \mid v_{x,\lambda}(y)\leqslant v(y)$,对所有 $|y-x|\geqslant\lambda, 0<\lambda\leqslant\mu\}$.

由引理 2.1, $\bar{\lambda}_u(x)$, $\bar{\lambda}_v(x)$ 有明确定义,且 $0<\bar{\lambda}_u(x), \bar{\lambda}_v(x)\leqslant\infty$, $\forall x\in\mathbf{R}^N$. 令 $\bar{\lambda}=\min\{\bar{\lambda}_u, \bar{\lambda}_v\}$,则有如下结论:

引理 2.2 若对某个 $x\in\mathbf{R}^N$, $\bar{\lambda}(x)<\infty$,则在 $\mathbf{R}^N\setminus\{x\}$ 上,有 $u_{x,\bar{\lambda}(x)}\equiv u, v_{x,\bar{\lambda}(x)}\equiv v$.

证明 不失一般性,我们假设 $\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_u$,取 $x=0$,令 $\bar{\lambda}=\bar{\lambda}(0)$, $u_\lambda=u_{0,\lambda}$, $v_\lambda=v_{0,\lambda}$, $\Sigma_\lambda=\{y;|y|>\lambda\}$. 我们的目的是要证明,在 $\mathbf{R}^N\setminus\{0\}$ 上, $u_{\bar{\lambda}}\equiv u$, $v_{\bar{\lambda}}\equiv v$. 显然,只需证明

$$u_{\bar{\lambda}}\equiv u,\ v_{\bar{\lambda}}\equiv v \text{ 在 } \Sigma_{\bar{\lambda}} \text{ 上}.$$

先证 $u_{\bar{\lambda}}\equiv u$. 由 $\bar{\lambda}$ 的定义可知,

$$u_{\bar{\lambda}}\leqslant u,\ v_{\bar{\lambda}}\leqslant v \text{ 在 } \Sigma_{\bar{\lambda}} \text{ 上}.$$

由(1),通过简单计算知,

$$-\Delta u_\lambda = a_1\left(\frac{\lambda}{|y|}\right)^{N+2-k(N-2)}u_\lambda^k + a_2\left(\frac{\lambda}{|y|}\right)^{N+2-p(N-2)}v_\lambda^p, \lambda>0.$$

因此,

$$\begin{aligned}
-\Delta(u-u_\lambda) &= a_1u^k + a_2v^p - a_1\left(\frac{\bar{\lambda}}{|y|}\right)^{N+2-k(N-2)}u_{\bar{\lambda}}^{\ k} - a_2\left(\frac{\bar{\lambda}}{|y|}\right)^{N+2-p(N-2)}v_{\bar{\lambda}}^p \\
&\geqslant a_1\left(\frac{\bar{\lambda}}{|y|}\right)^{N+2-k(N-2)}(u^k-u_{\bar{\lambda}}^k) + a_2\left(\frac{\bar{\lambda}}{|y|}\right)^{N+2-p(N-2)}(v^p-v_{\bar{\lambda}}^p) \\
&\geqslant 0 \text{ 在 } \Sigma_{\bar{\lambda}} \text{ 上}.
\end{aligned} \tag{8}$$

如果在 Σ_λ 上, $u-u_{\bar{\lambda}}\equiv 0$,证明结束. 否则,由 Hopf 引理和 $\partial B_{\bar{\lambda}}$ 的紧性,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(u-u_{\bar{\lambda}})\big|_{\partial B_{\bar{\lambda}}}\geqslant C>0. \tag{9}$$

又由 ∇u 的连续性,存在 $R>\bar{\lambda}$ 使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(u-u_\lambda)\geqslant \frac{C}{2}>0,\ \text{对所有 } \bar{\lambda}\leqslant\lambda\leqslant R,\ \lambda\leqslant r\leqslant R.$$

万方数据

于是,考虑到在 ∂B_λ 上, $u-u_\lambda=0$,我们有

$$u(y)-u_\lambda(y)>0,\ 对所有\ \bar\lambda\leqslant\lambda<R,\lambda<|y|\leqslant R. \tag{10}$$

令 $c=\min_{\partial B_R}(u-u_{\bar\lambda})>0$. 由 $u-u_{\bar\lambda}$ 的上调和性可得,

$$u-u_{\bar\lambda}\geqslant\frac{cR^{N-2}}{|y|^{N-2}},\ \forall\ |y|\geqslant R.$$

因此,

$$u(y)-u_\lambda(y)\geqslant\frac{cR^{N-2}}{|y|^{N-2}}-(u_\lambda(y)-u_{\bar\lambda}(y)),\ \forall\ |y|\geqslant R. \tag{11}$$

由于在 $\bar B_R$ 上, u 一致连续,故存在 $0<\varepsilon<R-\bar\lambda$ 使得对所有 $\bar\lambda\leqslant\lambda\leqslant\bar\lambda+\varepsilon$,有

$$\left|\lambda^{N-2}u\left(\frac{\lambda^2y}{|y|^2}\right)-\bar\lambda^{N-2}u\left(\frac{\bar\lambda^2y}{|y|^2}\right)\right|<\frac{cR^{N-2}}{2},\ \forall\ |y|\geqslant R.$$

由(11)和上面的不等式可得,

$$u(y)-u_\lambda(y)>0,\ 对所有\ \bar\lambda\leqslant\lambda\leqslant\bar\lambda+\varepsilon,\ |y|\geqslant R. \tag{12}$$

然而(10)和(12)与 $\bar\lambda$ 的定义矛盾.

由 $u_{\bar\lambda}\equiv u$ 和(8),容易看出在 $\Sigma_{\bar\lambda}$ 上, $v_{\bar\lambda}\equiv v$. 引理2.2证毕.

引理2.3　若对某个 $\bar x\in\mathbf{R}^N$, $\bar\lambda(\bar x)=\infty$,则对所有的 $x\in\mathbf{R}^N$,有 $\bar\lambda(x)=\infty$.

证明　由于 $\bar\lambda(\bar x)=\infty$,则

$$u_{\bar x,\lambda}(y)\leqslant u(y),\ v_{\bar x,\lambda}(y)\leqslant v(y)\ 对所有\ \lambda>0,\ |y-\bar x|\geqslant\lambda.$$

于是,

$$\lim_{|y|\to\infty}|y|^{N-2}u(y)=\infty.$$

另一方面,若对某个 $x\in\mathbf{R}^N$, $\bar\lambda(x)<\infty$,则由引理2.2,

$$\lim_{|y|\to\infty}|y|^{N-2}u(y)=\lim_{|y|\to\infty}|y|^{N-2}u_{x,\bar\lambda(x)}(y)=\bar\lambda^{N-2}(x)u(x)<\infty.$$

矛盾.类似地,我们也可以由 v 得到矛盾.

2　定理1.1和定理1.2的证明

首先我们给出两个引理.

引理3.1　([6,引理11.1])　若 $f\in C^1(\mathbf{R}^N)$, $N\geqslant1$, $\nu>0$. 假设 $\forall x\in\mathbf{R}^N$,存在 $\lambda(x)>0$ 使得

$$\left(\frac{\lambda(x)}{|y-x|}\right)^\nu f\left(x+\frac{\lambda^2(x)(y-x)}{|y-x|^2}\right)=f(y),\ y\in\mathbf{R}^N\setminus\{x\}. \tag{13}$$

则对某个 $c\geqslant0$, $d>0$, $\bar x\in\mathbf{R}^N$,

$$f(x)=\pm\left(\frac{c}{d+|x-\bar x|^2}\right)^{\frac{\nu}{2}}.$$

引理3.1　([6,引理11.2])　若 $f\in C^1(\mathbf{R}^N)$, $N\geqslant1$, $\nu>0$. 假设

$$\left(\frac{\lambda}{|y-x|}\right)^\nu f\left(x+\frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right)\leqslant f(y),\ \forall\lambda>0,\ x\in\mathbf{R}^N,\ |y-x|\geqslant\lambda.$$

则 f 等于常数.

定理1.1的证明　首先我们断言对所有的 $x\in\mathbf{R}^N$, $\bar\lambda(x)=\infty$. 反证. 若存在 $\bar x$,使得 $\bar\lambda(\bar x)<\infty$,则由引理2.2,在 $\mathbf{R}^N\setminus\bar x$ 上, $u_{\bar x,\bar\lambda(\bar x)}\equiv u$, $v_{\bar x,\bar\lambda(\bar x)}\equiv v$. 但是由方程组(4)可知,这是不可能的. 因此,

$$u_{x,\lambda}(y)\leqslant u(y),v_{x,\lambda}(y)\leqslant v(y)\ 对所有的\ \lambda>0,\ x\in\mathbf{R}^N,\ |y-x|\geqslant\lambda.$$

又由引理3.2, u, v 等于常数. 但由方程组(1),这也是不可能的.

定理1.2的证明　首先我们断言对所有的 $x\in\mathbf{R}^N$, $\bar\lambda(x)<\infty$. 反证. 若存在 $\bar x$,使得 $\bar\lambda(\bar x)=\infty$,则由引理2.3,对所有的 x, $\bar\lambda(x)=\infty$,即,

$$u_{x,\lambda}(y)\leqslant u(y),\ v_{x,\lambda}(y)\leqslant v(y)\ 对所有的\ \lambda>0,\ x\in\mathbf{R}^N,\ |y-x|\geqslant\lambda.$$

于是,由引理3.2, u, v 等于常数,与方程组(1.1)矛盾. 因此,由引理2.2,对所有 $x\in\mathbf{R}^N$,存在 $\bar\lambda(x)>0$ 使得 $u_{x,\bar\lambda(x)}\equiv u$, $v_{x,\bar\lambda(x)}\equiv v$. 又由引理3.1,对常数 c_i, $d>0$ $(i=1,2)$ 和某个 $\bar x\in\mathbf{R}^N$,

万方数据

$$u(x) \equiv \left(\frac{c_1}{d+|x-\bar{x}|^2}\right)^{\frac{N-2}{2}},\ v(x) \equiv \left(\frac{c_2}{d+|x-\bar{x}|^2}\right)^{\frac{N-2}{2}}.$$

由于(u,v) 满足方程组(1),定理1.2 证毕.

[参考文献]

[1] Gidas B, Spruck J. Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations [J]. Comm Pure Appl Math, 1981, 34(6): 525—598.

[2] Mitidieri E. Nonexistence of positive solutions of semilinear elliptic systems in $\mathbf{R}^N$ [J]. Diff Integral Eqns, 1996, 9(3): 465—479.

[3] De Figueiredo D G, Felmer P L. A Liouville-type theorem for elliptic systems [J]. Ann Scuola Norm Sup Pisa, 1994, 21(3): 387—397.

[4] Busca J, Manásevich R. A Liouville-type theorem for Lane-Emden systems [J]. Indiana Univ Math J, 2002, 51(1): 37—51.

[5] Zhang Z C, Wang W M, Li K T. Liouville-type theorems for semilinear elliptic systems [J]. J Partial Diff Eqns, 2005, 18(4): 304—310.

[6] Li Y Y, Zhu M. Uniqueness theorems through the method of moving spheres [J]. Duke Math J, 1995, 80(2): 383—417.

[7] Li Y Y, Zhang L. Liouville-type theorems and Harnack-type inequalities for semilinear elliptic equations [J]. J d'Analyse Math, 2003, 90: 27—87.

[8] Lin C S. A classification of solutions of a conformally invariant fourth order equation in $\mathbf{R}^N$ [J]. Comment Math Helv, 1998, 73(2): 206—231.

[9] Peletier L A, Van Der Vorst R C A M. Existence and non-existence of positive solutions of non-linear elliptic systems and the biharmonic equation [J]. Diff Int Eqns, 1992, 5(4): 747—767.

[10] Serrin J, Zou H. The existence of positive entire solutions of elliptic Hamitonian systems [J]. Comm Part Diff Eqns, 1998, 23(3/4): 577—599.

[11] Zhang Z C, Li K T. Spike-layered solutions of singularly perturbed quasilinear Dirichlet problems [J]. J Math Anal Appl, 2003, 283(2): 667—680.

[12] Zhang Z C, Li K T. Spike-layered solutions with compact support to some singularly perturbed quasilinear elliptic problems in general smooth domains [J]. J Comp Appl Math, 2004, 162(2): 327—340.

[责任编辑:陆炳新]

万方数据