正格子点上 L 族的若干注记

杨洋[1,2], 王岳宝[2], 张燕[1], 张永良[1]

(1. 南京审计学院应用数学系, 江苏 南京 210029)
(2. 苏州大学数学系, 江苏 苏州 215006)

[摘要] 为了获得重尾分布子族 $\boldsymbol{L}$ 族的相关性质和结果, 本文采用数学归纳法, 给出了正格子点上 $\boldsymbol{L}$ 族的独立同分布列 (i. i. d.) Poisson 逼近的等价条件及判别该列能否 Poisson 逼近的一个方法, 它比 Embrechts 等给出的检验方法更简洁. 另一方面, 给出了正格子点上 $\boldsymbol{L}$ 族的可加性的一个特别的证明.

[关键词] 重尾分布, $\boldsymbol{L}$ 族, 正格子点

[中图分类号] O211.4　**[文献标识码]** A　**[文章编号]** 1001-4616(2006)01-0030-04

Some Notes on the Positive Lattice Long-Tailed Family

Yang Yang[1,2], Wang Yuebao[2], Zhang Yan[1], Zhang Yongliang[1]

(1. Department of Applied Mathematics, Nanjing Audit University, Nanjing 210029, China)
(2. Department of Mathematics, Soochow University, Suzhou 215006, China)

Abstract: In order to obtain some properties of Long-tailed family, this paper uses mathematical induction, gives the equivalent condition of Possion approximation of i. i. d. r. v. s in the positive lattice Long-tailed family, hence obtains a method, which can check whether i. i. d. r. v. s in the positive lattice Long-tailed family can be Poisson approximated. This method is more concise than that in Embrechts et al. On the other hand, we give a special proof of the additivity of the positive lattice Long-tailed family.

Key words: Heavy-tailed distribution, Long-tailed family($\boldsymbol{L}$), positive lattice

0　引言与结果

重尾随机变量(r. v.)及其相应的重尾分布函数(d. f.)在应用概率的分支过程、金融保险等领域有着十分广泛的应用. 近年来国内外涌现了大量的研究文献, 参见 Embrechts 等[1], Mandjes[2], Su 等[3,4], Tang 等[5]. 而 $\boldsymbol{L}$ 族是重尾分布族 $\boldsymbol{K}$ 的一类重要子族, 研究其对卷积的封闭性对了解 $\boldsymbol{L}$ 族, 乃至整个重尾分布族 $\boldsymbol{K}$ 的性质有着重要的意义. 同时这方面的结果还可以应用到极值理论中, 其在 Poisson 近似可以获得一些有趣的结果.

记 r. v. X 的 d. f. 为 $F(x) = P(X \leqslant x)$, 约定 $P(X > 0) = 1$ 以及 $F(x) < 1$, $\forall x > 0$. 记 X 的尾分布为 $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, $x > 0$. 全体这样的 d. f. 族记为 $\boldsymbol{F}$.

定义 1.1　称非负随机变量 X 的 d. f. F 属于重尾(Heavy-tailed) d. f. 族 $\boldsymbol{K}$, 若其没有指数阶矩, 即对 $\forall \lambda > 0$, 有

$$Ee^{\lambda X} = \int_0^\infty e^{\lambda x} dF(x) = \infty. \tag{1}$$

否则, 则称 F 属于轻尾(Light-tailed) d. f. 族 $\boldsymbol{K}^C = \boldsymbol{F} \backslash \boldsymbol{K}$.

由于 $\boldsymbol{K}$ 族的成分过于复杂, 人们又提出了一些性能更为优越的重尾 d. f. 子族及其它 d. f. 子族, $\boldsymbol{L}$ 族就是其中之一.

收稿日期: 2004-10-12.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271087), 南京审计学院青年基金资助项目(NSK2005/C08).
作者简介: 杨洋, 1979—, 讲师, 主要从事概率极限理论的教学与研究. E-mail: yyang@nau.edu.cn

定义 1.2 称非负随机变量 X 的 d.f. 属于 $\boldsymbol{L}$(Long-tailed) d.f. 族,若对 $\forall y>0$(或等价地 $y=1$),有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}=1. \tag{2}$$

设 r.v. 列 $\{X_i:i\in\mathbf{N}\}$ i.i.d.,则称 $M_n=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$, $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 分别为部分最大值及部分和,$n\in\mathbf{N}$. 易知它们是极限理论及其在金融保险的应用中的两个主要对象.

在对 M_n 的研究中,Poisson 逼近是极值理论的基础之一. 所谓 Poisson 逼近,就是研究对 $\forall\tau>0$,存在一个实数列使得下式成立的条件

$$P(M_n\leqslant u_n)\to \mathrm{e}^{\tau},\ n\to\infty. \tag{3}$$

这一研究受到人们的高度重视,已经有了成熟的结果. 如 Embrechts 等[1] 介绍了

定理 A 如上所述,(3) 与下列两条件相互等价:

$$n\overline{F}(u_n)\to\tau,\ n\to\infty, \tag{4}$$

$$\lim_{x\uparrow x_F}\frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(x-)}=1. \tag{5}$$

其中 x_F 为 F 的支撑的右端点.

据等价条件(5),Embrechts 等[1] 对三个著名的正格子点分布:Poisson 分布,几何分布及负二项分布能否 Poisson 逼近进行了检验,得到了否定的结果.

定义 1.3 称正随机变量 X 是格点的,若存在常数 $d>0$,使得 $\sum_{n=1}^{\infty}P(X=nd)=1$, 其对应的分布 F 称为正格子点分布. 即 X 是格点的,若 X 只取某个正数 d 的正整数倍,具有这性质的最大的 d 称为 X 的周期. 以下我们均假设 r.v. X 的周期 $d=1$.

我们发现,正格子点分布有自己独有的性质,除了用(4) 及(5) 判别 Poisson 逼近外,应该还有自己的独有的判别方法. 这一方法与 $\boldsymbol{L}$ 族有密切的关系.

定理 1.1 如上所述设 $\{X_i:i\in\mathbf{N}\}$ 是正格子点上的 i.i.d. 列. 则(3),(4),(5) 与下列条件等价:

$$F\in\boldsymbol{L}. \tag{6}$$

由于上述 Poisson 分布等三种分布都是轻尾分布,所以不是重尾分布,当然更不属于 $\boldsymbol{L}$ 族,因此它们不可能 Poisson 逼近,不必再用(5) 进行检验. 为此我们证明负二项分布不是重尾分布.

例 1 设 $m\in\mathbf{N}$, r.v. X 的分布列为

$$P(X=k)=C_{m+k-1}^{k}p^m(1-p)^k,\ k\in\mathbf{N}\cup\{0\},\ 0<p<1. \tag{7}$$

易知,$X=Y_1+\cdots+Y_m$,其中 $Y_1,\cdots,Y_m$ 相互独立且均是以 p 为参数的几何分布,即

$$P(Y_i=n)=p(1-p)^n,\ n\in\mathbf{N}\cup\{0\},\ i=1,\cdots,m.$$

由于 Y_i 是轻尾的,再由轻(重) 尾分布的可加性立得 X 是轻尾的.

由上可知,可加性问题是一个重要的问题. 不难看出,重(轻) 尾 r.v. 的独立和的分布(卷积) 仍然是重(轻) 尾的,即重(轻) 尾分布有可加性. 但是 $\boldsymbol{L}$ 族分布的可加性却不是容易看出的,它的证明也比较复杂. 尽管已经有了一般的正面结论,但我们最近专门对正格子点上 $\boldsymbol{L}$ 族的可加性给出了一个特别的证明.

定理 1.2 若 $\{X,X_i:i\in\mathbf{N}\}$ 是 i.i.d. 的正整值 r.v. 列,其共同的 d.f. 为 F, $x_F=\infty$. 若 $F\in\boldsymbol{L}$,则对 $\forall k\in\mathbf{N}$,有 $S_k=\sum_{i=1}^{k}X_i\in\boldsymbol{L}$.

1 定理的证明

定理 1.1 的证明 显然,条件(5) 等价于条件

$$\frac{\overline{F}(n)}{\overline{F}(n-1)}\to 1,\ n\to\infty. \tag{8}$$

我们只要证明条件(8) 等价于条件(6). (6) $\Rightarrow$ (8) 显然,下证(8) $\Rightarrow$ (6). 对 $\forall x>0$,必存在 $n=n(x)$,使 $n-1\leqslant x<n$,这时由(6) 知

$$1\geqslant\frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(x-1)}=\frac{P(X>x)}{P(X>x-1)}=\frac{P(X>n)}{P(X>n-1)}=\frac{\overline{F}(n)}{\overline{F}(n-1)}\to 1,\ n\to\infty.$$

即 $F \in \boldsymbol{L}$,亦即(6) 成立.

定理 1.2 的证明　欲证对 $\forall k \in \mathbf{N}$, $S_k \in \boldsymbol{L}$,即要证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(S_k > n)}{P(S_k > n-1)} = 1. \tag{9}$$

对 k 用数学归纳法. (1) 先证 $k=2$ 时的情况. 注意到

$$\begin{aligned} P(S_2 > n) &= \sum_{j=n+1}^{\infty} P(S_2 = j) = \sum_{j=n+1}^{\infty} P(X_1 + X_2 = j) = \sum_{j=n+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{j-1} P(X_1 = j-i)P(X_2 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(X=i)P(X>n-i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(X=i)P(X\geqslant 1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(X=i)P(X>n-i) + P(X>n). \end{aligned} \tag{10}$$

而

$$\begin{aligned} 0 \leqslant 1 - \frac{P(S_2>n)}{P(S_2>n-1)} &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} P(X=i)P(X>n-i) + P(X>n)}{\sum_{i=1}^{n-1} P(X=i)P(X>n-1-i) + P(X>n-1)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} P(X=i)P(X=n-i)}{\sum_{i=1}^{n-1} P(X=i)P(X>n-1-i) + P(X>n-1)} =: I(n). \end{aligned} \tag{11}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P(X>n)}{P(X>n-1)} = 1$ 知, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P(X=n)}{P(X>n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P(X>n-1)-P(X>n)}{P(X>n-1)} = 0$. 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$,当 $n \geqslant N$ 时,有 $\dfrac{P(X=n)}{P(X>n-1)} \leqslant \varepsilon$,即

$$P(X=n) \leqslant \varepsilon P(X>n-1). \tag{12}$$

对上述 $\varepsilon > 0$,当 $n \geqslant 2N$ 时,若 $n-1$ 为偶数,则有

$$\begin{aligned} I(n) = &\Big[P(X=1)P(X=n-1) + \cdots + P\Big(X=\frac{n-1}{2}\Big)P\Big(X=\frac{n+1}{2}\Big) + P\Big(X=\frac{n+1}{2}\Big)P\Big(X=\frac{n-1}{2}\Big) \\ &+ \cdots + P(X=n-1)P(X=1)\Big] \Big/ \Big[P(X=1)P(X>n-2) + \cdots + P\Big(X=\frac{n-1}{2}\Big)P\Big(X>\frac{n-1}{2}\Big) + \\ &P\Big(X=\frac{n+1}{2}\Big)P\Big(X>\frac{n-3}{2}\Big) + \cdots + P(X=n-1)P(X>0) + P(X>n-1)\Big] \\ \leqslant &\frac{2\Big[P(X=1)P(X=n-1) + P(X=2)P(X=n-2) + \cdots + P\Big(X=\frac{n-1}{2}\Big)P\Big(X=\frac{n+1}{2}\Big)\Big]}{P(X=1)P(X>n-2) + P(X=2)P(X>n-3) + \cdots + P\Big(X=\frac{n-1}{2}\Big)P\Big(X>\frac{n-1}{2}\Big)}. \end{aligned} \tag{13}$$

因为 $n-1 > n-2 > \cdots > \dfrac{n+1}{2} \geqslant \dfrac{2N+1}{2} = N + \dfrac{1}{2}$,故由(12) 式知 $I(n) \leqslant 2\varepsilon$.

若 $n-1$ 为奇数,则有

$$\begin{aligned} I(n) = &\Big[P(X=1)P(X=n-1) + \cdots + P\Big(X=\frac{n}{2}-1\Big)P\Big(X=\frac{n}{2}+1\Big) + P\Big(X=\frac{n}{2}\Big)P\Big(X=\frac{n}{2}\Big) \\ &+ \cdots + P(X=n-1)P(X=1)\Big] \Big/ \Big[P(X=1)P(X>n-2) + \cdots + P\Big(X=\frac{n}{2}-1\Big)P\Big(X>\frac{n}{2}\Big) \\ &+ P\Big(X=\frac{n}{2}\Big)P\Big(X>\frac{n}{2}-1\Big) + \cdots + P(X=n-1)P(X>0) + P(X>n-1)\Big] \\ \leqslant &\frac{2\Big[P(X=1)P(X=n-1) + P(X=2)P(X=n-2) + \cdots + P\Big(X=\frac{n}{2}\Big)P\Big(X=\frac{n}{2}\Big)\Big]}{P(X=1)P(X>n-2) + P(X=2)P(X>n-3) + \cdots + P\Big(X=\frac{n}{2}\Big)P\Big(X>\frac{n}{2}-1\Big)} \end{aligned} \tag{14}$$

同理,由 $n-1>n-2>\cdots>\frac{n}{2}\geqslant N$,结合(12)式知 $I(n)\leqslant 2\varepsilon$.

因此,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(X_1+X_2>n)}{P(X_1+X_2>n-1)}=1$ 成立,故(8)式对于 $k=2$ 的情况得证.

(2)假设对 $k\leqslant m$,(8)式成立,即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(S_k=n)}{P(S_k>n-1)}=0$. 欲证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(S_{m+1}>n)}{P(S_{m+1}>n-1)}=1$,只要

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(S_{m+1}=n)}{P(S_{m+1}>n-1)}=0. \tag{15}$$

一方面,我们有

$$\begin{aligned}P(S_{m+1}>n-1)&=\sum_{j=n}^{\infty}P(S_{m+1}=j)=\Big[\sum_{i=1}^{n-m-1}\sum_{j=n}^{\infty}+\sum_{i=n-m}^{\infty}\sum_{j=i+m}^{\infty}\Big]P(S_m=j-i)P(X=i)\\&=\sum_{i=1}^{n-m-1}P(X=i)P(S_m>n-i-1)+P(X>n-m-1).\end{aligned} \tag{16}$$

另一方面

$$\begin{aligned}&P(S_{m+1}>n-1)\sum_{j=m}^{n-1}P(S_m=j)P(X>n-j-1)+P(S_m>n-1)\\&\underline{\underline{i=n-j}}\sum_{i=1}^{n-m}P(X>i-1)P(S_m=n-i)+P(S_m>n-1).\end{aligned} \tag{17}$$

而 $P(S_{m+1}=n)=\sum\limits_{i=1}^{n-m}P(S_m=n-i)P(X=i)$,故由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(S_m=n)}{P(S_m>n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(X=n)}{P(X>n-1)}=0$知,$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbf{N}$,当 $n\geqslant n_0$ 时,有

$$P(S_m=n)\leqslant\varepsilon P(S_m>n-1), \tag{18}$$

$$P(X=n)\leqslant\varepsilon P(X>n-1). \tag{19}$$

对上述 $\varepsilon>0$,当 $n\geqslant 2n_0$ 时,若 $n-1$ 为偶数,则有

$$\begin{aligned}\frac{P(S_{m+1}=n)}{P(S_{m+1}>n-1)}&=\frac{P(X=1)(S_m=n-1)+\cdots+P\left(X=\frac{n-1}{2}\right)P\left(S_m=\frac{n+1}{2}\right)}{P(X=1)(S_m>n-2)+\cdots+P\left(X=\frac{n-1}{2}\right)P\left(S_m>\frac{n-1}{2}\right)+\cdots}\\&+\frac{P\left(X=\frac{n+1}{2}\right)P\left(S_m=\frac{n-1}{2}\right)+\cdots+P(X=n-m)(S_m=m)}{\cdots+P\left(X>\frac{n-1}{2}\right)P\left(S_m=\frac{n-1}{2}\right)+\cdots+P(X>n-m-1)P(S_m=m)}.\end{aligned} \tag{20}$$

因为 $n-1>n-2>\cdots>\frac{n+1}{2}>N$,故由(18)及(19)式知,上式 $\leqslant 2\varepsilon$.

类似地,当 $n-1$ 为奇数时也有类似结论. 故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(S_{m+1}=n)}{P(S_{m+1}>n-1)}=0$. 即(9)式对 $k=m+1$ 成立.

因此,由数学归纳法知,(9)式对一切 $k\in\mathbf{N}$ 成立,定理1.2得证.

[参考文献]

[1] Embrechts P, Kluppelberg C, Mikosch T. Modelling Extremal Events [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[2] Mandjes M. Overflow behavior in queues with many long-tailed inputs [J]. Adv in Appl Prob, 2000, 32(4): 1150—1167.

[3] 苏淳,胡治水,唐启鹤. 关于非负分布重尾程度的刻画 [J]. 数学进展,2003,32(5):606—614.

[4] Su C, Tang Q, Jiang T. A contribution to large deviations for heavy-tailed random sums [J]. Science in China Series A: Mathematics, 2001, 44(4): 438—444.

[5] Tang Q, Su C, Jiang T, Zhang J. Large deviations for heavy-tailed random sums in compound renewal model [J]. Statist and Prb Letters, 2001, 52(1): 91—100.

[责任编辑:陆炳新]