规则长波 BBM 方程的守恒律及性质

张宏亮[1]，张宝善[2]

(1. 徐州师范大学数学系，江苏 徐州 221116)
(2. 南京审计学院应用数学系，江苏 南京 210029)

[摘要] 本文在 Olver 建立的守恒律间的非平凡、相关、独立等概念的基础上，建立守恒律类的概念. 利用守恒律类的概念用简单的方法推导规则长波 BBM 方程的守恒律，对 Olver 建立的揭示 BBM 方程守恒律间内在性质的定理给出精确描述和解释.

[关键词] BBM 方程，守恒律，相关，独立，守恒律类

[中图分类号] O175.2 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2006)02-0017-04

Conservation Laws and Their Behaviours on the Regularized Long Waves BBM Equation

Zhang Hongliang[1], Zhang Baoshan[2]

(1. Department of Mathematics, Xuzhou Normal University, Xuzhou 221116, China)
(2. Department of Applied Mathematics, Nanjing Audit University, Nanjing 210029, China)

Abstract: In this paper, it proposes the conception of equivalent classification for the conservation laws of BBM equation which based on Olver's concepts about non-trivial, dependent and independent for conservation laws. Here it induces again the conservation laws of BBM equation in simple way, and gives some accurate descriptions and interpretations on Olver's theorem.

Key words: BBM equation, conservation law, non-trivial dependent, independent, conservation classification

1 问题的提出

BBM 方程是一类重要的规则长波方程，它由下面的偏微分方程：

$$u_t - uu_x - u_{xxt} = 0 \tag{1}$$

来描述. 这个方程是由 Benjamin, Bona 和 Mahony 于 1972 年研究非线性水波时建立的，它是基于具有非线性色散的系统模型而得到的. 在提出这个系统模型(1) 的同时，他们发现了相应的三个守恒律[1-4]：

$$u_t - \left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xt}\right)_x = 0 \tag{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right)_t - \left(\frac{1}{3}u^3 + uu_{xt}\right)_x = 0 \tag{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}u^3\right)_t - \left(\frac{1}{4}u^4 + u^2u_{xt} + u_{xt}^2 - u_t^2\right)_x = 0 \tag{4}$$

Olver (1979) 利用 Euler 算子研究了 BBM 方程(1) 的守恒律，得到的主要结论是[3]：

定理 1.1 上述守恒律(2) ~ (4) 是 BBM 方程(1) 仅有的三个非平凡且相互独立的守恒律.

收稿日期：2005-09-28.
基金项目：南京审计学院科研课题资助项目(NSK2005/B01).
作者简介：张宏亮，1965—，讲师，主要从事代数基本理论及应用的教学与研究. E-mail: zhanghongliang_xz@126.com
通讯联系人：张宝善，1959—，博士，教授，主要从事应用微分方程、经济数学模型、计算机代数的教学与研究. E-mail: bszhang8@163.com

万方数据

该定理揭示了BBM方程守恒律间的内在性质,在仔细研究了Olver的工作后,不难发现Olver的研究中关于守恒律间的非平凡、相关、独立等概念的引入和讨论存在值得深入探讨和阐述的问题.本文在守恒律间的非平凡、相关、独立等概念的基础上,利用守恒律类的概念用简单的方法推导守恒律(2) ~ (4),对Olver建立的揭示BBM方程守恒律间内在性质的上述定理给出精确描述和解释.

2　守恒律的基本概念与性质

为讨论方便,首先列出Olver给出的有关概念如下[3]:

定义2.1　对于给定的以x,t为自变量,$u = u(x,t)$为未知函数的偏微分方程

$$\Delta(x,t,u,u_x,u_{xx},\cdots) = 0 \tag{5}$$

其守恒律由形如$T = T(x,t,u,u_x,u_{xx},\cdots)$,$X = X(x,t,u,u_x,u_{xx},\cdots)$沿该微分方程的所有解$u = u(x,t)$都满足微分方程

$$T_t + X_x = 0 \tag{6}$$

确定.$T = T(x,t,u,u_x,u_{xx},\cdots)$称为守恒密度,$X = X(x,t,u,u_x,u_{xx},\cdots)$称为守恒流.

定义2.2　如果$T = P_x, X = -P_t, P = P(x,t,u,u_x,u_{xx},\cdots)$,那么由此确定的守恒律(6)称为平凡守恒律,否则称为非平凡守恒律.

定义2.3　设$T_1,T_2,\cdots,T_n$是n个不同守恒律的守恒密度,如果存在常数$c_1,c_2,\cdots,c_n$和函数$P = P(x,t,u,u_x,u_{xx},\cdots)$满足

$$c_1T_1 + c_2T_2 +,\cdots, + c_nT_n = P_x \tag{7}$$

那么相应的守恒律称为相关的,否则称为独立的守恒律.

将定义2.1定义的守恒律记为$< T,X >$,则由定义2.1和定义2.2容易知道,由$< P_x, -P_t >$确定的平凡守恒律往往与微分方程(5)无关.因此,平凡守恒律通常不能反映给定的微分方程(5)的内在守恒性质.正像Olver所说,人们所真正关心的是那些非平凡守恒律[4—7].

性质2.4　微分方程(5)的任意两个守恒律$< T_1, -X_1 >$, $< T_2, -X_2 >$的线性叠加:

$$c_1 < T_1, -X_1 > + c_2 < T_1, -X_1 > \equiv < c_1T_1 + c_2T_2, -c_1X_1 - c_2X_2 > \tag{8}$$

仍是微分方程(5)的守恒律,其中c_1,c_2为任意常数.

性质2.5　微分方程(5)的任意两个平凡守恒律$< T_1, -X_1 >$, $< T_2, -X_2 >$的线性叠加仍然是平凡守恒律;微分方程(5)的任意一个非平凡守恒律$< T_1, -X_1 >$与任意一个平凡守恒律$< T_2, -X_2 >$的线性叠加当$c_1 \neq 0$时仍然是非平凡守恒律.

性质2.4和性质2.5的前半部分是非常容易证明的事实,性质2.5的后半部分可以用反证法并利用其前半部分的结果得到.根据定义2.3还很容易推出守恒律的如下性质:

性质2.6　对于微分方程(5)的任意一个非平凡守恒律$< T, -X >$和任意一个关于x,t的微分算子$D \equiv D(\partial_t, \partial_x)$.如果$T = T(x,t,u,u_x,u_{xx},\cdots)$和$X = X(x,t,u,u_x,u_{xx},\cdots)$关于它们的所有变元都是任意阶连续可微,那么可以确定微分方程(5)的另外一个守恒律$< DT, -DX >$.特别地,$< T_t, -X_t >$, $< T_x, -X_x >$, $< T_{xt}, -X_{xt} >$等等都是微分方程(5)的守恒律.

证明　由于$< T, -X >$是微分方程(5)的非平凡守恒律,则有$T_t + X_x = 0$对微分方程(5)的所有解$u = u(x,t)$都成立.于是,$D(T_t + X_x) = 0$对微分方程(5)的所有解$u = u(x,t)$都成立.这样,可以利用$T = T(x,t,u,u_x,u_{xx},\cdots)$和$X = X(x,t,u,u_x,u_{xx},\cdots)$关于它们的所有变元都是任意阶连续可微性假设,得知恒等式$(DT)_t + (DX)_x = 0$对微分方程(5)的所有解$u = u(x,t)$都成立.这就证明了微分方程(5)有守恒律$< DT, -DX >$.分别选取微分算子$D \equiv D(\partial_t, \partial_x)$为微分算子$\partial_t$, ∂_x和$\partial_t\partial_x$即知$< T_t, -X_t >$, $< T_x, -X_x >$, $< T_{xt}, -X_{xt} >$都是微分方程(5)的守恒律.

性质2.6表明,虽然平凡守恒律往往与微分方程本身无关,但有时也不尽然.事实上,由性质2.6得到的守恒律$< T_x, -X_x > \equiv < P_x, -P_t >$,$P = T$就是一个由非平凡守恒律$< T, -X >$得到的微分方程(5)的平凡守恒律,因而与微分方程(5)有着密切联系.可见,平凡守恒律并非总与微分方程本身无关.不仅如此,利用平凡守恒律还可以导致非平凡守恒律.例如:$< u_{xx}, -u_{xt} >$是一个平凡守恒律,(2) ~ (4)可以确定微分方程(1)的三个非平凡守恒律:

万方数据

$$\begin{cases}\langle u,\ -\left(\frac{1}{2}u^2+u_{xt}\right)\rangle \\ <\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u_x^2,\ -\left(\frac{1}{3}u^3+uu_{xt}\right)> \\ <\frac{1}{3}u^3,\ -\left(\frac{1}{4}u^4+u^2u_{xt}+u_{xt}^2-u_t^2\right)>\end{cases} \tag{9}$$

于是,利用性质 2.5 的后半部分可以得到微分方程(1) 的另外三个非平凡守恒律[5,6]:

$$\begin{aligned}&< u+u_{xx},\ -\left(\frac{1}{2}u^2+2u_{xt}\right)> \\ &< \frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u_x^2+u_{xx},\ -\left(\frac{1}{3}u^3+uu_{xt}+u_{xt}\right)> \\ &< \frac{1}{3}u^3+u_{xx},\ -\left(\frac{1}{4}u^4+u^2u_{xt}+u_{xt}^2+u_{xt}-u_t^2\right)>\end{aligned} \tag{10}$$

可以利用定义 2.3 证明(10) 表示的三个非平凡守恒律也同样是相互独立的守恒律[7]. 由此可见,定理 1.1 表述的真正含义有待进一步明确.

3 守恒律的等价分类

对微分方程(5) 的非平凡守恒律进行等价分类. 首先给出一个基础定理:

定理 3.1 设 $< T_1,\ -X_1 >$, $< T_2,\ -X_2 >$ 是微分方程(5) 的两个非平凡守恒律,则它们相关的充要条件是:T_1,T_2 在不计常数因子外彼此相差一个平凡守恒律 $< P_x,\ -P_t >$ 中的 $P_x \neq 0$.

证明 对非平凡守恒律 $< T_1,\ -X_1 >$, $< T_2,\ -X_2 >$ 用定义 2.3($n=2$),则它们相关的充要条件是 T_1,T_2 沿微分方程(5) 的所有解 $u=u(x,t)$ 满足恒等式:$c_1T_1+c_2T_2=P_x$,其中 c_1,c_2 是确定常数,$P=P(x,t,u,u_x,u_{xx},\cdots)\neq 0$ 是确定的可微函数. 显然,c_1,c_2 都是非零常数,因而有

$$T_1=-\frac{c_2}{c_1}T_2+\frac{1}{c_1}P_x \tag{11}$$

这就证明了守恒律 $< T_1,\ -X_1 >$, $< T_2,\ -X_2 >$ 相关的必要条件. 反之,如果 T_1,T_2 在不计常数因子外彼此相差一个平凡守恒律 $< P_x,\ -P_t >$ 中的 $P_x \neq 0$,例如:

$$T_1=aT_2+P_x \tag{12}$$

由此立刻得知守恒律 $< T_1,\ -X_1 >$, $< T_2,\ -X_2 >$ 是相关的.

定理 3.1 表明,微分方程(5) 的任意两个相关的非平凡守恒律除去常数因子和平凡守恒律外没有本质的区别,因而可以将它们视为同一类型的守恒律. 下面引入守恒律的等价和等价类的概念.

定义 3.2 微分方程(5) 的两个非平凡守恒律 $< T_1,\ -X_1 >$, $< T_2,\ -X_2 >$ 称为是等价的,如果它们是在定义 2.3 意义下是彼此相关的.

两个等价的非平凡守恒律是相关的,反之是独立的. 这样,微分方程(5) 的所有非平凡守恒律可以按定义 3.2 中的等价关系分类. 微分方程(5) 的两个非平凡守恒律 $< T_1,\ -X_1 >$, $< T_2,\ -X_2 >$ 处于同一等价类当且仅当它们是等价的. 可以证明,这里的等价分类具有通常等价类关系的反身性、对称性和传递性性质. 因而,对于给定的微分方程(5) 必然存在按定义 3.2 中的等价关系分类的等价类,并且有

定理 3.3 微分方程(5) 的每一个非平凡守恒律必属于诸等价类中的某一个等价类,处于同一等价类中的任何两个非平凡守恒律是相关的,处于两个不同等价类中的任何两个非平凡守恒律是独立的.

上述定理可以用常用的充分必要条件表述为:微分方程(5) 的任意两个非平凡守恒律彼此独立的当且仅当它们分别处于两个不同的等价类中. 但是,这个结论不能推广到多个非平凡守恒律情形,下面的定理就足以说明这一点.

定理 3.4 设 $< T_i,\ -X_i >$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 是微分方程(5) 的 m 个非平凡守恒律,则这 m 个非平凡守恒律独立的必要条件是它们分别处于 m 个不同的等价类中. 但是,处于 $m(m\geqslant 3)$ 个不同等价类中的非平凡守恒律有可能是相关的.

证明 设 $< T_i,\ -X_i >$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 是微分方程(5) 的 m 个独立的非平凡守恒律,我们将用反

万方数据

证法来证明它们必然处于 m 个不同的等价类中. 如果它们不处于 m 个不同的等价类中,那么这 m 个独立的非平凡守恒律中至少有两个处于同一个等价类中,例如 $< T_i, -X_i > (i = 1,2)$. 于是,由定理 3.3 立刻知道 $< T_i, -X_i > (i = 1,2)$ 是两个彼此相关的守恒律. 即存在常数 c_1, c_2 和函数 P 沿微分方程(5) 的所有解满足

$$c_1T_1 + c_2T_2 = P_x \tag{13}$$

于是,取 $c_i = 0(i = 3,4,\cdots,m)$,显然有

$$c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3 + \cdots + c_mT_m = P_x \tag{14}$$

这表明 $< T_i, -X_i > (i = 1,2,\cdots,m)$ 是相关的,此与它们是微分方程(5) 的 m 个独立的非平凡守恒律的假设相矛盾. 因此,它们必然处于 m 个不同的等价类中.

至于后半部分的证明,可以通过具体例子可以得到. 事实上,如果 $< T_i, -X_i > (i = 1,2)$ 是微分方程(5) 的两个彼此独立的非平凡守恒律,可以构造守恒律 $< T_0, -X_0 >: T_0 = T_1 + T_2$. 显然, $< T_0, -X_0 >$ 必定是非平凡的且与 $< T_i, -X_i > (i = 1,2)$ 构成相关的守恒律组. 但是,守恒律 $< T_0, -X_0 >$ 所在的等价类必然不同于 $< T_i, -X_i > (i = 1,2)$ 中的任何一个等价类,因而它们是微分方程(5) 的分别处于三个不同等价类中的非平凡守恒律.

从定理 3.4 可以看出,非平凡守恒律的独立性与是否处于不同等价类是有区别的. 实际上,我们可以从定理 3.4 后半部分的证明得到启发推出下面结果.

定理 3.5　设 $< T_i, -X_i > (i = 1,2,\cdots,m)$ 是微分方程(5) 的 m 个独立的非平凡守恒律,任取一组全不为零的数 $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_m$,可以得到新的非平凡守恒律 $< T, -X >$:

$$< c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3 + \cdots + c_mT_m,\ -c_1X_1 - c_2X_2 - c_3X_3 - \cdots - c_mX_m >$$

它与原非平凡守恒律一起构成处于不同等价类中的相关非平凡守恒律组.

根据上面讨论,我们可以看到独立的守恒律可以生成其它守恒律,任何一个非平凡守恒律都可以由一组独立的非平凡守恒律生成. 因此,下面的定义是自然的.

定义 3.6　微分方程(5) 的一组独立的非平凡守恒律

$$< T_i, -X_i > (i = 1,2,\cdots,) \tag{15}$$

称为它的生成元组,如果微分方程(5) 的任意一个非平凡守恒律 $< T, -X >$ 都可以由这组独立的非平凡守恒律生成,即可以表示成它们的线性组合.

在定理 3.5 中,通过选取无穷多组全不为零的常数 $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_m$ 可以构造出无穷多组处于不同等价类中的相关非平凡守恒律组,例如对任意正整数 k 可以取 $c_1 = c_2 = \cdots = c_3 = 1, c_m = k$. 因此,关于守恒律的等价类和生成元组所含守恒律的个数及其关系有下面重要结论:

推论 3.7　微分方程(5) 的所有非平凡守恒律在定义 3.2 意义下的等价类必然有无穷多个,生成元组所含的个数可以是有限数也可以是无穷大,它是微分方程(5) 的一个不变量.

[参考文献]

[1] Benjamin T B, Bnoa J L, Mahony J J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems[J]. Phil Trans Roy Soc London, Series A, 1972(272):47 - 78.

[2] Olver P J. On the Hamiltonian structure of evolution equations[J]. Math Proc Camb Phil Soc,1980,88:71 - 88.

[3] Olver P J. Euler operators and conservation laws for the BBM equation[J]. Math Proc Camb Phil Soc, 1979, 85:143 - 160.

[4] 张卫国, 王明亮. B-BBM 方程的一类准确行波解及其结构[J]. 数学物理学报,1992, 12(3):325 - 331.

[5] 张宝善,卢东强,戴世强,等. 非线性水波 Hamilton 系统理论与应用研究进展[J]. 力学进展, 1998, 28(4): 521 - 531.

[6] 张宝善, 戴世强. 变分原理与非线性水波 Hamilton 描述[J]. 力学与实践,1997, 19(4): 20 - 22.

[7] Zhang Baoshan. Variational principles and hamiltonian formulation for nonlinear water waves[J]. Journal of Shanghai University: Natural Sciences, 1998, 2(3): 256 - 258.

[责任编辑:陆炳新]

万方数据