族$\mathscr{F}$-遍历与$\mathscr{F}$-混合

刘桂仙[1],杨润生[2]

(1. 河南理工大学数学与信息科学学院,河南 焦作 454000)
(2. 南京师范大学数学与计算机科学学院,江苏 南京 210097)

[摘要] 本文给出族$\mathscr{F}$-遍历,族$\mathscr{F}$-强混合,族$\mathscr{F}$-弱混合,族$\mathscr{F}$-2 混合,族$\mathscr{F}$-一致混合和族$\mathscr{F}$-Césaro 一致混合的概念,研究了它们的性质、判定及相互关系,并且讨论了对于连续变换的不变测度的族$\mathscr{F}$-遍历和族$\mathscr{F}$-混合的刻划.

[关键词] $\mathscr{F}$-遍历,$\mathscr{F}$-强混合,$\mathscr{F}$-弱混合,$\mathscr{F}$-2 混合,$\mathscr{F}$-一致混合,$\mathscr{F}$-Césaro 一致混合.
[中图分类号] O189.3 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2006)03-0014-06

Family $\mathscr{F}$-Ergodic and $\mathscr{F}$-Mixing

Liu Guixian[1], Yang Runsheng[2]

(1. School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China)
(2. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract: In this paper, we introduce the notions of family $\mathscr{F}$-ergodic, family $\mathscr{F}$-strong-mixing, family $\mathscr{F}$-weak-mixing, family $\mathscr{F}$-2-mixing, family $\mathscr{F}$-uniform mixing and family $\mathscr{F}$-Césaro uniform mixing, we study their properties, judging and correlation, moreover, we discuss the description of $\mathscr{F}$-ergodic and $\mathscr{F}$-mixing with respect to the invariant measure for continuous transformation.

Key words: $\mathscr{F}$-ergodic, $\mathscr{F}$-strong-mixing, $\mathscr{F}$-weak-mixing, $\mathscr{F}$-2-mixing, $\mathscr{F}$-uniform mixing, $\mathscr{F}$-Césaro uniform mixing

0 引言

在文[1]中作者给出了相对于序列遍历的概念,讨论了强混合与相对于序列遍历的等价关系,文[2]中作者给出了族$\mathscr{F}$-遍历和族$\mathscr{F}$-强混合的概念,讨论了族$\mathscr{F}$-强混合与混沌的关系. 文[3]中作者给出了 2-混合、一致混合和 Césaro 一致混合的概念. 本文将文[2]的族$\mathscr{F}$-遍历和族$\mathscr{F}$-强混合的概念加以修改,并给出族$\mathscr{F}$-弱混合的概念,进而将遍历、强混合和弱混合 的一些重要性质推广到族$\mathscr{F}$-遍历、族$\mathscr{F}$-强混合和族$\mathscr{F}$-弱混合上;在文[3]的基础上我们又给出$\mathscr{F}$-2-混合,$\mathscr{F}$-一致混合和$\mathscr{F}$-Césaro 一致混合的概念, 讨论了它们的性质及相互关系.

1 定义

设 $T: X\to X$ 是概率空间$(X,\mathscr{B}(X),m)$上的保测变换,若对任意的递增非负整数序列 $\{n_i\}\in$ 族 $\kappa\mathscr{F}$,对任意的 $A,B\in\mathscr{B}(X)$,有$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}m(T^{-n_i}A\cap B)=m(A)m(B)$,则称 T 是族$\mathscr{F}$-遍历的. 若有$\lim\limits_{i\to\infty}m(T^{-n_i}A\cap B)=m(A)m(B)$,则称 T 是族$\mathscr{F}$-强混合的. 若 $T\times T$ 是$\mathscr{F}$-遍历的,则称 T 是族$\mathscr{F}$-弱混合的.

称 T 是$\mathscr{F}$-2-混合的,若对任意的递增非负整数序列 $S=\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$, 对任意的 $A,B\in\mathscr{B}(X)$,有

收稿日期:2005-12-02.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10571086).
作者简介:刘桂仙,女,1980—,助教,主要从事拓扑动力系统方向的学习与研究. E-mail:liugx99@126.com
通讯联系人 杨润生,1942—,教授,主要从事拓扑动力系统方向的教学与研究. E-mail:rshynj@sina.com

$\lim\limits_{k,l\in S} m(T^{-k}A\cap T^{-l}B\cap C)=m(A)m(B)m(C)$,这里 $l\to+\infty$ 并且 $k-l\to+\infty$. 因为 T 是保测变换,令 $C=X$,可推出 $\lim\limits_{k,l\in S} m(T^{-(k-l)}A\cap B)=m(A)m(B)$,这时称 T 是 $\mathscr{F}$- 一致混合的. 因此 T 是 $\mathscr{F}$2- 混合蕴含 T 是 $\mathscr{F}$- 一致混合的. 称 T 是 $\mathscr{F}$- Césaro 一致混合的,若对任意的递增非负整数序列 $S=\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$,对任意的 A,$B\in\mathscr{B}(X)$,有 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}\sum\limits_{i,j=1}^{k} m(T^{-n_i}A\cap T^{-n_j}B)=m(A)m(B)$. 因为一般地,$S\in\mathscr{F}\nRightarrow\{k-l\mid k,l\in S,k>l\}\in\mathscr{F}$,所以 T 是 $\mathscr{F}$- 强混合的 $\nRightarrow T$ 是 $\mathscr{F}$- 一致混合的,但若 $\mathscr{F}$ 为 Z_+ 的无限子集族 $\mathscr{B}$ 时,因 $S\in\mathscr{B}\Rightarrow\{k-l\mid k,l\in S,k>l\}\in\mathscr{B}$,因此 T 是 $\kappa\mathscr{B}$- 强混合蕴含着 T 是 $\kappa\mathscr{B}$ 一致混合.

设 $f\in L^1(m)$,$x\in X$,称 $\int_X f\mathrm{d}m$ 为 f 的相空间平均,若对任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$,$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1} f(T^{n_i}(x))$ 存在,则称它为点 x 的 f 族 $\mathscr{F}$ 时间平均.

文中没有定义的符号和术语参看文献[4]和[5],以下总假设 $\mathscr{F}$ 是 Z_+ 的一真族.

2 $\mathscr{F}$- 遍历

引理 2.1[4] 若 T 是概率空间上的保测变换,则 T 是弱混合 $\Leftrightarrow T\times T$ 是遍历.

定理 2.1 T 是遍历的 $\Leftrightarrow T$ 是 $\mathscr{P}_+$- 遍历.

证明 由遍历和族遍历的定义易得.

定理 2.2 T 是强混合 $\Leftrightarrow T$ 是 $\kappa\mathscr{B}$- 遍历.

证明 由[1,引理4.2]的证明可得.

定理 2.3 T 是弱混合 $\Leftrightarrow T\times T$ 是 $\mathscr{P}_+$- 遍历.

证明 由引理 2.1 和定理 2.1 即可证得.

定理 2.4 设 $T:X\to X$ 是概率空间 $(X,\mathscr{B}(X),m)$ 上的保测变换,若对任意 $n\geqslant 2$,$T^{(n)}=\underbrace{T\times T\times\cdots\times T}_{n}$ 是族 $\mathscr{F}$- 遍历,则 T 是族 $\mathscr{F}$- 遍历.

证明 若 $T^{(n)}$ 是族 $\mathscr{F}$ 遍历,则对任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$,对任意 $A,B\in\mathscr{B}(X)$,有 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1} m(T^{-n_i}A\cap B)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}(m\times m\times\cdots\times m)[(T\times T\times\cdots\times T)^{-n_i}(A\times X\times\cdots\times X)\cap(B\times X\times\cdots\times X)]=(m\times m\times\cdots\times m)(A\times X\times\cdots\times X)(m\times m\times\cdots\times m)(B\times X\times\cdots\times X)=m(A)m(B)$. 所以 T 是族 $\mathscr{F}$- 遍历.

定理 2.5 若对所有的 $f\in L^1(m)$,对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$,$f$ 族 $\mathscr{F}$ 时间平均几乎处处和 f 的相空间平均相等,即 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1} f(T^{n_i}(x))=\int_X f\mathrm{d}m$ a.e,则 T 是 $\mathscr{F}$- 遍历.

证明 因为对任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$,$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1} f(T^{n_i}(x))=\int_X f\mathrm{d}m$ a.e,令 $A,B\in\mathscr{B}(X)$,$m(A)>0$,$m(B)>0$,$f=\chi_A$,则 $\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\chi_A(T^{n_i}(x))\to m(A)$ a.e,两边同乘 χ_B:$\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\chi_A(T^{n_i}(x))\cdot\chi_B\to m(A)\chi_B$ a.e,两边积分,由控制收敛定理得:$\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1} m(T^{-n_i}A\cap B)\to m(A)m(B)$. 因此 T 是 $\mathscr{F}$- 遍历.

定理 2.6 设 $T:X\to X$ 是概率空间 $(X,\mathscr{B}(X),m)$ 上的保测变换,则下列条件等价:

(1) T 是族 $\mathscr{F}$- 遍历.

(2) 对任意 $f,g\in L^2(m)$,对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$,$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}(U_T^{n_i}f,g)=(f,1)(1,g)$.

(3) 对任意 $f\in L^2(m)$,对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$,$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}(U_T^{n_i}f,f)=(f,1)(1,f)$.

证明 (2)$\Rightarrow$(1) 对于任意 $A,B\in\mathscr{B}(X)$,令 $f=\chi_A$,$g=\chi_B$,可证得,略.

(1)$\Rightarrow$(3) 由(1)可得,对于任意 $A,B\in\mathscr{B}(X)$,$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}(U_T^{n_i}\chi_A,\chi_B)=(\chi_A,1)(1,\chi_B)$,因内积对两

因子线性,因此(3) 式对所有简单函数均成立. 对于任意 $f \in L^2(m)$,对于任意 $\varepsilon > 0$,选取简单函数 h,使得 $\|f - h\|_2 < \varepsilon$,选取 $N(\varepsilon)$,使得当 $k \geqslant N(\varepsilon)$ 时,有

$$\left|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(U_T^{n_i}h,h) - (h,1)(1,h)\right| < \varepsilon.$$

因此当 $k \geqslant N(\varepsilon)$ 时,

$$\left|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(U_T^{n_i}f,f) - (f,1)(1,f)\right| \leqslant \left|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(U_T^{n_i}f,f) - \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(U_T^{n_i}h,f)\right| +$$
$$\left|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(U_T^{n_i}h,f) - \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(U_T^{n_i}h,h)\right| + \left|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(U_T^{n_i}h,h) - (h,1)(1,h)\right| +$$
$$|(h,1)(1,h) - (f,1)(1,h)| + |(f,1)(1,h) - (f,1)(1,f)|$$
$$\leqslant \left|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(U_T^{n_i}(f-h),f)\right| + \left|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(U_T^{n_i}h,(f-h))\right| + \varepsilon + |(1,h)||(h-f,1)| + |(f,1)||(1,h-f)| \leqslant \|f-h\|_2 \cdot \|f\|_2 + \|f-h\|_2 \cdot \|h\|_2 + \varepsilon + \|h\|_2 \cdot \|f-h\|_2 + \|f\|_2 \cdot \|h-f\|_2$$
$$\leqslant \varepsilon\|f\|_2 + \varepsilon(\|f\|_2 + \varepsilon) + \varepsilon + (\|f\|_2 + \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon\|f\|_2.$$
所以 $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(U_T^{n_i}f,f) = (f,1)(1,f)$.

(3)⇒(2)　设 $f \in L^2(m)$,令 $\mathscr{F}_f = \{g \in L^2(m) \mid \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(U_T^{n_i}f,g) = (f,1)(1,g)\}$. 只要证 $\mathscr{F}_f = L^2(m)$,令 $\mathscr{H}_f$ 是 $L^2(m)$ 中包含 f 和常函数且满足 $U_T\mathscr{H}_f \subset \mathscr{H}_f$ 的最小闭子空间,由(3) 知 $f \in \mathscr{F}_f$ 且 $\mathscr{F}_f$ 包含常函数,$U_T\mathscr{F}_f \subset \mathscr{F}_f$,从而 $\mathscr{F}_f \supset \mathscr{H}_f$,对任意 $g \in \mathscr{H}_f^{\perp}$, 则 $(U_T^{n_i}f,g) = 0$, $(1,g) = 0$,因此 $\mathscr{F}_f \supset \mathscr{H}_f^{\perp}$. 因为 $\mathscr{H}_f \oplus \mathscr{H}_f^{\perp} = L^2(m)$,所以 $\mathscr{F}_f = L^2(m)$.

3　$\mathscr{F}$-强混合、$\mathscr{F}$-弱混合和 $\mathscr{F}$-Césaro 一致混合

引理 3.1[1]　设 $T: X \to X$ 是概率空间 $(X,\mathscr{B}(X),m)$ 上的保测变换,则 T 是强混合的 ⇔ 对任意 $n \geqslant 2$, $T^{(n)}$ 也是强混合的.

定理 3.1　设 $T: X \to X$ 是概率空间 $(X,\mathscr{B}(X),m)$ 上的保测变换,则:

(1) T 是强混合 ⇔ T 是 $\kappa\mathscr{B}$-弱混合 ⇔ T 是 $\kappa\mathscr{B}$-遍历.

(2) T 是弱混合 ⇔ T 是 $\mathscr{P}_+$-弱混合.

(3) T 是强混合 ⇔ T 是 $\mathscr{P}_+$-强混合 ⇔ T 是 $\mathscr{B}$-强混合.

证明　(1) 由定理 2.2 和引理 3.1 易证.

(2) 由定理 2.3 即可证得.

(3) 由定义即可证得.

引理 3.1[4]　如 $\{a_n\}$ 是有界实数序列,则以下条件等价:

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|a_i| = 0$.

(2) 存在 Z_+ 的密度为 0 的子集 J,使得 $\lim_{J \not\ni n\to\infty} a_n = 0$.

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|^2 = 0$.

定理 3.2　若 $T: X \to X$ 是概率空间 $(X,\mathscr{B}(X),m)$ 上的保测变换,则下列条件等价:

(1) 对任意 $A,B \in \mathscr{B}(X)$,对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\} \in \kappa\mathscr{F}$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}|m(T^{-n_i}A \cap B) - m(A)m(B)| = 0.$$

(2) 对任意 $A,B \in \mathscr{B}(X)$,对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\} \in \kappa\mathscr{F}$,存在 Z_+ 的密度为 0 的子集 $J(A,B)$,使得 $\lim_{J(A,B)\not\ni i\to\infty} m(T^{-n_i}A \cap B) = m(A)m(B)$.

(3) 对任意 $A,B \in \mathscr{B}(X)$,对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\} \in \kappa\mathscr{F}$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}|m(T^{-n_i}A\cap B)-m(A)m(B)|^2=0.$$

证明 令 $a_i=m(T^{-n_i}A\cap B)-m(A)m(B)$,由引理 3.2 即证.

引理 3.3 设 $T:X\to X$ 是概率空间 $(X,\mathscr{B}(X),m)$ 上的保测变换,φ 是生成 $\mathscr{B}(X)$ 的半代数,则以下条件等价:

(1) T 是 $\mathscr{F}$-遍历 $\Leftrightarrow$ 对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$,对任意 $A,B\in\varphi$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}m(T^{-n_i}A\cap B)=m(A)m(B).$$

(2) T 是 $\mathscr{F}$-强混合 $\Leftrightarrow$ 对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$,对任意 $A,B\in\varphi$,

$$\lim_{i\to\infty}m(T^{-n_i}A\cap B)=m(A)m(B).$$

证明 参照[4,定理 1.17]的证明即可证得.

定理 3.3 设 $T:X\to X$ 是概率空间 $(X,\mathscr{B}(X),m)$ 上的保测变换,则以下条件等价:

(1) T 是 $\mathscr{F}$-弱混合的.

(2) 对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$,对任意 $A,B\in\mathscr{B}(X)$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}|m(T^{-n_i}A\cap B)-m(A)m(B)|=0.$$

(3) 对任意 $A,B\in\mathscr{B}(X)$,对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$,存在 Z_+ 的密度为 0 的子集 $J(A,B)$,使得 $\lim\limits_{J(A,B)\not\ni i\to\infty}m(T^{-n_i}A\cap B)=m(A)m(B)$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 因为 T 是 $\mathscr{F}$-弱混合的,所以对任意 $A,B,C,D\in\mathscr{B}(X)$,对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$,$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}(m\times m)((T\times T)^{-n_i}(A\times C)\cap(B\times D))=(m\times m)(A\times C)(m\times m)(B\times D)$ $=m(A)m(B)m(C)m(D)$. 从而 $\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}m(T^{-n_i}A\cap B)=\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}(m\times m)((T\times T)^{-n_i}(A\times X)\cap(B\times X))$ $\to(m\times m)(A\times X)(m\times m)(B\times X)=m(A)m(B)$.

$\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}(m(T^{-n_i}A\cap B))^2=\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}(m\times m)((T\times T)^{-n_i}(A\times A)\cap(B\times B))\to(m\times m)(A\times A)(m\times m)(B\times B)=m(A)^2m(B)^2$.

$\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}|m(T^{-n_i}A\cap B)-m(A)m(B)|^2=\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\{m(T^{-n_i}A\cap B)^2-2m(T^{-n_i}A\cap B)m(A)m(B)+m(A)^2m(B)^2\}\to 2m(A)^2m(B)^2-2m(A)^2m(B)^2=0$. 因此由定理 3.2 可得(2)式成立.

(2)$\Rightarrow$(3) 由定理 3.2 即证.

(3)$\Rightarrow$(1) 由定理 3.2 和引理 3.3 可证得,略.

引理 3.4 设 $T:X\to X$ 是概率空间 $(X,\mathscr{B}(X),m)$ 上的保测变换,φ 是生成 $\mathscr{B}(X)$ 的半代数,则以下条件等价:

(1) T 是 $\mathscr{F}$-弱混合的.

(2) 对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$,对于任意 $A,B\in\varphi$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}|m(T^{-n_i}A\cap B)-m(A)m(B)|=0.$$

(3) 对于任意 $A,B\in\varphi$,对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$,存在 Z_+ 的密度为 0 的子集 $J(A,B)$,使得 $\lim\limits_{J(A,B)\not\ni i\to\infty}m(T^{-n_i}A\cap B)=m(A)m(B)$.

证明 由定理 3.3 并参照[4,定理 1.17]的证明即可证得.

定理 3.4 设 $T:X\to X$ 是概率空间 $(X,\mathscr{B}(X),m)$ 上的保测变换,则 T 是 $\mathscr{F}$-弱混合的 $\Leftrightarrow$ 对任意 $n\geqslant 2$,$T^{(n)}$ 是 $\mathscr{F}$-弱混合的.

证明 $\Leftarrow$ 参照定理 2.4 的证明并由定理 3.3 即可证得.

$\Rightarrow$ 由定理 3.3 和引理 3.4 即可证得.

定理3.5 设 $T:X\to X$ 是概率空间 $(X,\mathscr{B}(X),m)$ 上的保测变换.

(i) 下列条件等价：

(1) T 是族 $\mathscr{F}$-弱混合的.

(2) 对 $\forall f,g\in L^2(m)$,任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}|(U_T^{n_i}f,g)-(f,1)(1,g)|=0$.

(3) 对 $\forall f\in L^2(m)$,任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}|(U_T^{n_i}f,f)-(f,1)(1,f)|=0$.

(4) 对 $\forall f\in L^2(m)$,任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}|(U_T^{n_i}f,f)-(f,1)(1,f)|^2=0$.

(ii) 下列条件等价：

(1) T 是族 $\mathscr{F}$-强混合的.

(2) 对于任意 $f,g\in L^2(m)$,对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$, $\lim\limits_{i\to\infty}(U_T^{n_i}f,g)=(f,1)(1,g)$.

(3) 对于任意 $f\in L^2(m)$,对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$, $\lim\limits_{i\to\infty}(U_T^{n_i}f,f)=(f,1)(1,f)$.

证明 (i) 参照定理2.6的证明并由定理3.3即可证得.

(ii) 参照定理2.6的证明即可证得.

引理3.5[4] 如 $\{a_n\}$ 是实数序列,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}|a_i|=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i=0$.

定理3.6 设 $T:X\to X$ 是概率空间 $(X,\mathscr{B}(X),m)$ 上的保测变换,则 T 是族 $\mathscr{F}$-强混合 $\Rightarrow T$ 是族 $\mathscr{F}$-弱混合 $\Rightarrow T$ 是族 $\mathscr{F}$-遍历.

证明 由定理3.3和引理3.5即可证得.

引理3.6[6] 设 $\{C_{i,j}:i,j\geqslant 1\}$ 是一个有界序列，并且 $\lim\limits_{|i-j|\to\infty}C_{i,j}=0$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i,j=1}^{n}C_{i,j}=0$.

定理3.7 设 $T:X\to X$ 是概率空间 $(X,\mathscr{B}(X),m)$ 上的保测变换,$\mathscr{F}$ 为一族,则 T 是族 $\mathscr{F}$-一致混合 $\Rightarrow T$ 是族 $\mathscr{F}$-Césaro 一致混合.

证明 对任意的递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$,对任意 $A,B\in\mathscr{B}(X)$,令 $C_{i,j}=m(T^{-n_i}A\cap T^{-n_j}B)-m(A)m(B)$,由引理3.6即可证得.

定理3.8 T 是族 $\mathscr{F}$-Césaro 一致混合 $\Leftrightarrow$ 对任意 $1\leqslant p<\infty$，对任意 $f\in L^p(X,\mathscr{B},m)$,对于任意严格递增非负整数序列 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\int\left|\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}f(T^{n_i}x)-\int f\mathrm{d}m\right|^p\mathrm{d}m=0$. 即按 L^p 中范数, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}f(T^{n_i}x)=\int f\mathrm{d}m$,(族 $\mathscr{F}$-平均遍历定理).

证明 $\Rightarrow$ 仿[6]引理2-引理4即可证得.

$\Leftarrow$ 任取 $\{n_i\}\in\kappa\mathscr{F}$,令 $f_k(x)=\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\chi_A(T^{n_i}x)$, $g_k(x)=\frac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1}\chi_A(T^{n_j}x)$,因为在 L^1 中 $f_k(x)\to\int\chi_A\mathrm{d}m=m(A)$, $g_k(x)\to m(B)$,从而 $f_k(x)\cdot g_k(x)\to m(A)\cdot m(B)$,因为

$$\left|\frac{1}{k^2}\sum_{i,j=0}^{k-1}m(T^{-n_i}A\cap T^{-n_j}B)-m(A)m(B)\right|=\left|\int f_k(x)\cdot g_k(x)\mathrm{d}m-m(A)m(B)\right|=$$

$$\left|\int(f_k(x)\cdot g_k(x)-m(A)m(B))\mathrm{d}m\right|\leqslant\int|f_k(x)\cdot g_k(x)-m(A)m(B)|\mathrm{d}m=\|f_k(x)\cdot g_k(x)-m(A)m(B)\|_1,$$

所以 $\frac{1}{k^2}\sum\limits_{i,j=0}^{k-1}m(T^{-n_i}A\cap T^{-n_j}B)\to m(A)m(B)$ ($i,j\to\infty$ 时)，从而 T 是 $\mathscr{F}$-Césaro 一致混合.

推论3.1 若 T 是族 $\mathscr{F}$-2-混合的,则族 $\mathscr{F}$-平均遍历定理成立.

证明 由 T 是族 $\mathscr{F}$-2-混合 $\Rightarrow T$ 是族 $\mathscr{F}$-一致混合,及定理3.7和定理3.8可证得.

推论3.2 若 T 是 $\mathscr{F}$-Césaro 一致混合的,则 T 是 $\mathscr{F}$-遍历的.

证明 由定理3.8和定理2.5即得.

4 连续变换的不变测度的 $\mathscr{F}$- 遍历和 $\mathscr{F}$- 混合

引理 4.1 设 $\mu \in M(X,T)$,则:

(1)μ 是 $\mathscr{F}$- 遍历 $\Leftrightarrow$ 对任意 $f \in C(X)$,对任意 $g \in L^1(\mu)$,对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\} \in \kappa\mathscr{F}$,$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\int f(T^{n_i}x)g(x)\mathrm{d}\mu(x) \to \int f\mathrm{d}\mu\int g\mathrm{d}\mu$.

(2)μ 是 $\mathscr{F}$- 强混合 $\Leftrightarrow$ 对任意 $f \in C(X)$,对任意 $g \in L^1(\mu)$,对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\} \in \kappa\mathscr{F}$,$\int f(T^{n_i}x)g(x)\mathrm{d}\mu(x) \to \int f\mathrm{d}\mu\int g\mathrm{d}\mu$.

(3)μ 是 $\mathscr{F}$- 弱混合 $\Leftrightarrow$ 存在自然数的密度为 0 的子集 J,使得 $\forall f \in C(X)$,$\forall g \in L^1(\mu)$,对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\} \in \kappa\mathscr{F}$,$\lim_{J \not\ni i\to\infty}\int f(T^{n_i}x)g(x)\mathrm{d}\mu(x) \to \int f\mathrm{d}\mu\int g\mathrm{d}\mu$.

证明 由定理 2.6 和定理 3.5,参照[4,引理 6.11] 即可证得.

定理 4.1 设 T 是紧致度量空间 X 上的连续变换,设 $\mu \in M(X,T)$,则:

(1)μ 是 $\mathscr{F}$- 遍历 $\Leftrightarrow$ 对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\} \in \kappa\mathscr{F}$,当 $m \in M(X)$,且 $m \ll \mu$ 时,有 $\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\tilde{T}^{n_i}m \to \mu$.

(2)μ 是 $\mathscr{F}$- 强混合 $\Leftrightarrow$ 对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\} \in \kappa\mathscr{F}$,当 $m \in M(X)$,且 $m \ll \mu$ 时,有 $\tilde{T}^{n_i}m \to \mu$.

(3)μ 是 $\mathscr{F}$- 弱混合 $\Leftrightarrow$ 对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\} \in \kappa\mathscr{F}$,存在自然数的密度为 0 的子集 J,使得当 $m \in M(X)$,且 $m \ll \mu$ 时,有 $\lim_{J \not\ni i\to\infty}\tilde{T}^{n_i}m \to \mu$.

证明 参照[4,定理 6.12] 即可证得.

定理 4.2 若 T 是紧致度量空间 X 上的连续变换,$\mu \in M(X,T)$,对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\} \in \kappa\mathscr{F}$,$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\delta_{T^{n_i}x} \to \mu$ a.e,则 μ 是 $\mathscr{F}$- 遍历.

证明 若 $\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\delta_{T^{n_i}x} \to \mu$ a.e,则存在 $Y \in \mathscr{B}(X)$,$\mu(Y)=1$,使得 $\forall x \in Y$,有 $\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\delta_{T^{n_i}x} \to \mu$. 因此,对任意 $x \in Y$,对任意 $f \in C(X)$,$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}f(T^{n_i}x) \to \int f\mathrm{d}\mu$. 若 $x \in Y$,$f \in C(X)$,$g \in L^1(\mu)$,则由控制收敛定理可得 $\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}f(T^{n_i}x)g(x) \to g(x)\int f\mathrm{d}\mu$. 因此由引理 4.1 可得 μ 是 $\mathscr{F}$- 遍历.

定理 4.3 设 T 是紧致度量空间 X 上的连续变换,$\mu \in M(X,T)$,若 μ 是 $\mathscr{F}$-Césaro 一致混合的,则对任意 $x \in X$,对于任意递增非负整数序列 $\{n_i\} \in \kappa\mathscr{F}$,$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\delta_{T^{n_i}x} \to \mu$.

证明 由定理 3.8 即得.

[参考文献]

[1] Liao Gongfu. Chaos for mixing-transformations[J]. Chin Ann of Math, 1994, 15B(4): 501 - 506.
[2] 曹毅,杨润生. 关于族 F 混合的研究[J]. 南京师大学报:自然科学版,2005,28(3): 15 - 19.
[3] Friedman A. Mixing on sequences[J]. Can J Math, 1983, 35(2): 339 - 552.
[4] Walters P. An Introduction to Ergodic Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1982.
[5] Akin E. Recurrence in Topological Dynamics: Furstenberg Families and Ellis Actions[M]. New York: Plenum Press, 1997.
[6] Blum J R, Hanson D L. On the mean ergodic theorem for subsequences[J]. Bull A M S, 1960, 66: 308 - 311.

[责任编辑:陆炳新]