

# 径向剪切干涉测量中基于 Zernike 多项式的波前重建

吕捷 , 王维民

( 南京财经大学信息工程学院 , 江苏 南京 210003 )

[ 摘要 ] 径向剪切干涉波面不能直接反映被测光学波面 , 因此提出一种径向剪切干涉测量中被测波前重建的新方法. 该方法基于 Zernike 多项式最小二乘法拟合的基本原理来确定波前重建表达式. 推导出径向剪切相位 Zernike 多项式系数与被测波前 Zernike 多项式系数转换关系. 对算法进行计算机模拟 , 并应用于实际径向剪切干涉测量 , 结果证明该方法具有可靠的波前重建精度.

[ 关键词 ] 径向剪切干涉 Zernike 多项式 波前重建

[ 中图分类号 ] O436 [ 文献标识码 ] A [ 文章编号 ] 1001-4616( 2006 )03-0040-05

## Zernike Polynomials Based Wavefront Reconstruction Method for Radial Shearing Interferometry

Lü Jie , Wang Weimin

( School of Information Engineering , Nanjing Economical University , Nanjing 210003 , China )

**Abstract** To solve the problem involved in the radial shearing interferometry that the wavefronts are not directly reflected in the interferograms , an algorithm and reconstruction procedure are proposed for such purpose. The algorithm is based on the least squares principle and the Zernike polynomials. A direct transformation between the coefficients for the tests wavefront and the ones for the radial shearing phase is proposed. Computational and experimental tests show that the proposed algorithm and the models are effective and accurate.

**Key words** radial shearing interference , Zernike polynomials , wavefront reconstruction

### 0 引言

在科学研究和工业生产中 , 横向剪切干涉<sup>[1]</sup>仪( Lateral Shearing Interferometer , LSI )是最常用的一种仪器 , 但也存在某些不足 , 最主要的是干涉图形不能直接给出波差值 ; 其次是仅仅在两波前的重叠区域内产生干涉图形 , 因此被检验波前某些位置的波相差信息不能直接得到 , 需基于获得的干涉相位作相位重建才能得到待测波前. 上述这些不足可用径向剪切干涉仪( Radial Shearing Interferometer , RSI )予以克服.

径向剪切干涉法是干涉法中的一种很重要的方法 , 已在很多领域有广泛的应用 , 如光学系统和光学器件的检测、温度和气体流动的研究、脉冲波前的高速测量. 径向剪切干涉法用于检验面形有其独特的优点 : ( 1 ) 不需要单独的参考表面 ( 2 ) 对气流和温度的扰动、机械振动等因素不敏感 ( 3 ) 以往用经典干涉法检验非球面的一个难题是干涉图中条纹太密以致于无法精确测量 , 应用径向剪切干涉法通过适当控制剪切比能够减少干涉图中的条纹数 , 用光电接收及计算机处理技术直接给出实测的波差值. 因此在非球面检测领域 , 径向剪切干涉法受到越来越多科研工作者的青睐.

在光学表面检测的绝大多数情况下 , 被测光学玻璃表面<sup>[2]</sup>或光学系统的出射光波面总是趋于平滑和

收稿日期 : 2006-02-14.  
基金项目 : 南京财经大学科研基金资助项目( B0554 ).  
作者简介 : 吕捷 , 女 , 1972— , 讲师 , 主要从事激光与计算机应用的教学与研究. E-mail : lvjie219@163. com

连续的.因此,这样的波面函数一定可以表达成一个完备的基底函数的线性组合.在众多类似的研究中,许多研究者曾选择过许多不同类型的基底函数拟合光学干涉波面<sup>[3]</sup>.不过,在光学测量问题中最终都选择了 Zernike 多项式作为对被测光学波面拟合的基底函数,原因是 Zernike 多项式的各项与光学像差有相应的对应关系, Zernike 多项式对光学波面的拟合精度最高.

## 1 径向剪切干涉原理和 Zernike 多项式

### 1.1 径向剪切干涉原理

剪切干涉又称错位干涉,就是用一定的装置将一个具有空间相干性的波面分裂成两个完全相同或相似的波面,并且这两个波面彼此产生一定量的相对错位,在错位后的两波面重叠区域形成一组干涉条纹.根据错位干涉条纹的形状,并通过一定的分析就可以获得原始波面所包含的信息.图 1 所示的是以不同倍率形成的、同轴被检验波前之间相干涉.

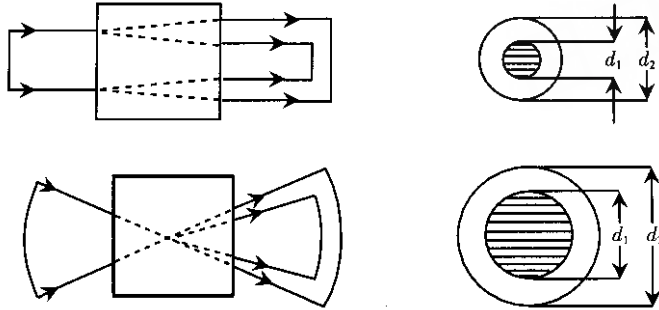


图 1 径向剪切干涉原理图

在径向剪切干涉仪中,两束光的中心部分相互重叠干涉,产生干涉条纹图样.假定波面可由下式表示:

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{l=0}^n \rho^n (a_{nl} \cos l\theta + b_{nl} \sin l\theta) \quad (1)$$

式中  $\rho, \theta$  是极坐标,  $n, l$  是已知的,并且  $n$  和  $l$  具有相同的奇偶性.

假定其中一个波面的收缩率是

$$S_c = \frac{\rho}{\rho'} \quad (2)$$

式中  $S_c \leq 1$ ,  $\rho$  为干涉图中某点的径向距离与未收缩波面的最大半径之比,  $\rho'$  为同一径向距离与收缩波面的最大半径之比.因此收缩波面可以由下方程表示:

$$u(\rho', \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{l=0}^n \rho'^n (a_{nl} \cos l\theta + b_{nl} \sin l\theta) \quad (3)$$

若另有一个类似的波面,其扩展率为

$$S_e = \frac{\rho}{\rho''} \quad (4)$$

式中  $S_e \geq 1$ , 则扩展的波面方程可以写成:

$$u(\rho'', \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{l=0}^n \rho''^n (a_{nl} \cos l\theta + b_{nl} \sin l\theta) \quad (5)$$

这样,干涉图的方程为:

$$w_{\text{OPD}} = u(\rho', \theta) - u(\rho'', \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{l=0}^n (1 - R^n) \rho'^n (a_{nl} \cos l\theta + b_{nl} \sin l\theta) \quad (6)$$

式中有效径向剪切量  $R$  定义为:

$$R = \frac{S_c}{S_e} \quad (7)$$

从(6)式可以看出,对于偏差项( $n, l$ )的径向干涉灵敏度为:

$$\sigma_{nl} = 1 - R^n \quad (8)$$

对于较高次项,灵敏度总是趋近于 1,而且非常接近 1,即使剪切比  $R$  很小时也是如此,正因为这样,这种千万方数据

涉图非常接近于直接表示的波相差. 但径向剪切干涉条纹是被测波面互相错位干涉的结果, 因此它并不直接反映被测波面, 为求被测波面必须进行一定的分析计算<sup>[4,5]</sup>, 只有干涉仪与计算机结合, 这种测量方法才有实际意义.

1.2 Zernike 多项式拟合干涉波面原理

在光学测量问题中最终都选择了 Zernike 多项式<sup>[6,7]</sup>作为对被测光学波面拟合的基底函数系, 原因是 Zernike 多项式对光学波面的拟合精度最高, 并具有以下特点:

(1) Zernike 多项式在单位圆上正交, 即

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 Z_n^l(\rho, \theta) Z_m^k(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{n+1} & (n = m, l = k) \\ 0 & (n \neq m, l \neq k) \end{cases} \quad (9)$$

式中  $Z_n^l(\rho, \theta)$  和  $Z_m^k(\rho, \theta)$  为 Zernike 多项式. 由于一般被测光学器件或光学系统都是具有圆形光瞳或圆形的通光孔, 经过归一化后正好为单位圆, 因此 Zernike 多项式所具有的这种单位圆上的正交性恰好满足圆形光瞳的特点, 而且 Zernike 多项式的正交性使得拟合多项式的系数相互独立, 从而避免了系数之间的耦合造成其物理意义的混淆不清.

(2) Zernike 多项式自身所特有的旋转对称性, 使之对光学问题的求解过程一般具有良好的收敛性.

(3) Zernike 多项式与初级像差有着一定的对应关系, 并且和光学设计者惯用的 Seidel 像差很容易建立起关系.

Zernike 多项式的极坐标具体表达式为:

$$Z_n^l(\rho) = R_n^l(\rho) \cdot \Theta_n^l(\theta) \quad (10)$$

式中  $n$  为多项式的阶数, 取值为  $0, 1, 2, \dots$ ;  $l$  为与阶数  $n$  有关的序号,  $l$  的值恒与  $n$  同奇偶性, 且绝对值小于或等于阶数  $n$ . 令  $l = n - 2m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ), 则

$$R_n^l = R_n^{n-2m} = \begin{cases} \sum_{s=0}^m (-1)^s \frac{(n-s)!}{s!(m-s)!(n-m-s)!} \cdot \rho^{n-2m} & n-2m \geq 0 \\ R_n^{l, n-2m|} & n-2m < 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\Theta_n^l(\theta) = \Theta_n^{n-2m}(\theta) = \begin{cases} \cos[(n-2m)\theta] & n-2m \geq 0 \\ -\sin[(n-2m)\theta] & n-2m < 0 \end{cases} \quad (12)$$

这样, 被测光学干涉波面的数学表达函数用 Zernike 多项式拟合为:

$$F(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z_k^{n-2m}(\rho, \theta) \quad \text{或} \quad F(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z_k(\rho, \theta) \quad (13)$$

式中  $a_k$  为 Zernike 多项式的拟合系数. 基底函数选定后, 剩下的问题是如何求出拟合系数  $a_k$ , 即求 Zernike 多项式的线性组合系数.

2 实验和结果

作为测量实例, 我们采用 Zernike 多项式进行波前重建方法测量了一个非球面镜的面形. 图 2 是非球面表面检测的光路图, 光束由激光器(Laser)发出, 经过扩束、滤波(Filter), 被透镜(L1)准直. 分束器(B.S)将一部分光向上反射, 分离出系统, 一部分光直进. 将凸面镜(C1)置于被测非球面镜(A.S)后, 并满足凸面镜的曲率中心与非球面镜的焦点重合. 光束经过非球面后携带其信息, 被凸面镜反射按原路返回, 再次经过分束器, 光路改变  $90^\circ$ . 波带板(ZP1, ZP2)将包含被测镜面信息的光束剪切, 通过光阑(P)后产生的干涉图样由 CCD 摄像机接收, 随即传入计算机进行处理. 图 3 是这个待测非球面镜的光载频调制信号的干涉条纹图. 首先对干涉图像进行中值滤波, 接着采用逐行扫描的方法对干涉图像进行希尔伯特变换、高通滤波, 然后进行相位解调和去包络后获得非球面镜表面的相位分布图. 图 4(a)是干涉条纹图中的一行图像, (b)是这行条纹经过希尔伯特变换后的图像, (c)是这行条纹经过高通滤波后得到的图像, (d)是这行条纹相位解调和去包络后获得的相位分布图, (e)是这行条纹所在非球面表面的线形. 再利用逐行扫描方法, 得到非球面镜表面的相位分布图, 然后经过波面拟合得到被测面形相位分布, 通常以波面面形差分的形式表示.

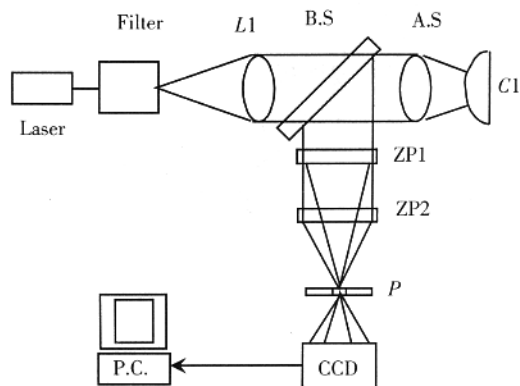


图2 非球面镜表面检测的光路图

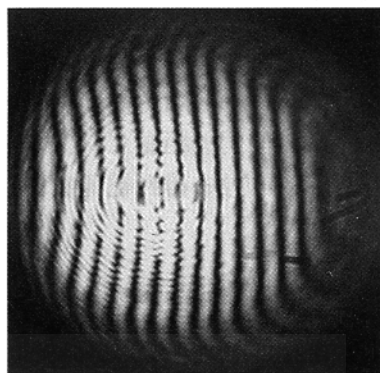


图3 非球面镜的光载频调制干涉条纹图

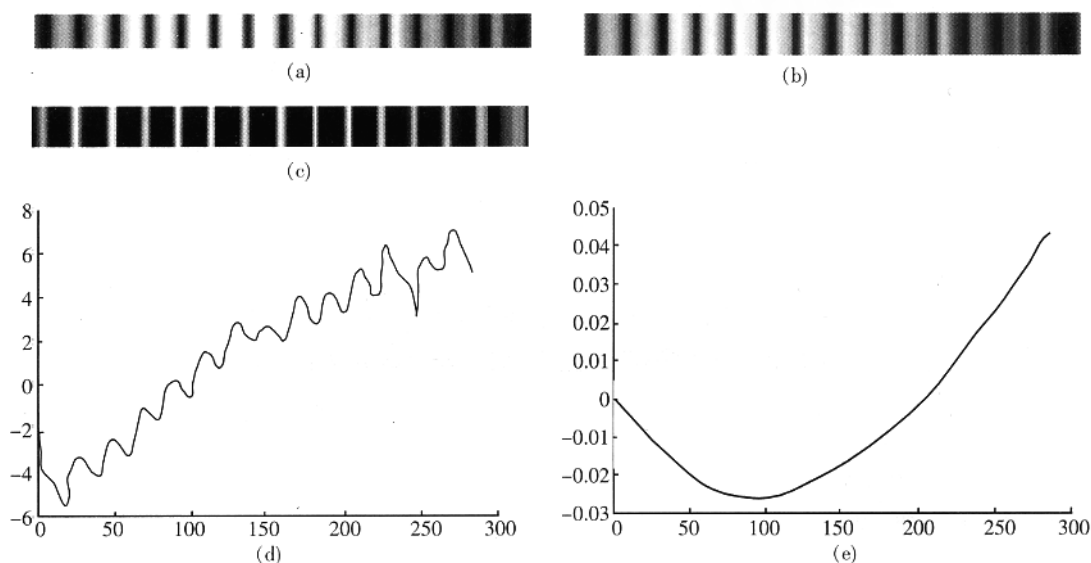


图4 (a)一行干涉条纹图;(b)希尔波特变换后的条纹图;(c)高通滤波后的条纹图;(d)非球面镜表面的波面相位分布图;(e)表面的面形图

由于采用的是径向剪切干涉方法,所以由干涉特征分析获得的干涉相位不是待测相位,只是待测相位差分或斜率,须基于获得的干涉相位作相位重建才能得到待测波前。对于这个系统,采用 Zernike 多项式重建算法,实现波前重建。如上所述,Zernike 多项式是一个函数系,原则上讲,选择尽可能高阶的 Zernike 多项式来拟合干涉波面,这样所得到的拟合干涉波面函数与实际的光学干涉波面最为接近,即采用较高的 Zernike 多项式来拟合干涉波面,将可以使得我们对光学干涉波面的拟合精度尽可能的高。然而,在实践中发现,当把拟合干涉波面的 Zernike 多项式的阶提高到一定程度时,拟合的波面函数的一致性遭到了严重的研究,用最小二乘法拟合重建算法,得到被测波前表面和预置的波前形状误差较小。

万方数据

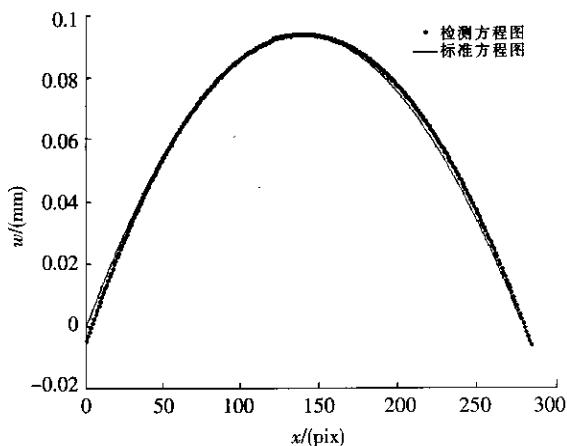


图5  $y=0.6\text{ mm}$ 沿 $x$ 方向的截面方向测量结果与标准方程的比较

被检测镜面为塑料非球面镜,方程为  $z = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2r^2}}$ , 其中  $k = -0.6$   $c$  为锥度  $c = 1/R$  非球面镜的曲率半径  $R = 51.6398 \text{ mm}$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ . 在水平方向改变两波带板的相对位置,可得到调制后  $x$  方向的干涉条纹.图 5 所示的是在  $y$  取某一值时( $y = 0.6 \text{ mm}$ ),抽取了  $x$  方向的一条曲线与标准方程进行比较.两条曲线之间的差距在  $0.0019955 \text{ mm}$  到  $0.0052616 \text{ mm}$  之间,其误差均方根为  $2.09 \mu\text{m}$ .

利用逐行扫描方法,得到被测物体非球面镜表面的波面相位分布图和非球面镜表面的面形图(见图 6 和图 7).

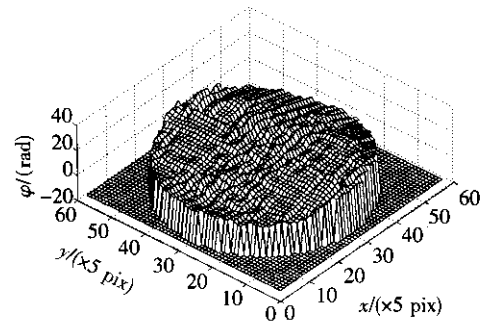


图 6 非球面镜表面的波面相位分布图

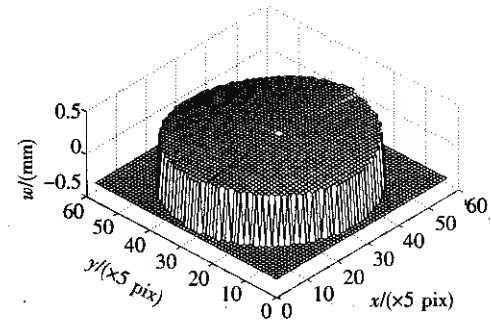


图 7 非球面镜表面的面形图

### 3 结论

本文结合 Zernike 多项式最小二乘法拟合,提出了径向剪切干涉测量中被测波前重建的一种新方法,并对所提出的算法进行了计算机模拟和实际应用检验,结果显示该算法具有可靠的波前重建精度.

### [ 参考文献 ]

- [ 1 ] 刘晓军,高咏生,章明. 剪切干涉测量中基于 Zernike 多项式的自适应波前重建[ J ]. 中国机械工程,2003,14( 3 ) 252 - 255.
- [ 2 ] 莫卫东,高佰龙. 数字化技术在玻璃表面检测系统中的应用[ J ]. 空军工程大学学报:自然科学版,2000,1( 5 ) 1 - 4.
- [ 3 ] Bruning J H, Herriott D R, Gallagher J E, et al. Digital wavefront measuring interferometer for testing optical surfaces and lenses[ J ]. Appl Opt, 1974, 13( 1 ) 2693 - 2703.
- [ 4 ] 曾新,梁佩莹,丁剑平. 大剪切量干涉的二维波前重建[ J ]. 中国激光,2005,32( 6 ) 782 - 786.
- [ 5 ] 曾新,丁剑平,梁佩莹,等. 二维剪切干涉波前的最小二乘法重建[ J ]. 光学学报,2005,25( 3 ) 335 - 340.
- [ 6 ] 韦春龙,陈明仪,王之江. 运用泽尼特多项式的相位去包裹算法[ J ]. 光学学报,1998,18( 7 ) 912 - 917.
- [ 7 ] 单宝忠,王淑岩,牛憨笨,等. Zernike 多项式拟合方法及应用[ J ]. 光学精密工程,2002,10( 3 ) 318 - 322.

[ 责任编辑:丁蓉 ]