图的几乎哈密尔顿的新的充分条件

徐新萍[1], 徐敏[2], 周兴和[3]

(1. 江苏教育学院数学系, 江苏 南京 210013)
(2. 中国科学院数学与系统科学研究院应用数学所, 北京 100080)
(3. 南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 利用插点方法就 k - 连通图 G 的独立集、本质独立集及 G 的部分平方图的独立集的邻域交, 研究图的几乎哈密尔顿性, 得到了关于图的几乎哈密尔顿的三个新的充分条件.

[关键词] 插点, 本质集, 部分平方图, 几乎哈密尔顿
[中图分类号] O157.5 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2006)04-0008-06

New Sufficient Conditions on Almost-Hamilton of Graphs

Xu Xinping[1], Xu Min[2], Zhou Xinghe[3]

(1. Department of Mathematics, Jiangsu Institute of Education, Nanjing 210013, China)
(2. Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)
(3. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract: In this paper, we use the technique of the vertex insertion, considering the neighborhood intersections of the essential independent sets and the independent set of the partially square graphs on k-connected graphs G, to study almost Hamilton of graphs, and obtained three new sufficient conditions.

Key words: vertex insertion, essential sets, partially square graphs, almost Hamilton.

0 引言

图论的基本概念和记号可参考[1], 本文涉及的图都是有限无向简单图. 在本节中, 将介绍文中将要频繁使用的一些定义和符号.

总设 G 是一个图, 而 $n = |V(G)|$ 称为图 G 的阶.

图 G 中的圈 C 称为极大圈, 如果 G 中不存在圈 C', 使得 $V(C') \supset V(C)$. 称 G 为哈密尔顿图, 如果 G 中有哈密尔顿圈; 图 G 的圈 C 称为控制圈(或简称 D - 圈), 如果 $V(G) \setminus V(C)$ 是一个独立集或空集. 称 G 为几乎哈密尔顿的, 如果 G 中的每个最长圈是控制圈.

称 S 为 G 的一个独立集, 如果 S 是 $V(G)$ 的一个子集, 且 S 中任意两个顶点在 G 中均不相邻. 图 G 的独立集 Z 称为本质的(或简称本质集), 如果存在 $\{z_1, z_2\} \subseteq Z$, 使得 $\mathrm{dist}(z_1, z_2) = 2$, 这里 $\mathrm{dist}(v, z)$ 总表示 v 与 z 间的距离.

设 $t > 1$ 是整数, 令

$I_t(G) = \{Z: Z$ 是 G 的独立集, $|Z| = t\}$, $I_t^{(e)}(G) = \{Z: Z$ 是 G 的本质集, $|Z| = t\}$.

设 $\{x_1, x_2\} \subseteq V(G)$, 记 $N[x_1] = N(x_1) \cup \{x_1\}$, 令

$$J(x_1, x_2) = \{u: u \in N(x_1) \cap N(x_2), N(u) \subseteq N[x_1] \cup N[x_2]\}.$$

图 G 的部分平方图 G^* 是满足下列条件的图[1]: $V(G^*) = V(G), E(G^*) = E(G) \cup \{x_1x_2: x_1x_2 \notin$

收稿日期: 2005-05-17.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371055, 10471037).
作者简介: 徐新萍, 女, 1964—, 博士, 副教授. 主要从事图论的教学与研究. E-mail: xxp3268@sina.com

$E(G)$，且 $J(x_1,x_2) \neq \emptyset\}$.

设 G 是连通图，$Z \subseteq V(G)$，总令 $N(Z) = \bigcup_{z\in Z} N(z)$. 并且，对于非负整数 j，令

$$N_j(Z) = \{v : v \in V(G), \mathrm{dist}(v,Z) = j\};$$

$$n(Z) = |\{v : v \in V(G), \mathrm{dist}(v,Z) \leq 2\}| = |N_0(Z) \cup N_1(Z) \cup N_2(Z)|,$$

这里 $\mathrm{dist}(v,Z) = \min\{\mathrm{dist}(v,z) ; z \in Z\}$.

另外为了方便起见，在不引起混淆的情形下，有时用图的子图的相同记号来表示其顶点集.

如果 $Y = \{y_0,y_1,y_2,\cdots,y_k\} \in I_{k+1}(G)$，$Y' = \{y_1,y_2,\cdots,y_k\} \in I_k(G)$，$0 < b \leq k$，取 $Y_i = \{y_i,y_{i-1},\cdots,y_{i-(b-1)}\} \subseteq Y'$，其中 $i \in \{1,2,\cdots,k\}$（y_j 的下标取模 k）. 对于 $Y \in I_{k+1}(G)$，$U \subseteq V(G)$，再令

$$\sigma_b(U,Y) = \sum_{i=1}^{k} |N(Y_i) \cap U| + b|N(y_0) \cap U|,$$

$$\sigma_b(Y) = \sigma_b(V(G),Y) = \sum_{i=1}^{k} |N(Y_i)| + b|N(y_0)|.$$

$$\sigma_b^1(U,Y) = \sum_{i=1}^{k} |N(Y_i) \cap U| + b|N(y_0) \cap U| + \min\{k, \frac{2b-1+k}{2}\} |(\bigcap_{i=0}^{k} N(y_i)) \cap U|;$$

$$\sigma_b^1(Y) = \sum_{i=1}^{k} |N(Y_i)| + b|N(y_0)| + \min\{k, \frac{2b-1+k}{2}\} |\bigcap_{i=0}^{k} N(y_i)|.$$

本文利用插点方法，得到了关于图的几乎哈密尔顿性的几个新的充分条件.

定理 1　设 G 是 n 阶 k - 连通图（$k \geq 2$），b 是整数，$0 < b \leq k$，若对于每个 $Y \in I_{k+1}(G)$ 有

$$\sigma_b(Y) = \sum_{i=1}^{k} |N(Y_i)| + b|N(y_0)| > \min\{k, \frac{2b-1+k}{2}\}(n(Y) - 1 + k - |\bigcap_{i=0}^{k} N(y_i)|),$$

则 G 是几乎哈密尔顿的.

定理 2　设 G 是 n 阶 k - 连通图（$k \geq 2$），b 是整数，$0 < b \leq k$，若对于每个 $Y \in I_{k+1}(G^*)$，在 G 中有

$$\sigma_b(Y) = \sum_{i=1}^{k} |N(Y_i)| + b|N(y_0)| > \min\{k, \frac{2b-1+k}{2}\}(n(Y) - 1 + k - |\bigcap_{i=0}^{k} N(y_i)|),$$

则 G 是几乎哈密尔顿的.

定理 3　设 G 是 n 阶 k - 连通图（$k \geq 2$），b 是整数，$0 < b \leq k$，若对于每个 $Y \in I_{k+1}^{(e)}(G)$ 有

$$\sigma_b(Y) = \sum_{i=1}^{k} |N(Y_i)| + b|N(y_0)| > \min\{k, \frac{2b-1+k}{2}\}(n(Y) - 1 + k - |\bigcap_{i=0}^{k} N(y_i)|),$$

则 G 是几乎哈密尔顿的.

显然定理 2 和定理 3 是对定理 1 的改进.

1　几个引理

设 G 是 n 阶连通的非哈密尔顿图，C 是 G 的一个极大圈，H 是 $G - V(C)$ 的一个分支. 设 $u \in C(v,v')$，如果存在某个顶点 $w \in C[v',v)$，使得 $\{w,w^+\} \subseteq N(u)$，则 u 称为 C 上关于 H 的 $C(v,v')$ 中的可插点（简称 u 是可插点）.

设 $\{v,v'\} \subseteq N_C(H)$，若存在 x，使得 $C(v,x)$（$\subseteq C(v,v')$）中的每个顶点都是可插点，而 x 不是可插点，则称 x 为 C 上关于 H 的 $C(v,v')$ 中的第一个不可插点（简称 $C(v,v')$ 中的第一个不可插点，或第一个不可插点）.

下面我们给出插点引理：

引理 1[2][3]　设 $\{v,v'\} \subseteq N_C(H)$，若 $C(v,u)$（$\subseteq C(v,v')$）中的所有顶点都是可插点，则

(1) 存在一条 (u,v) 路 P，使得 $V(P) = V(C)$；

(2) $u \notin N_C(H)$，从而在 $C(v,v')$ 中存在第一个不可插点 x.

设 $V_C = \{v_1,v_2,\cdots,v_m\} \subseteq N_C(H)$（$m \geq 2$），$x_i$ 为 C 上关于 H 的 $C(v_i,v_{i+1})$ 中的第一个不可插点，称 $X_C = \{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 是 V_C 关于 H 的第一个不可插点集合.

引理 2[2][3]　对于任意 $\{i,j\} \subseteq \{1,2,\cdots,m\}$，如果 $y_i \in C(v_i,x_i]$，$y_j \in C(v_j,x_j]$，则

(1) 不存在(y_i,y_j) - 路Q,使得Q上所有内点不在$V(C)$上;

(2) 不存在$w \in C(y_i,v_j)$,使得$\{y_jw,y_iw^+\} \subseteq E(G)$.

引理3[2][3]　(1) 若$u \in N_C(H)$,则$u^+ \notin N_C(H)$;

(2) 如果$u \in N(x_i) \cap C[v_{i+1},v_i)$,则$u^+ \notin N(x_i)$.

引理4[2][3]　如果$u \in N_C(H)\backslash\{v_i\}$,其中$i \in \{1,2,\cdots,m\}$,则对于任意$y \in C(v_i,x_i]$有$u^+y \notin E(G)$.

任取$x_0 \in V(H)$,记$X = \{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_m\}$.设$Y = \{y_0,y_1,y_2,\cdots,y_m\}$,其中$y_i \in C(v_i,x_i]$($i \in \{1,2,\cdots,m\}$),$y_0 = x_0$,$J_Y = \bigcup_{i=1}^{m} C[y_i,v_{i+1}]$,$K_Y = V(G)\backslash J_Y$,有

引理5[2][3]　$Y \in I_{m+1}(G)$,$K_Y \subseteq S_0(Y) \cup S_1(Y)$,$K_Y \cap N_0(Y) = \{y_0\}$.

对于Y,设$C[z_1,z_2) \subseteq C[y_t,v_{t+1}]$($t \in \{1,2,\cdots,m\}$),如果(1) $C(z_1,z_2) \cap S_0(Y) = \emptyset$;(2) $z_1 \in N_2(Y) \cup Y$,$z_2 \in S_0(Y) \cup \{v_{t+1}^+\}$,则$C[z_1,z_2)$称为$CY$ - 区间.CY - 区间$C[z_1,z_2)$称为简单的,若$C(z_1,z_2) \subseteq S_1(Y)$.

引理6[2][3]　设$C[z_1,z_2)(\subseteq C[x_t,v_{t+1}]$,对某个$t \in \{1,2,\cdots,m\})$是$CY$ - 区间,则设$M_i = N(x_i) \cap C(z_1,z_2)$($i \in \{0,1,\cdots,m\}$),则$M_t,M_{t-1},\cdots,M_1,M_m,M_{m-1},\cdots,M_{t+1},M_0$(其中可能有的是空集)在$C(z_1,z_2)$中构成相继的子路,它们仅可能在端点公共.并且$|M_0| \leqslant 1$,进一步当$y_i = x_i$且$i \in \{1,2,\cdots,m\}\backslash\{t\}$,有$|M_i| \leqslant 1$;

圈C称为关于X满足D - 条件,如果对于任意$z^- \in S_{m+1}(X)\backslash\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$有$\{z,z^+\} \subseteq S_0(X)$,或$\{z,z^{++}\} \subseteq S_0(X)$且$z^+ \in S_1(X)$.

引理7[3]　假设$|V(H)| > 1$,存在$q \in \{1,2,\cdots,m\}$,使得$C(v_{q-1},v_q] \cap N(x_0) = \{v_q\}$,$\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}\backslash\{v_q\} \subseteq N(H-x_0)$,并且对在$V(C)$中满足$z^- \in S_{m+1}(X)\backslash\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$的$z$,在$G$中不存在圈$C'$,使得$V(C') \supseteq V(C)\backslash\{z\}$,且$|V(C')| > |V(C)|$,则$C$对$X$满足$D$ - 条件.

引理8[4]　$X \in I_{m+1}(G^*)$.

2　定理的证明

2.1　定理1、2的证明

证明　用反证法.假设G不是几乎哈密尔顿的.设C是G中的最长圈,则存在H是$G-V(C)$的分支,且$|V(H)| > 1$.由于G是k - 连通,存在$x_0 \in V(H)$有$N(x_0) \cap V(C) \neq \emptyset$,且$|N_C(H-x_0)| \geqslant k-1$.可选取$W = \{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$,使得$W\backslash\{v_q\} \subseteq N_C(H-x_0)$,且$C(v_{q-1},v_q] \cap N(x_0) = \{v_q\}$,其中$v_1,v_2,\cdots,v_k$依次排列在$C$上.在$G$中将$C$关于$H$插点,可得$V_C = \{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$关于分支$H$的第一个不可插点集合$X_C = \{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$.令$X = X_C \cup \{x_0\}$,由引理8可知$X \in I_{k+1}(G^*)$.另外由上述的选取及引理7知,圈$C$关于$X$满足$D$ - 条件.

下面将证明一系列断言,最后得到矛盾.以下设$b^* = \min\{k,\frac{2b-1+k}{2}\}$.

断言1　(1) 如果$w \in S_1(X) \cap N(x_q)$($q \in \{1,2,\cdots,k\}$),则$\sigma_b(\{w\},X) = b = b-1+|\{q\}|$.

(2) 如果$w \in S_{i_0}(X) \cap C[x_t,v_{t+1}] \cap N(x_{q_1}) \cap N(x_{q_2}) \cdots \cap N(x_{q_{i_0}})$($i_0 \geqslant 2$),其中

$$(t \geqslant) q_1 > q_2 > \cdots > q_{i'_0} (>0)(k \geqslant) q_{i'_0+1} > \cdots > q_{i_0},$$

则

$$\sigma_b(\{w\},X) \leqslant \begin{cases} \min\{k,b-1+|\{q_1,q_1-1,q_1-2,\cdots,q_{i_0}\}|\} & \text{如果 } w \notin N(x_0); \\ \min\{k+b,2b-1+|\{q_1,q_1-1,q_1-2,\cdots,q_{i_0-1}\}|\} & \text{如果 } w \in N(x_0), \end{cases}$$

其中$q_1,q_1-1,q_1-2,\cdots$,将取模k并且不为0.

由条件及$\sigma_b(\{w\},X)$的定义,易见断言成立.

断言2　(1)$\sigma_b(K_X,X) \leqslant b^*(|K_X|-1-|\bigcup_{l>2}(N_l(X) \cap K_X)|)$;

(2) 设$C[z_1,z_2) \subseteq C[x_t,v_{t+1}]$是$CX$ - 区间,则

$$\sigma_b(C[z_1,z_2),X) \leqslant b^* |C[z_1,z_2)|;$$

且当 $C[z_1,z_2)$ 是简单 CX - 区间时,

$$\sigma_b(C[z_1,z_2),X) \leqslant b^*(|C[z_1,z_2)|-1).$$

证明 注意到 $b^* = \min\left\{k,\dfrac{2b-1+k}{2}\right\} \geqslant b.$

(1) 由引理5, $K_X \subseteq S_0(X) \cup S_1(X)$, 且 $K_X \cap N_0(X) = \{x_0\}$, 从而由断言1(1), 我们有

$$\begin{aligned}\sigma_b(K_X,X) &= b(|K_X|-|K_X \cap N_0(X)|-|\bigcup_{l\geqslant 2}(N_l(X) \cap K_X)|)\\ &\leqslant b(|K_X|-1-|\bigcup_{l>2}(N_l(X) \cap K_X)|)\\ &\leqslant b^*(|K_X|-1-|\bigcup_{l>2}(N_l(X) \cap K_X)|),\end{aligned}$$

则(1) 成立.

(2) 由引理6, 我们令 $C(z_1,z_1'^{+}) = N(x_t) \cap C[z_1,z_2)$, 则 $C(z_1,z'_1) \subseteq S_1(X)$. 令 $W' = C(z_1,z'_1)$, $|W'| = h'$; $W = C[z_1',z_2)$, $|W| = h$. $h_1 = |W \cap S_1(X)|$, $h_2 = h-h_1$, $|C[z_1,z_2)| = h'+h+1 = h'+h_1+h_2+1$. 不妨设 $W \backslash S_1(X) = \{w_1,w_2,\cdots,w_{h_2}\}$ ($w_1,w_2,\cdots,w_{h_2}$ 依次出现在 C 上), 且 $w_j \in S_{i_j}(X)$. 从而存在 $x_{q_1^{(j)}}, x_{q_2^{(j)}},\cdots, x_{q_{i_j}^{(j)}}$ $(i_j \geqslant 2)$, 使 $w_j \in \bigcap_{t=1}^{i_j} N(x_{q_t^{(j)}})$. 由引理6, 有

$$(t\geqslant)q_1^{(1)} > q_2^{(1)} > \cdots > q_{i_1}^{(1)} > q_1^{(2)} > q_2^{(2)} > \cdots > q_{i_2}^{(2)} > \cdots$$

$$> q_1^{(j')} > q_2^{(j')} > \cdots > q_{i'_{j'}}^{(j')}(>0,\ k\geqslant)q_{i'_{j'}+1}^{(j')} > \cdots > q_{i_{j'}}^{(j')} > \cdots > q_1^{(h_2)} > q_2^{(h_2)} > \cdots > q_{i_{h_2}}^{(h_2)};$$

因 $|C(z_1,z_2) \cap N(x_0)| \leqslant 1$, 若 $|C(z_1,z_2) \cap N(x_0)| = 1$, 则 $z_2^- \in N(x_0)$.

注意到 $C[z_1,z_2)$ 是简单 CX - 区间当且仅当 $h_2 = 0$. 从而如果 $C[z_1,z_2)$ 是简单 CX - 区间, 则由断言1(1), $\sigma_b(C[z_1,z_2),X) = b(h'+h_1) = b|C(z_1,z_2)| \leqslant b^*|C(z_1,z_2)| \leqslant b^*(|C[z_1,z_2)|-1)$.

下面我们假设 $C[z_1,z_2)$ 不是简单 CX - 区间, 则 $h_2 \neq 0$.

如果 $\dfrac{2b-1+k}{2} \geqslant k$, 则由断言1不难看出,

$$\sigma_b(C[z_1,z_2),X) \leqslant kh_2 + b(h_1+h') + b \leqslant k(h_2+h_1+h'+1) = k|C[z_1,z_2)|.$$

如果 $\dfrac{2b-1+k}{2} < k$, 由断言1知,

$$\begin{aligned}\sigma_b(C[z_1,z_2),X) &\leqslant (h_2(b-1)+b+k)+b(h'+h_1) = b(h'+h_1)+(h_2+1)(b-1+\frac{k+1}{h_2+1})\\ &\leqslant \frac{2b-1+k}{2}(h+h'+1) \leqslant \frac{2b-1+k}{2}|C[z_1,z_2)|,\end{aligned}$$

从而(2) 成立.

断言3 如果圈 C 关于 X 满足 D - 条件, 则 $\sigma_b^1(X) \leqslant b^*(n(X)-1+k)$.

证明 考虑到 $X = \{x_0,x_1,\cdots,x_k\}$, $J_X = \bigcup_{t=1}^{k} C[x_t,v_{t+1}]$. 对 $t \in \{1,2,\cdots,k\}$, 将

$$C[x_t,v_{t+1}] \backslash \bigcup_{l>2}(N_l(X) \cap C[x_t,v_{t+1}])$$

分成 s_t 个 CX - 区间:

$$C[z_{11}^{(t)},z_{12}^{(t)}), C[z_{21}^{(t)},z_{22}^{(t)}), \cdots, C[z_{s_t1}^{(t)},z_{s_t2}^{(t)}).$$

由引理6知, 如果 $C[z_{j1},z_{j2}) \cap (\bigcap_{i=0}^{k} N(x_i)) \neq \emptyset$, 则 $C[z_{j1},z_{j2}) \cap (\bigcap_{i=0}^{k} N(x_i)) = z_{j2}^-$. 由 D - 条件的定义, $C[z_{j1},z_{j2})$ 的下一个 CX - 区间必定是简单的. 假设在 $C[x_t,v_{t+1}]$ 中有 l 个 CX - 区间与 $\bigcap_{i=1}^{k} N(x_i)$ 的交是非空的, 则在 $C[x_t,v_{t+1}]$ 中至少有 $l-1$ 个简单 CX - 区间, 从而由断言2(2) 有:

$$\begin{aligned}\sigma_b^1(C[x_t,v_{t+1}],X) &= \sum_{j=1}^{s_t}\sigma_b(C[z_{j1}^{(t)},z_{j2}^{(t)}),X) + b^*|(\bigcap_{i=0}^{k} N(x_i)) \cap C[x_t,v_{t+1}]|\\ &\leqslant b^*(\sum_{j=1}^{s_t}|C[z_{j1}^{(t)},z_{j2}^{(t)})|) + b^*l - b^*(l-1)\\ &\leqslant b^*(|C[x_t,v_{t+1}]| - |\bigcup_{l>2}(N_l(X) \cap C[x_t,v_{t+1}])| + 1).\end{aligned}$$

注意到 $J_X = \bigcup_{t=1}^{k} C[x_t, v_{t+1}]$,则

$$\begin{aligned}\sigma_b{}^1(J_X,X) &= \sum_{t=1}^{k} \sigma_b{}^1(C[x_t,v_{t+1}],X)\\ &\leqslant \sum_{t=1}^{k} b^*(|C[x_t,v_{t+1}]| - |\bigcup_{l>2}(N_l(X)\cap C[x_t,v_{t+1}])| + 1)\\ &= b^*(|J_X| - |\bigcup_{l>2}(N_l(X)\cap J_X)| + k).\end{aligned}$$

再注意到 $K_X \subseteq S_1(X)\cup S_0(X)$,从而 $\sigma_b{}^1(K_X,X) = \sigma_b(K_X,X)$,且 $V(G) = J_X \cup K_X$,由断言2(1),我们有

$$\begin{aligned}\sigma_b{}^1(X) &= \sigma_b{}^1(J_X,X) + \sigma_b{}^1(K_X,X)\\ &\leqslant b^*(|J_X| - |\bigcup_{l>2}(N_l(X)\cap J_X)| + k) + b^*(|K_X| - 1 - |\bigcup_{l>2}(N_l(X)\cap K_X)|)\\ &= b^*(|V(G)\setminus \bigcup_{l>2} N_l(X)| - 1 + k)\\ &= b^*(n(X) - 1 + k).\end{aligned}$$

由断言3知 $\sigma_b^1(X) \leqslant b^*(n(X) - 1 + k)$,与题设矛盾.

从而,定理1、2成立.

2.2　定理3的证明

证明　按照定理1、2证明中选取的 X,如果 $X \in I_{k+1}^{(e)}(G)$,则令 $Y = X$,记 $Y = \{y_0,y_1,\cdots,y_k\}$,其中 $y_i = x_i, i\in\{0,1,2,\cdots k\}$;否则,取 $Y = X\setminus\{x_k,x_0\}\cup\{v_k{}^+,y_0\}$,其中 $y_0\in N_H(v_k)$. 记 $Y = \{y_0,y_1,\cdots,y_k\}$,其中 $y_i = x_i, i\in\{1,2,\cdots,k-1\}$,$y_k = v_k{}^+$,$y_0\in N_H(v_k)$. 由 Y 的选取知 $Y\in I_{k+1}^{(e)}(G)$.

若 $Y = X$,则由定理1、2可知定理3同样成立. 以下不妨假设 $Y\neq X$.

下面将给出一系列断言,最后得到矛盾. 同样令 $b^* = \min\{k, \dfrac{2b-1+k}{2}\}$.

根据定理1、2证明中断言的证明,同样可得下面的结论:

断言1　(1) 如果 $w\in S_1(Y)\cap N(y_q)(q\in\{1,2,\cdots,k\})$,则 $\sigma_b(\{w\},Y) = b = b-1+|\{q\}|$.

(2) 如果 $w\in S_{i_0}(Y)\cap C[y_t,v_{t+1}]\cap N(y_{q_1})\cap N(y_{q_2})\cdots\cap N(y_{q_{i_0}})(i_0\geqslant 2)$,其中

$$(t\geqslant)q_1 > q_2 > \cdots > q_{i'_0}(>0)(k\geqslant)\{q_{i'_0+1} > \cdots > q_{i_0}\},$$

则

$$\sigma_b(\{w\},Y)\leqslant\begin{cases}\min\{k, b-1+|\{q_1,q_1-1,q_1-2,\cdots,q_{i_0}\}|\} & \text{如果 } w\notin N(y_0);\\ \min\{k+b, 2b-1+|\{q_1,q_1-1,q_1-2,\cdots,q_{i_0-1}\}|\} & \text{如果 } w\in N(y_0),\end{cases}$$

其中 $q_1, q_1-1, q_1-2,\cdots$,将取模 k,并且不为0.

断言2　(1) $\sigma_b(K_Y,Y)\leqslant b^*(|K_Y| - 1 - |\bigcup_{l>2}(N_l(Y)\cap K_Y)|)$;

(2) 设 $C[z_1,z_2)\subseteq C[y_t,v_{t+1}]$ 是 CY－区间,则

$$\sigma_b(C[z_1,z_2),Y)\leqslant b^*|C[z_1,z_2)|;$$

且当 $C[z_1,z_2)$ 是简单 CY－区间,

$$\sigma_b(C[z_1,z_2),Y)\leqslant b^*(|C[z_1,z_2)| - 1).$$

证明　(1) 由引理5,$K_Y\subseteq S_0(Y)\cup S_1(Y)$,且 $K_Y\cap N_0(Y) = \{y_0\}$. 从而由断言1(1),我们有

$$\begin{aligned}\sigma_b(K_Y,Y) &= b(|K_Y| - |K_Y\cap N_0(Y)| - |\bigcup_{l\geqslant 2} N_l(Y)\cap K_Y|)\\ &\leqslant b(|K_Y| - 1 - |\bigcup_{l>2}(N_l(Y)\cap K_Y)|)\\ &\leqslant b^*(|K_Y| - 1 - |\bigcup_{l>2}(N_l(Y)\cap K_Y)|),\end{aligned}$$

则(1)成立.

(2) 由引理6,我们令 $C(z_1,z_1'^{+}) = N(y_t)\cap C[z_1,z_2)$,则 $C(z_1,z'_1)\subseteq S_1(Y)$. 令 $W' = C(z_1,z'_1)$,$|W'| = h'$;$W = C[z'_1,z_2)$,$|W| = h$. $h_1 = |W\cap S_1(X)|$,$h_2 = h - h_1$,$C[z_1,z_2) = h'+h+1 = h'+h_1+h_2+1$. 不妨设 $W\setminus S_1(X) = \{w_1,w_2,\cdots,w_{h_2}\}$($w_1,w_2,\cdots,w_{h_2}$ 依次出现在 C 上),且 $w_j\in S_{i_j}(X)$. 从而存

在 $y_{q_1^{(j)}}, y_{q_2^{(j)}}, \cdots, y_{q_{i_j}^{(j)}}(i_j \geq 2)$，使 $w_j \in \bigcap_{t=1}^{i_j} N(y_{q_t^{(j)}})$. 由 Y 的选取及引理6 可知存在唯一 $j' \in \{1,2,\cdots,h_2-1\}$，且有

$$(t \geq) q_1^{(1)} > q_2^{(1)} > \cdots > q_{i_1}^{(1)} > q_1^{(2)} > q_2^{(2)} > \cdots > q_{i_2}^{(2)} > \cdots$$
$$> q_1^{(j')} > q_2^{(j')} > \cdots > q_{i_{j'}}^{(j')} \geq q_1^{(j'+1)} > q_2^{(j'+1)} \cdots > q_{i_{j'+1}}^{(j'+1)} >$$
$$\cdots > q_1^{(h_2)} > q_2^{(h_2)} > \cdots > q_{i_{h_2}}^{(h_2)};$$

并且对于 $q_{i_{j'}}^{(j')} \geq q_1^{(j'+1)}$，当且仅当 $q_{i_{j'}}^{(j')} = q_1^{(j'+1)} = k$ 时等号成立. 因 $|C(z_1,z_2) \cap N(y_0)| \leq 1$，若 $|C(z_1,z_2) \cap N(y_0)| = 1$，则 $w_{z_2^-} \in N(y_0)$.

注意到 $C[z_1,z_2)$ 是简单 CY－区间当且仅当 $h_2 = 0$. 从而如果 $C[z_1,z_2)$ 是简单 CY－区间，则由断言 1(1)，

$$\sigma_b(C[z_1,z_2),Y) = b(h'+h_1) = b\,|C(z_1,z_2)| \leq b^*\,|C(z_1,z_2)| \leq b^*(|C[z_1,z_2)|-1).$$

下面我们假设 $C[z_1,z_2)$ 不是简单 CY－区间，则 $h_2 \neq 0$.

设 $N(y_k) \cap W = \{u_1,u_2,\cdots,u_{h_3}\}$. 当 $|\{u_1,u_2,\cdots,u_{h_3}\} \cap S_{i_j}(X)| \leq 1\ (i_j \geq 2)$ 时，则参照情形 $Y = X$，可得结论成立. 不妨设 $|\{u_1,u_2,\cdots,u_{h_3}\} \cap S_{i_j}(X)| \geq 2\ (i_j \geq 2)$，则 $h_2 \geq 2$，且由引理6 可知 $\{u_2,u_3,\cdots,u_{h_3-1}\} \subseteq S_1(Y) \cap N(y_k)$.

如果 $\frac{2b-1+k}{2} \geq k$，则由断言 1 不难看出，

$$\sigma_b(C[z_1,z_2),Y) \leq kh_2 + b(h_1+h') + b \leq k\,|C[z_1,z_2)|.$$

如果 $\frac{2b-1+k}{2} < k$，由断言 1 知，

$$\begin{aligned}\sigma_b(C[z_1,z_2),Y) &\leq (h_2(b-1)+b+k+1) + b(h'+h_1)\\ &= b(h'+h_1) + (h_2+1)\left(b-1+\frac{k+2}{h_2+1}\right)\\ &\leq b(h'+h_1) + \frac{3b+k-1}{3}(h_2+1)\\ &\leq \frac{2b+k-1}{2}\,|C[z_1,z_2)|,\end{aligned}$$

从而(2) 成立.

断言 3 $\sigma_b{}^1(Y) \leq b^*(n(Y)-1+k)$.

证明 当 $Y \neq X$ 时，显然 $\bigcap_{i=0}^{k} N(y_i) = \emptyset$，亦即 $\sigma_b{}^1(Y) = \sigma_b(Y)$. 从而由断言 2 及定理 1、2 证明中断言 3 的证明知，结论同样成立.

由断言 3 知 $\sigma_b^1(Y) \leq b^*(n(Y)-1+k)$，与题设矛盾.

从而，定理 3 成立.

[参考文献]

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Appications[M]. London: Macmillan Press, 1976.

[2] Liu Y, Tian F, Wu Z. Sequence concerning hamiltonicity of graphs[J]. J Nanjing Normal University: Natural Science, 1995, 18(1): 19－28.

[3] Wu Z, Xu X, Zhou X. The neighborhood intersections of essential sets and hamiltonicity of graphs[J]. Sys Sci and Math Scis, 1998, 11: 230－237.

[4] Ainouche A, Kouider M. Hamiltonism and partially square graphs[J]. Graphs and Combinatorics, 1999, 15(3): 257－265.

[责任编辑：陆炳新]