解非埃尔米特线性方程组的外推迭代法的收敛性

王　丽[1], 孙明军[2], 宋永忠[1]

(1. 南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)
(2. 南京师范大学中北学院, 江苏 南京 210046)

[摘要]　为探讨非埃尔米特线性方程组的迭代算法, 考虑非埃尔米特线性方程组的外推迭代法, 讨论其收敛性, 得到了两类外推算法的收敛性结果, 该结果表明, 在一定的参数范围内, 外推算法是收敛的. 并通过数值算例验证了理论结果的正确性.

[关键词]　线性方程组, 迭代方法, 外推法, 收敛性

[中图分类号] O241.6　[文献标识码] A　[文章编号] 1001-4616(2007)01-0001-05

Convergence of Extrapolated Method for Solving Non-Hermitian Linear Systems

Wang Li[1], Sun Mingjun[2], Song Yongzhong[1]

(1. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)
(2. College of Zhongbei, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

Abstract To explore the iterative algorithm, extrapolated method for solving non-Hermitian linear systems is considered, and its convergence is discussed. The convergence results for two classes of extrapolated algorithm is obtained, which show that in the given areas of the parameters the methods are convergent. The numerical results also illustrate the convergent theory.

Key words linear systems, iterative method, extrapolated method, convergence

0　引言

考虑 n 阶线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{1}$$

其中系数矩阵 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ 是非奇异矩阵, 右端常量和未知向量 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n$. 为了用迭代方法解线性方程组(1), 将系数矩阵 A 分裂为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{N},$$

其中 M 是非奇异的. 则解线性方程组(1)线性定常迭代法定义为[1-6]:

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

并称 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 为迭代矩阵.

对应于(2)的外推迭代法定义为:

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{T}_\omega\boldsymbol{x}^k + \omega\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{T}_\omega = (1-\omega)\boldsymbol{I} + \omega\boldsymbol{T}$$

为迭代矩阵, $\omega \in \boldsymbol{C}$ 为外推参数. 显然, 若 $\omega = 0$ 则 $\boldsymbol{T}_0 = \boldsymbol{I}$, 且

收稿日期: 2006-06-30 修回日期: 2006-08-26
基金项目: 国家自然科学基金(10371056)、江苏省重点项目(BK2006725)、江苏省高校自然科学基金(05KJB110062)资助项目.
作者简介: 王　丽(1965—), 女, 副教授, 主要从事计算数学的教学与研究. E-mail: wangli1@njnu.edu.cn
通讯联系人: 宋永忠(1958—), 教授, 博士生导师, 主要从事计算数学的教学与研究. E-mail: yzsong@njnu.edu.cn

$$x^{k+1} = x^{k}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

因此, 在本文的讨论中, 我们假定 $\omega \neq 0$.

外推迭代法(3)与方程组(1)是完全相容的. 外推法的作用是用来加速(2)收敛, 当(2)不收敛时, 一定条件下可以通过外推法使迭代法收敛.

关于外推迭代法(3)的收敛性, 文[7]中给出了以下结论.

定理1[7] 外推迭代法(3)收敛的充分必要条件是:

(1) $x_j < 1$, $j = 1, \cdots, n$, 且

$$0 < \omega < \min_j \frac{2(1-x_j)}{[(1-x_j)^2 + y_j^2]}, \tag{4}$$

或

(2) $x_j > 1$, $j = 1, \cdots, n$, 且

$$0 > \omega > \max_j \frac{2(1-x_j)}{[(1-x_j)^2 + y_j^2]}. \tag{5}$$

这里 $x_j + \mathrm{i}y_j$, $j = 1, 2, 3, \cdots, n$, 是 $\boldsymbol{T}$ 的全体特征值.

令

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*}{2} \text{ 和 } \boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^*}{2} \tag{6}$$

分别表示埃尔米特部分和反埃尔米特部分, 则

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{S} = (\alpha\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}) - (\alpha\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}) = (\alpha\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}) - (\alpha\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}). \tag{7}$$

在下文的讨论中我们假设 $\boldsymbol{H}$ 是正定的. 因此, 对任何正数 α, $\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H}$ 和 $\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S}$ 是非奇异的. 在分裂(7)的基础上, 可以定义两种类型的迭代法如下:

定义1 假设 $\boldsymbol{H}$ 正定矩阵, 参数 $\alpha \in \mathbf{R}$, 我们称

$$\boldsymbol{u}^{(k+1)} = (\alpha\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S})\boldsymbol{u}^{(k)} + \boldsymbol{b}_1, \quad \boldsymbol{b}_1 = (\alpha\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{u}^{(k+1)} = (\alpha\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H})\boldsymbol{u}^{(k)} + \boldsymbol{b}_2, \quad \boldsymbol{b}_2 = (\alpha\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S})^{-1}\boldsymbol{b} \tag{9}$$

分别为Ⅰ型和Ⅱ型迭代法, 其迭代矩阵分别记为 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{I}}$ 和 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{II}}$.

1 主要结论

为方便起见, 记

$$\gamma_M = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1} |\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}|, \qquad \gamma_m = \min_{\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1} |\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}|,$$

$$\eta_M = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1} |\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}|, \qquad \eta_m = \min_{\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1} |\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}|.$$

关于Ⅰ型迭代法, 有以下收敛定理.

定理2 假定 $\boldsymbol{H}$ 是正定的, 则当 ω 和 α 满足:

(1) $0 < \omega < \dfrac{2\left(1 + \dfrac{\alpha}{\gamma_M}\right)}{1 + \left(\dfrac{\eta_M}{\gamma_m}\right)^2}$, $\alpha > 0$;

(2) $0 < \omega < \dfrac{2\left(1 + \dfrac{\alpha}{\gamma_m}\right)}{1 + \left(\dfrac{\eta_M}{\gamma_m}\right)^2}$, $-\gamma_m < \alpha < 0$;

(3) $\dfrac{2\left(1 + \dfrac{\alpha}{\gamma_M}\right)}{1 + \left(\dfrac{\eta_M}{\gamma_m}\right)^2} < \omega < 0$, $\alpha < -\gamma_M$

三者之一时, Ⅰ型迭代法的外推迭代法

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = [(1-\omega)I + \omega(\alpha\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S})]\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega\boldsymbol{b}_1, \ k = 0, 1, 2, \cdots \tag{10}$$

是收敛的.

证明　设 $\lambda \in \boldsymbol{C}$ 是迭代矩阵 $(\alpha \boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}(\alpha \boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})$ 的任一特征值, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n$ 是其相应的满足 $\|\boldsymbol{x}\|_2=1$ 的特征向量. 根据特征值与特征向量的关系, 等式

$$(\alpha \boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}(\alpha \boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}=\lambda \boldsymbol{x}$$

成立, 即

$$(\alpha \boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}=\lambda(\alpha \boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})\boldsymbol{x}.$$

从而得到

$$\lambda=\frac{\alpha-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}}{\alpha+\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}.$$

所以, λ 的实部和虚部分别为

$$\mathrm{Re}(\lambda)=\frac{\alpha}{\alpha+\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}},\quad \mathrm{Im}(\lambda)=\frac{\mathbf{i}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}}{\alpha+\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}},$$

其中 $\mathbf{i}$ 是虚数单位. 则对情形 (1) 和 (2), 易见, $\mathrm{Re}(\lambda)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}<1$ 且

$$\min_{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}_1)}\frac{2(1-\mathrm{Re}(\lambda))}{(1-\mathrm{Re}(\lambda))^2+(\mathrm{Im}(\lambda))^2}\geqslant \min_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\frac{2\left(1-\dfrac{\alpha}{\alpha+\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}\right)}{\left(1-\dfrac{\alpha}{\alpha+\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}\right)^2+\dfrac{(\mathbf{i}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2}{(\alpha+\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^2}}$$

$$=\min_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\frac{2(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^2+2\alpha\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^2+(\mathbf{i}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2}=\min_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\frac{2\left(1+\dfrac{\alpha}{\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}\right)}{1+\dfrac{(\mathbf{i}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2}{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^2}}$$

$$\geqslant\begin{cases}\dfrac{2\left(1+\dfrac{\alpha}{\gamma_M}\right)}{1+\left(\dfrac{\eta_M}{\gamma_m}\right)^2}, & \text{情形 (1)},\\[2ex] \dfrac{2\left(1+\dfrac{\alpha}{\gamma_m}\right)}{1+\left(\dfrac{\eta_M}{\gamma_m}\right)^2}, & \text{情形 (2)}.\end{cases}$$

关于情形 (3), 易见 $\mathrm{Re}(\lambda)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}>1$ 且

$$\max_{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}_1)}\frac{2(1-\mathrm{Re}(\lambda))}{(1-\mathrm{Re}(\lambda))^2+(\mathrm{Im}(\lambda))^2}\leqslant \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\frac{2\left(1-\dfrac{\alpha}{\alpha+\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}\right)}{\left(1-\dfrac{\alpha}{\alpha+\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}\right)^2+\dfrac{(\mathbf{i}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2}{(\alpha+\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^2}}$$

$$=\max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\frac{2(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^2+2\alpha\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^2+(\mathbf{i}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2}$$

$$=\max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\frac{2\left(1+\dfrac{\alpha}{\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}\right)}{1+\dfrac{(\mathbf{i}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2}{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^2}}\leqslant\frac{2\left(1+\dfrac{\alpha}{\gamma_M}\right)}{1+\left(\dfrac{\eta_M}{\gamma_m}\right)^2}.$$

根据定理 1, 得知结论成立.

关于 II 型迭代法, 有以下收敛定理.

定理 3　假定 $\boldsymbol{H}$ 是正定的, 则当 ω 和 α 满足:

(1) $0<\omega<\dfrac{2\left(\dfrac{\alpha}{\gamma_M}+\dfrac{\eta_m^2}{\gamma_M^2}\right)}{1+\dfrac{\eta_m^2}{\gamma_M^2}}$, $0<\alpha<\gamma_m$,

$$(2)\ 0<\omega<\frac{2\left(\frac{\alpha}{\gamma_M}+\frac{\upsilon_m^2}{\gamma_M^2}\right)}{1+\frac{\upsilon_M^2}{\gamma_m^2}},\ \gamma_m\leqslant\alpha\leqslant\gamma_M,$$

$$(3)\ 0<\omega<\frac{2\left(\frac{\alpha}{\gamma_M}+\frac{\upsilon_M^2}{\gamma_m^2}\right)}{1+\frac{\upsilon_M^2}{\gamma_m^2}},\ \gamma_M<\alpha$$

三者之一时, II 型迭代法的外推法

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=[(1-\omega)\boldsymbol{I}+\omega(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})]\boldsymbol{x}^{(k)}+\omega\boldsymbol{b}_2,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{11}$$

是收敛的.

证明　设 $\lambda\in\boldsymbol{C}$ 是迭代矩阵 $(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})$ 的任一特征值, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^n$ 是其满足 $\|\boldsymbol{x}\|_2=1$ 的特征向量. 因此, 根据特征值和特征向量的关系, 等式

$$(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$$

成立, 即

$$(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})\boldsymbol{x}=\lambda(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{x},$$

从而有

$$\lambda=\frac{\alpha-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}{\alpha+\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}}.$$

则 λ 的实部和虚部分别为

$$\mathrm{Re}(\lambda)=\frac{\lambda+\bar{\lambda}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}{\alpha+\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}}+\frac{\alpha-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}{\alpha-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}}\right)=\frac{\alpha(\alpha-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})}{\alpha^2-(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2},$$

$$\mathrm{Im}(\lambda)=\frac{\lambda-\bar{\lambda}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}{\alpha+\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}}-\frac{\alpha-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}{\alpha-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}}\right)=\frac{-(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})(\alpha-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})}{\alpha^2-(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2},$$

由上式, 对情形(1)(2)和(3), 可得

$$\mathrm{Re}(\lambda)=\frac{\alpha(\alpha-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})}{\alpha^2-(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2}<1,$$

$$\begin{aligned}\min_{\lambda\in\sigma(T_{\mathrm{II}})}\frac{2(1-\mathrm{Re}(\lambda))}{(1-\mathrm{Re}(\lambda))^2+(\mathrm{Im}(\lambda))^2}&\geqslant\min_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\frac{2\left[1-\frac{\alpha(\alpha-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})}{\alpha^2-(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2}\right]}{\left[1-\frac{\alpha(\alpha-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})}{\alpha^2-(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2}\right]^2-\frac{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2(\alpha-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^2}{[\alpha^2-(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2]^2}}\\&=\min_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\frac{2[-(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2+\alpha\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}][\alpha^2-(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2]}{[-(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2+\alpha\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}]^2-(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2(\alpha-\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^2}\\&=\min_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\frac{2[\alpha\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2]}{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^2-(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2}=\min_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\frac{2\left[\frac{\alpha}{\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}-\frac{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2}{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^2}\right]}{1-\frac{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2}{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^2}}\\&=2+\min_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\frac{2\left[\frac{\alpha}{\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}}-1\right]}{1+\frac{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^2}{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^2}}.\end{aligned}$$

对情形(2)用倒数第二个表达式, 对情形(1)、(3), 用最后一个表达式取下界, 再根据定理 1易得结论成立.

2　数值例子

考虑定义在立方区域 $\Omega=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$, 具有常系数 q 且满足狄立克莱边界条件的三维对流扩散方程[8]

$$-(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+q(u_x+u_y+u_z)=f(x,y,z).$$

我们用七点中心差分离散所有项. 离散过程中, 三个方向我们采用一致步长 $h = \frac{1}{n+1}$, 且对未知量自然字典排序, 从而得到具有如下系数矩阵的线性方程组

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}_x \otimes \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{T}_y \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{T}_z,$$

其中, $\otimes$表示 Kronecker积, $\boldsymbol{T}_x$, $\boldsymbol{T}_y$ 和 $\boldsymbol{T}_z$分别为

$$\boldsymbol{T}_x = \mathrm{tridiag}(t_2,\ t_1,\ t_3),\quad \boldsymbol{T}_y = \mathrm{tridiag}(t_2,\ 0,\ t_3),\quad \boldsymbol{T}_z = \mathrm{tridiag}(t_2,\ 0,\ t_3),$$

且

$$t_1 = 1,\quad t_2 = (-1-r)/6,\quad t_3 = (-1+r)/6.$$

这里, $r = \frac{qh}{2}$是网格雷诺数. 易知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的埃尔米特部分和反埃尔米特部分分别为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_x \otimes \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{H}_y \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{H}_z,$$
$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_x \otimes \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{S}_y \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{S}_z,$$

其中

$$\boldsymbol{H}_x = \mathrm{tridiag}\left(\frac{t_2+t_3}{2},\ t_1,\ \frac{t_2+t_3}{2}\right),\quad \boldsymbol{H}_y = \boldsymbol{H}_z = \mathrm{tridiag}\left(\frac{t_2+t_3}{2},\ 0,\ \frac{t_2+t_3}{2}\right),$$

$$\boldsymbol{S}_\zeta = \mathrm{tridiag}\left(\frac{t_2-t_3}{2},\ 0,\ -\frac{t_2-t_3}{2}\right),\ \zeta \in \{x, y, z\}.$$

参考文[8]附录中的引理 7.1, 只要取 $\gamma_M = 1 + \cos(\pi/(n+1))$, $\gamma_m = 1 - \cos(\pi/(n+1))$, $\upsilon_M = r^* \cos(\pi/(n+1))$以及 $\upsilon_m^2 = 0$, 通过直接计算, 可以得到定理 2和定理 3关于本算例的具体形式.

表 1列出的部分数据进一步验证了我们的结论. 其中 R_h 和 R_s 分别表示迭代序列(10)和(11)的迭代矩阵的谱半径, 而 ω_h, α_h 和 ω_s, α_s 分别表示其相应 ω, α 的取值.

表 1　数值结果 ($\boldsymbol{n} = 10$, $\boldsymbol{q} = 1$)

Table 1　Numerical results

α_h	α_s	ω_h	ω_s	R_h	R_s
0.1	0.1	0.778 813	0.037 816	0.767 636	0.984 551
0.1	0.1	0.389 407	0.018 908	0.883 818	0.992 275
0.2	0.2	0.612 472	0.056 724	0.893 789	0.988 334
0.2	0.2	0.816 629	0.075 632	0.858 386	0.984 445
0.3	0.3	0.854 445	0.113 447	0.895 519	0.984 403
0.3	0.3	0.640 834	0.085 086	0.921 639	0.988 302
-0.004 051	0.004 051	0.333 449	0.001 654	0.665 195	0.994 914
-0.004 051	0.004 051	0.458 492	0.002 274	0.539 643	0.993 030
-0.016 203	0.016 203	0.527 961	0.015 711	0.463 344	0.958 035
-0.012 152	0.012 152	0.615 954	0.011 783	0.376 468	0.951 176
-0.008 101	0.008 101	0.703 948	0.007 855	0.290 303	0.960 562
-0.004 051	0.004 051	0.791 941	0.003 928	0.204 838	0.988 069

[参考文献]

[1] Eiermann M, Niethammer W, Varga R S. Acceleration of relaxation methods for non-Hermitian linear systems[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1992, 13(3): 979-991.

[2] Varga R S. Matrix Iterative Analysis[M]. Englewood Cliffs, N J: Prentice-Hall, 1962.

[3] 王丽. 用 USSOR迭代法求解最小二乘问题的收敛性[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2000, 23(3): 8-14.

[4] Wang Li. A note on semiconvergence of nonnegative splittings for singular matrix[J]. J Natural Science of Nanjing Normal University, 2000, 2(2): 16-19.

[5] 陈永林. 计算广义逆 $A_{T,S}^{(2)}$的基于函数插值的一族迭代法[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2005, 28(2): 6-13.

[6] 陈永林. 约束奇异半正定线性方程组的迭代解法[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2005, 28(3): 1-6.

[7] Cao Z. A convergence theorem on an extrapolated iterative method and its applications[J]. Appl Numer Math, 1998, 27: 203-209.

[8] Bai Z Z, Golub G H, Michael K Ng. Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 2003, 24: 603-626.

[责任编辑: 陆炳新]