一类 $p-$能量泛函径向极小元的 $C^{1,\alpha}$ 收敛性

刘红艳[1,2], 雷雨田[1]

(1. 南京师范大学数学与计算机科学学院数学研究所, 江苏 南京 210097)
(2. 盐城师范学院数学系, 江苏 盐城 224002)

[摘要] 研究了具非 S^1 值边界条件的 $p-$能量泛函的径向极小元的收敛性. 利用局部分析的技巧, 推出了能量泛函的正则性估计, 并由此得到泛函的径向极小元的零点分布在原点和单位圆周附近. 在此基础上, 利用 Euler方程解的正则性估计, 得到极小元的 $C^{1,\alpha}$收敛性和收敛速度的估计.

[关键词] 径向极小元, $p-$能量泛函, 收敛速度

[中图分类号] O175.2 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2007)01-0022-06

$C^{1,\alpha}$ Convergence of a Radial Minimizer of p-Energy Functional

Liu Hongyan[1,2], Lei Yutian[1]

(1. Institute of Mathematics, School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)
(2. Department of Mathematics, Yancheng Teachers College, Yancheng 224002, China)

Abstract The asymptotic behavior of the radial minimizer of a p-energy functional with non-S^1 Dirichlet boundary data is discussed. At first, by applying the local analysis, the authors deduce the regular estimate of the energy functional. Then, the zeros of the radial minimizer are located near the origin and the unit circle. Based on these results, the authors obtain the $C^{1,\alpha}$ convergence of the radial minimizer by establishing the corresponding estimate of the radial solution to the Euler system. Finally, the convergence rate is studied.

Key words radial minimizer, p-energy functional, convergence rate

0 引言

设 $B=\{x\in\mathbf{R}^2;\ |x|<1\}$, $S^1=\{x\in\mathbf{R}^3;\ x_1^2+x_2^2=1, x_3=0\}$, $S^2=\{x\in\mathbf{R}^3;\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$. 令 $g(x)=(M\frac{x}{r}, \sqrt{1-M^2})$, $x\in\partial B$, 其中 $M\in(0,1)$, $r=|x|$. 由直接方法, 我们知

$$E_\varepsilon(u,B)=\frac{1}{p}\int_B|\nabla u|^p\,dx+\frac{1}{2\varepsilon^p}\int_B u_3^2\,dx\quad(p>2)$$

在容许函数类 $W=\{u(x)=(\frac{x}{r}\sin f(r),\ \cos f(r))\in W^{1,p}(B,S^2);\ u|_{\partial B}=g\}$ 中的极小元存在, 我们称之为径向极小元.

当 $p=2$时, 泛函 $E_\varepsilon(u,B)$ 来自高能物理中一些简化模型的研究, 它可描述铁磁与反铁磁(ferromagnets and antiferromagnets)在二维时的稳态情形. 许多学者致力于研究上述泛函在函数类 $H_g^1(B,C)=\{u\in H^1(B,C);\ u|_{\partial B}=g\}$ 中极小元的渐近行为[1-3]. 当 $p>2$时, [4]讨论了泛函的径向极小元在

收稿日期: 2006-11-10 修回日期: 2006-12-18
基金项目: 国家自然科学基金(10571087)、江苏省普通高校自然科学研究计划(06KJB110056)资助项目.
作者简介: 刘红艳(1977—), 女, 硕士研究生, 主要从事偏微分方程的学习与研究. E-mail: jsyclhy@163.com
通讯联系人: 雷雨田(1971—), 博士, 副教授, 主要从事偏微分方程的教学与研究. E-mail: leiyutian@njnu.edu.cn

$\varepsilon \to 0$时的极限行为. 上述结果均假定 g 在 S^1 中取值.

当泛函 $E_\varepsilon(u, B)$ 中的补偿项 $\frac{1}{2\varepsilon^p}\int_B u_3^2 \mathrm{d}x$ 换成 $\frac{1}{4\varepsilon^p}\int_B (1-|u|^2)^2 \mathrm{d}x$ 时, 它是我们熟知的 p–Ginzburg–Landau泛函. 对此泛函的研究, 当 $p=2$时, 已有很多系统而深入的结果[5,6]. 特别是当g不在S^1中取值时, [6] 讨论了泛函的极小元的性质. 这一工作表明, 在 $|g|\neq 1$时, 能量泛函在边界附近会产生奇性.

本文考虑泛函 $E_\varepsilon(u, B)$ 在容许函数类 W 中的极小元当 $\varepsilon\to 0$时的极限行为. 此时, g不在 S^1 中取值. 此外, 径向极小元也许不惟一. 其中一类径向极小元可作为正则化泛函

$$E_\varepsilon^\tau(u, B) = \frac{1}{p}\int_B (|\nabla u|^2+\tau)^{p/2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon^p}\int_B u_3^2 \mathrm{d}x, \quad (\tau\in(0,1))$$

于 W 中的极小元 u_ε^τ 当 $\tau\to 0$时的极限而得到. 事实上, u_ε^τ 存在子列 $u_\varepsilon^{\tau_k}$, 使得

$$\lim_{\tau_k\to 0} u_\varepsilon^{\tau_k} = u_\varepsilon, \qquad 在 \quad W^{1,p}(B, S^2). \tag{1}$$

这里, u_ε便是$E_\varepsilon(u, B)$于W中的径向极小元. 这类径向极小元称为可正则化的极小元. 我们将在非 S^1值边界条件下, 证明可正则化的径向极小元在 $C^{1,\alpha}$ 意义下局部收敛到$\left(\frac{x}{|x|}, 0\right)$. 同时, 我们还将给出可正则化的极小元模的收敛速度的估计, 这一估计要优于[4] 中的相应结果(即[4] 中(5.2)式). 我们将证明如下的定理.

定理 设 u_ε是泛函 $E_\varepsilon(u, B)$的可正则化的径向极小元. 则当 $\varepsilon\to 0$时,

$$u_\varepsilon \to \left(\frac{x}{|x|}, 0\right), \qquad 在 \quad C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(B\setminus\{0\}, \mathbf{R}^2), \qquad \alpha\in(0, 1/2). \tag{2}$$

此外, 对 $B\setminus\{0\}$ 中的任一紧子集K, 存在与 ε无关的常数 $C>0$使得

$$\sup_K |u_{\varepsilon 3}| \leqslant C\varepsilon^p. \tag{3}$$

1 预备

记f_r为f的一阶广义导数, $V=\{f\in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(0, 1];\ r^{1/p}f_r,\ r^{(1-p)/p}\sin f\in L^p(0, 1),\ f(r)\geqslant 0,\ f(1)=\arcsin M\}$. 很明显, $V=\{f(r);\ u(x)=(\sin f(r)\frac{x}{r}, \cos f(r))\in W\}$. 此外, 不难证明 $V\subset\{f\in C[0, 1];\ f(0)=0\}$[4]. 记

$$E_\varepsilon(f, (a, b)) = \frac{1}{p}\int_a^b \left(f_r^2+\frac{\sin^2 f}{r^2}\right)^{p/2} r\mathrm{d}r + \frac{1}{2\varepsilon^p}\int_a^b (\cos f)^2 r\mathrm{d}r. \tag{4}$$

将 $u(x)=(\sin f(r)\frac{x}{r}, \cos f(r))\in W$代入$E_\varepsilon(u, B)$便得到$E_\varepsilon(u, B)=2\pi E_\varepsilon(f, (0, 1))$. 这表明 $u_\varepsilon(x)=(\sin f_\varepsilon(r)\frac{x}{r}, \cos f_\varepsilon(r))\in W$是 $E_\varepsilon(u, B)$的径向极小元当且仅当 $f_\varepsilon(r)\in V$是 $E_\varepsilon(f, (0, 1))$的极小元. 考察泛函 $E_\varepsilon(f, (0, 1))$的表达式, 我们不妨设f满足 $0\leqslant f\leqslant\frac{\pi}{2}$. 从变分法不难看出下面的结论.

命题 1.1 泛函 $E_\varepsilon(f, (0, 1))$ 的极小元$f_\varepsilon\in V$必满足如下的积分等式

$$\int_0^1 v^{(p-2)/2}\left[f_r\phi_r+\frac{1}{2r^2}(\sin 2f)\phi\right]^{p/2} r\mathrm{d}r = \frac{1}{2\varepsilon^p}\int_0^1 (\sin 2f)\phi r\mathrm{d}r,$$

$\forall\phi\in C_0^\infty[0, 1]$, 其中 $v=f_r^2+\frac{\sin^2 f}{r^2}$.

命题 1.2 存在不依赖于 $\varepsilon\in(0, 1)$的常数 $C>0$使得

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon, B)\leqslant C\varepsilon^{1-p}. \tag{5}$$

证明 令

$$f_1 = \arcsin M \quad \text{as} \quad r \in [1-\varepsilon, 1];$$

$$f_1 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon^{-1}[r-(1-2\varepsilon)]\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin M\right) \quad \text{as} \quad r \in [1-2\varepsilon, 1-\varepsilon];$$

$$f_1(r) = \frac{\pi}{2} \quad \text{as} \quad r \in [\varepsilon, 1-2\varepsilon];$$

$$f_1(r) = f_3(r) = f_3(s\varepsilon), \quad \text{as} \quad r \in [0, \varepsilon].$$

这里, $f_3(s)\frac{y}{|y|}$是泛函$F(u, B) = \int_B \left(\frac{1}{p}|\nabla u|^p + \frac{1}{2}u_3^2\right)dy$在$Y = \{f(s)\frac{y}{|y|} \in W^{1,p}(B, \mathbf{R}^2); f(1) = \frac{\pi}{2}, s = |y|\}$中的极小元. 首先令$x = y\varepsilon$, 容易看出

$$E_\varepsilon\left(f_2(r)\frac{x}{|x|}, B(0, \varepsilon)\right) = F\left(f_3(s)\frac{y}{|y|}, B\right)\varepsilon^{2-p} \leqslant C\varepsilon^{2-p}. \tag{6}$$

其次, 不难算出

$$E_\varepsilon\left(f_2\frac{x}{|x|}, B(0, 1-2\varepsilon)\setminus B(0, \varepsilon)\right) = \frac{2\pi}{p}\int_\varepsilon^{1-2\varepsilon} r^{1-p}\,dr \leqslant C\varepsilon^{2-p}. \tag{7}$$

当$r \in [1-2\varepsilon, 1-\varepsilon]$时, $\frac{r-(1-2\varepsilon)}{\varepsilon} \leqslant 1$. 因此,

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - \frac{r-(1-2\varepsilon)}{\varepsilon}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin M\right)\right] = \sin\left[\frac{r-(1-2\varepsilon)}{\varepsilon}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin M\right)\right]$$

$$\leqslant \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin M\right) = \cos\arcsin M = \sqrt{1-M^2}.$$

最后, 注意到u_ε是径向极小元, 我们便得

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon, B) \leqslant E_\varepsilon\left(\left(\frac{x}{|x|}\sin f_1, \cos f_1\right), B\right) \leqslant C\varepsilon^{2-p} + \frac{2\pi}{p}\left\{M^p\int_{1-\varepsilon}^1 r^{1-p}\,dr\right.$$

$$\left. + \int_{1-2\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left[\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin M}{\varepsilon}\right)^p + \frac{1}{r^p}\right] r\,dr\right\} + \frac{\pi(1-M^2)}{\varepsilon^p}\int_{1-2\varepsilon}^1 r\,dr \leqslant C\varepsilon^{1-p}.$$

注　从(5)我们可导出径向极小元在边界附近不含零点. 事实上, 对任给的$T \in (0, 1)$, 存在常数$C = C(T) > 0$(不依赖于ε)使得$\int_T^1 |f_\varepsilon'|^p\,dr \leqslant C\varepsilon^{1-p}$. 以此结合$f_\varepsilon \leqslant \frac{\pi}{2}$于$[0, 1]$便有$\|f_\varepsilon\|_{W^{1,p}([T,1], R)} \leqslant C\varepsilon^{(1-p)/p}$. 利用嵌入不等式我们得到, 对任意$r \in [T, 1]$, $|f_\varepsilon(r) - f_\varepsilon(1)| \leqslant C\varepsilon^{(1-p)/p}|r-1|^{1-1/p}$. 于是, 当$r \in (1-\rho\varepsilon, 1]$(其中$\rho = \left(\frac{\arcsin M}{2C}\right)^{p/(p-1)}$),

$$|f_\varepsilon(r)| \geqslant \arcsin M - C\rho^{1-1/p} = \arcsin M/2 \tag{8}$$

命题1.3　设ρ是(8)中的常数. 对任意$\zeta \in (0, 1/3)$, 存在适当小的常数$\varepsilon_0 > 0$以及与$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$无关的常数$C = C(\rho, \zeta) > 0$, 使得$E_\varepsilon(u_\varepsilon, B(0, 1-\zeta)) \leqslant C\varepsilon^{2-p}$.

证明　由(5)和中值定理我们知, 存在$\xi \in (\zeta/2, \zeta)$使得

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon, \partial B(0, 1-\xi)) \leqslant CE_\varepsilon(u_\varepsilon, B) \leqslant C\varepsilon^{1-p}, \tag{9}$$

其中C仅与ξ, ρ有关, 而与ε无关. 记$f = f_\varepsilon = |u_\varepsilon|$. 令

$$f_2(r) = f(r) \quad \text{as} \quad r \in [1-\xi, 1];$$

$$f_2(r) = \frac{1}{\varepsilon}[r-(1-\zeta)]\left[f(1-\zeta) - \frac{\pi}{2}\right] + f(1-\zeta), \quad \text{as} \quad r \in [1-\zeta-\varepsilon, 1-\zeta];$$

$$f_2(r) = \frac{\pi}{2} \quad \text{as} \quad r \in [\varepsilon, 1-\zeta-\varepsilon];$$

$$f_2(r) = f_3(r) = f_3(s\varepsilon), \quad \text{as} \quad r \in [0, \varepsilon].$$

这里, $f_3(s)\frac{y}{|y|}$是泛函$F(u, B)$在函数类Y中的极小元. 类似于(7)的计算, 我们有

$$E_\varepsilon\left(f_2\frac{x}{|x|}, B(0, 1-\zeta-\varepsilon)\setminus B(0, \varepsilon)\right) = \frac{2\pi}{p}\int_\varepsilon^{1-\zeta-\varepsilon} r^{1-p}\,dr \leqslant C\varepsilon^{2-p}. \tag{10}$$

另一方面, 从 (9) 可见

$$\frac{1}{\varepsilon^p}(\cos f(1-\zeta))^2 \leqslant C\varepsilon^{1-p}. \tag{11}$$

再结合中值定理蕴涵的

$$(\cos f(1-\zeta))^2 = \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin f(1-\zeta)\right)(1+\sin f(1-\zeta)) = \left(\frac{\pi}{2} - f(1-\zeta)\right)\cos\theta(1+\sin f(1-\zeta))$$

(其中 θ 是 $(1-\zeta, \frac{\pi}{2})$ 中的常数), 我们得到

$$\frac{1}{\varepsilon^p}\left(\frac{\pi}{2} - f(1-\zeta)\right) \leqslant C\varepsilon^{1-p}. \tag{12}$$

于是, 利用 (11) 和 (12), 有

$$J := \int_{1-\zeta-\varepsilon}^{1-\zeta} |\nabla r|^p\left(\frac{\frac{\pi}{2} - |f(1-\zeta)|}{\varepsilon}\right)^p r\,dr + \frac{1}{\varepsilon^p}\int_{1-\zeta-\varepsilon}^{1-\zeta}(\cos f(1-\zeta))^2 r\,dr$$
$$\leqslant C\varepsilon^{1-p}\int_{1-\zeta-\varepsilon}^{1-\zeta} r\,dr \leqslant C\varepsilon^{2-p}.$$

因此, 注意到当 $r\in[1-\zeta-\varepsilon, 1-\zeta]$ 时, $0\leqslant\frac{(1-\zeta)-r}{\varepsilon}\leqslant 1$, 我们得到

$$E_\varepsilon\left(f_2\frac{x}{|x|}, B(0, 1-\zeta)\setminus B(0, 1-\zeta-\varepsilon)\right)$$
$$= \int_{B(0,1-\zeta)\setminus B(0,1-\zeta-\varepsilon)}\left[\frac{1}{p}\left(|\nabla f_2|^2 + f_2^2\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2\right)^{p/2} + \frac{1}{2\varepsilon^p}(\cos f_2)^2\right]dx$$
$$\leqslant C\left(\int_{B(0,1-\zeta)\setminus B(0,1-\zeta-\varepsilon)}\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^p dx + J\right) \leqslant C(1+\varepsilon^{2-p}). \tag{13}$$

注意到 u_ε 是径向极小元, 我们有 $E_\varepsilon(u_\varepsilon, B)\leqslant E_\varepsilon(f_2\frac{x}{|x|}, B)$. 将 (6), (10) 和 (13) 代入其中便得 $E_\varepsilon(u_\varepsilon, B)\leqslant C(1+\varepsilon^{2-p}) + E_\varepsilon(u_\varepsilon, B\setminus B(0, 1-\zeta))$. 再注意到 $E_\varepsilon(u_\varepsilon, B\setminus B(0, 1-\zeta)\leqslant E_\varepsilon(u_\varepsilon, B\setminus B(0, 1-\zeta))$, 我们可得命题的结论.

一旦有了命题 1.3, 类似 [4] 中定理 1的证明我们可知: 对使 (8) 成立的 ρ, 存在不依赖于 ε 的常数 $h>0$, 使当 $x\in B(0, 1-\zeta)\setminus B(0, h\varepsilon)$ 时, $|u_\varepsilon(x)|\leqslant 2/3$. 结合 (8) 便知

$$|u_\varepsilon(x)| \geqslant \arcsin M/2, \ \forall x\in[B\setminus B(0, 1-\rho\varepsilon)]\cup[B(0, 1-\zeta)\setminus B(0, h\varepsilon)]. \tag{14}$$

类似于 [4] 命题 3.2的证明, 我们仍可得到: 对任意给定的 $T\in(0, 1/2)$, 存在 $t\in(0, T]$ 和不依赖于 ε 的常数 C 使得

$$E_\varepsilon(f_\varepsilon; (t, 1-t)) \leqslant C_0 := \frac{1}{p}\int_t^1 r^{1-p}\,dr + C\varepsilon^{[p]-p+1}. \tag{15}$$

这里 $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0)$, ε_0 适当小, $E_\varepsilon(f, (a, b))$ 的表达式如 (4) 所示. 经过与 [4] 中第 4节同样的讨论, 进而得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = \left(\frac{x}{|x|}, 0\right), \quad 在 \quad W^{1,p}(K, S^2). \tag{16}$$

2 定理的证明

类似于命题 1.1, 泛函 $E_\varepsilon^\tau(f; (0, 1))$ 的极小元 f_ε^τ 是如下的 Euler方程的古典解,

$$-(rA^{(p-2)/2}f_r)_r + d^2A^{(p-2)/2}\frac{\sin 2f}{2r} = \frac{r\sin 2f}{2\varepsilon^p}, \tag{17}$$

其中 $A = v+\tau$. 通过类似的讨论, 对可正则化的极小元 $u_\varepsilon(x) = (\frac{x}{r}\sin f_\varepsilon(r), \cos f_\varepsilon(r))$, (14) 与 (15) 依

然成立, 即对任何紧集 $K\in(0,1]$, 存在不依赖于 ε 和 τ 的常数 $C>0$ 使得

$$\arcsin M/3\leqslant f_\varepsilon^\tau(r)\leqslant\frac{\pi}{2},\quad r\in K,\tag{18}$$

$$E_\varepsilon^\tau(f_\varepsilon^\tau,K)\leqslant C.\tag{19}$$

命题 2.1　记 $f_\varepsilon^\tau=f$. 对任何紧集 $K\subset(0,1)$, 存在与 ε, τ 无关的常数 $C>0$ 使得 $\|f\|_{C^{1,\alpha}(K,R)}\leqslant C$, $\forall\alpha\leqslant1/2$.

证明　取 $R>0$ 充分小使 $K\subset\subset(2R,1-2R)$. 令 $\zeta\in C_0^\infty([0,1],[0,1])$ 满足 $\zeta=0$ 于 $[0,R]\cup[1-R,1]$, $\zeta=1$ 于 $[2R,1-2R]$ 且 $|\zeta_r|\leqslant C(R)$ 于 $(0,1)$. (17)式关于 r 微分, 再乘以 $f_r\zeta^2$ 并从 0 到 1 积分, 我们有

$$-\int_0^1(A^{(p-2)/2}f_r)_{rr}(f_r\zeta^2)\,\mathrm{d}r-\int_0^1(r^{-1}A^{(p-2)/2}f_r)_r(f_r\zeta^2)\,\mathrm{d}r$$
$$+\int_0^1(r^{-2}A^{(p-2)/2}\sin 2f)_r(f_r\zeta^2)\,\mathrm{d}r=\frac{1}{\varepsilon^p}\int_0^1(\cos 2f)f_r^2\zeta^2\,\mathrm{d}r.$$

分部积分并注意到 $\cos 2f=2\cos^2 f-1$, 我们可得

$$\int_0^1(A^{(p-2)/2}f_r)_r(f_r\zeta^2)_r\,\mathrm{d}r+\int_0^1A^{(p-2)/2}(f_r\zeta^2)_r\left[r^{-1}f_r-\frac{\sin 2f}{2r^2}\right]\mathrm{d}r$$
$$=\frac{2}{\varepsilon^p}\int_0^1(\cos^2 f)f_r^2\zeta^2\,\mathrm{d}r-\frac{1}{\varepsilon^p}\int_0^1f_r^2\zeta^2\,\mathrm{d}r.$$

记 $I=\int_R^{1-R}\zeta^2(A^{(p-2)/2}f_{rr}^2+(p-2)A^{(p-4)/2}f_r^2f_{rr}^2)\,\mathrm{d}r$. 利用 Young 不等式知, 对任意 $\delta\in(0,1)$,

$$I\leqslant\delta I+C(\delta)\int_R^{1-R}A^{p/2}\zeta_r^2\,\mathrm{d}r+\frac{2}{\varepsilon^p}\int_R^{1-R}(\cos^2 f)f_r^2\zeta^2\,\mathrm{d}r.\tag{20}$$

运用(18)所蕴涵的 $\sin f(r)>0$ 于 $r\in[R,1-R]$, 从(17)我们可看出

$$\frac{2}{\varepsilon^p}(\cos f)^2=4r^{-1}\cot f[-(A^{(p-2)/2}f_r)_r-r^{-1}A^{(p-2)/2}f_r+A^{(p-2)/2}\frac{\sin 2f}{2r}].$$

再次应用 Young 不等式, 知对任何 $\delta\in(0,1)$,

$$\frac{2}{\varepsilon^p}\int_R^{1-R}(\cos^2 f)f_r^2\zeta^2\,\mathrm{d}r\leqslant\delta I+C(\delta)\int_R^{1-R}A^{(p+2)/2}\zeta^2\,\mathrm{d}r.$$

以此代入(20)中并选取 δ 适当小, 便有

$$I\leqslant C\int_R^{1-R}A^{p/2}\zeta_r^2\,\mathrm{d}r+C\int_R^{1-R}A^{(p+2)/2}\zeta^2\,\mathrm{d}r.\tag{21}$$

为估计上式右端第二项, 我们在内插不等式

$$\|\Phi\|_{L^q}\leqslant C\|\Phi_r\|_{L^1}^{1-1/q}\|\Phi\|_{L^1}^{1/q},\quad q\in(1+\frac{2}{p},2).\tag{22}$$

中取 $\Phi=\zeta^{2/q}f_r^{(p+2)/q}$. 利用 Young 不等式我们可导出

$$\int_R^{1-R}f_r^{p+2}\zeta^2\,\mathrm{d}r\leqslant C(\int_R^{1-R}\zeta^{2/q}|f_r|^{(p+2)/q}\,\mathrm{d}r)\cdot(\int_R^{1-R}\zeta^{2/q-1}|\zeta_r||f_r|^{(p+2)/q}+\zeta^{2/q}|f_r|^{(p+2)/q-1}|f_{rr}|\,\mathrm{d}r)^{q-1}$$
$$\leqslant C(\int_R^{1-R}\zeta^{2/q}|f_r|^{(p+2)/q}\,\mathrm{d}r)(\int_R^{1-R}\zeta^{2/q-1}|\zeta_r||f_r|^{(p+2)/q}+\delta I+C(\delta)\int_R^{1-R}A^{\frac{p+2}{q}-\frac{p}{2}}\zeta^{4/q-2}\,\mathrm{d}r)^{q-1}\tag{23}$$

对任意 $\delta\in(0,1)$ 总成立. 注意到 $q\in(1+\frac{2}{p},2)$, 我们可对上式右端用 Holder 不等式. 于是, 结合(19)我们最终推出 $\int_R^{1-R}f_r^{p+2}\zeta^2\,\mathrm{d}r\leqslant\delta I+C(\delta)$. 以此代入(21)中并选取 δ 适当小, 我们得到 $\int_R^{1-R}A^{(p-2)/2}f_{rr}^2\zeta^2\,\mathrm{d}r\leqslant C$. 再结合(19), 便可见 $\|A^{p/4}\zeta\|_{H^1(R,1-R)}\leqslant C$. 注意到 $\zeta=1$ 于 K, 我们有 $\|A^{p/4}\|_{H^1(K)}\leqslant C$. 利用嵌入定理我们可知 对任何 $\alpha\leqslant1/2$, 均有 $\|A^{p/4}\|_{C^\alpha(K)}\leqslant C$. 由此易见命题成立.

定理中(2)的证明

对任意紧集合 $K\subset B\setminus\{0\}$, 应用 命题 2.1 可知, 对任何 $\beta\in(0,1/2)$ 均有

$$\|u_\varepsilon^\tau\|_{C^{1,\beta}(K)}\leqslant C=C(K),\tag{24}$$

其中常数 C 不依赖于 ε, τ. 运用 (24) 和嵌入定理, 我们可见, 对任意 ε 和某个 $\beta_1<\beta$, 存在 $w_\varepsilon^*\in C^{1,\beta_1}(K,S^2)$ 和 τ 的子列 τ_k 使当 $k\to\infty$ 时,

$$u_\varepsilon^{\tau_k}\to w_\varepsilon^*,\quad \text{在}\quad C^{1,\beta_1}(K,S^2). \tag{25}$$

以此结合 (1) 我们可知 $w_\varepsilon^*=u_\varepsilon$. 再次运用 (24) 和嵌入定理, 我们还可见, 对某个 $\beta_2<\beta$, 存在 $w^*\in C^{1,\beta_2}(K,S^2)$ 和 τ_k 的子列 τ_m 使当 $m\to\infty$ 时,

$$u_{\varepsilon_m}^{\tau_m}\to w^*,\quad \text{在}\quad C^{1,\beta_2}(K,S^2). \tag{26}$$

注意到 (16), 我们知 $w^*=(\frac{x}{|x|},0)$. 记 $\gamma=\min(\beta_1,\beta_2)$. 则当 $m\to\infty$ 时, 利用 (25) 和 (26) 我们便导出

$$\|u_{\varepsilon_m}-(\frac{x}{|x|},0)\|_{C^{1,\gamma}(K,S^2)}\leqslant\|u_{\varepsilon_m}-u_{\varepsilon_m}^{\tau_m}\|_{C^{1,\gamma}(K,S^2)}+\|u_{\varepsilon_m}^{\tau_m}-(\frac{x}{|x|},0)\|_{C^{1,\gamma}(K,S^2)}<o(1). \tag{27}$$

注意到极限 $(\frac{x}{r},0)$ 是惟一的, 我们知 (27) 不仅对子列成立, 而且对 u_ε 也成立. 证毕.

定理中 (3) 的证明

记 $f=f_\varepsilon^\tau$, $\phi=\frac{\cos f}{\varepsilon^p}$. 在 (17) 两端乘以 $\sin f$ 便得

$$-(rA^{(p-2)/2}(\sin f)f_r)_r+r\cos fA^{(p-2)/2}(A-\tau)=r(\sin f)^2\phi. \tag{28}$$

将 $\phi_r=\frac{-\sin f}{\varepsilon^p}f_r$ 代入 (28) 我们有

$$\varepsilon^p(rA^{(p-2)/2}\phi_r)_r+r\cos fA^{(p-2)/2}(A-\tau)=r(\sin f)^2\phi.$$

假设 $\phi(r)$ 在 $(0,1)$ 的内点 r_0 处取到最大值. 则 $\phi_r(r_0)=0$, $\phi_{rr}(r_0)\leqslant0$. 另一方面, (18) 蕴涵 $(\sin f)^2\geqslant C_1>0$, 这里 C_1 不依赖于 ε 和 τ. 于是, 从命题 2.1 可推出

$$\phi(r)\leqslant\phi(r_0)\leqslant\frac{1}{C_1}A^{(p-2)/2}(A-\tau)|_{r=r_0}\leqslant C.$$

这包含 $\sup_K|\cos f|\leqslant C\varepsilon^p$, 其中 $C>0$ 不依赖于 ε 和 τ, K 是 $(0,1)$ 中任一紧集. 令 $\tau\to0$ 并利用 (25) 我们最终可得 $\sup_K|\cos f_\varepsilon|\leqslant C\varepsilon^p$. 证毕.

[参考文献]

[1] Komineas S, Papanicolaou N. Vortex dynamics in two-dimensional antiferromagnets[J]. Nonlinearity, 1998, 11: 265-290.

[2] Papanicolaou N, Spathis P N. Semitopological solutions in planar ferromagnets[J]. Nonlinearity, 1999, 12: 285-302.

[3] Hang F B, Lin F H. Static theory for planar ferromagnets and antiferromagnets[J]. Acta Math Sinica English Series, 2001, 17: 541-580.

[4] Lei Y T. Asymptotic analysis of the radial minimizers of an energy functional[J]. Methods Appl Anal, 2003, 10: 67-80.

[5] Bethuel F, Brezis H, Helein F. Ginzburg-Landau Vortices[M]. Boston: Birkhauser, 1994.

[6] 雷雨田. 具变系数的 Ginzburg-Landau 泛函的径向极小元[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2004, 27(1): 1-6.

[7] Andre N, Shafrir I. Minimization of a Ginzburg-Landau type functional with nonvanishing Dirichlet boundary condition[J]. Calc Var PDE, 1998, 7: 191-217.

[责任编辑: 陆炳新]