一类退化椭圆型方程 Dirichlet问题的解的高阶正则性

何 跃[1,2]

(1.中山大学数学与计算科学学院,广东 广州 510275)
(2.南京师范大学数学与计算机科学学院数学研究所,江苏 南京 210097)

[摘要] 由于退化椭圆型方程的研究与双曲空间中极小图的 Dirichlet问题,以及曲面的无穷小等距形变刚性问题的密切联系,在有界周期域上讨论了一类退化椭圆型方程 Dirichlet问题的解的高阶正则性,利用泛函分析方法得到一个涉及解的高阶正则性的充分必要条件.

[关键词] 退化椭圆型方程,退化抛物型方程,有界周期区域,Dirichlet问题,极小图,刚性问题,解的高阶正则性

[中图分类号] O175.2 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2007)01-0028-05

High Order Regularity of Solutions to the Dirichlet Problem for a Class of Degenerate Elliptic Equations

He Yue[1,2]

(1. School of Mathematics and Computing Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)
(2. Institute of Mathematics, School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract: Since the study of degenerate elliptic equation is very closely related to the Dirichlet problem for minimal graphs in hyperbolic space and the rigidity problem arising from infinitesimal isometric deformation of surfaces, we discuss the high order regularity of solutions to the Dirichlet problem for a class of degenerate elliptic equations in a bounded periodic domain. By the methods of functional analysis, we get a sufficient and necessary condition, which concerns the high order regularity of solutions for such problems.

Key words: degenerate elliptic equations, degenerate parabolic equations, bounded periodic domain, Dirichlet problem, minimal graphs, rigidity problem, high order regularity of solutions

0 引言

林芳华[1]在研究双曲空间中极小图的 Dirichlet问题时,讨论了问题

$$y\left(\Delta u-\frac{u_{x_i}u_{x_j}}{1+|\nabla u|^2}u_{x_ix_j}\right)-nu_y=0,\quad (x,y)\in B_1^+(0),$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad |x|\leqslant 1,$$

的正则性,其中 $i,j=1,\cdots,n-1$,重复指标表示求和,而 $B_1^+(0)=\{(x,y)\in\mathbf{R}_+^n \mid |x|\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$. Daskalopoulos等人[2,3]在研究多孔介质方程的 Cauchy问题时,把问题转化为一类退化抛物型方程的自由边界问题,为了研究解的正则性,他们在半空间 $\{x\geqslant 0\}\subseteq\mathbf{R}^2$ 上讨论如下的退化抛物型方程

$$f_t=x(f_{xx}+f_{yy})+\nu f_x+g$$

的正则性,其中 $\nu>0$为常数,且 f在边界 $\{x=0\}$上没有附加条件. 近来人们在研究几何中无穷小等距形

收稿日期: 2006-07-23 修回日期: 2006-09-15
基金项目: 国家自然科学基金面上基金(10571087)、江苏省教育厅自然科学基金(04KJB110062)资助项目.
作者简介: 何 跃(1970—),博士后,主要从事非线性偏微分方程和微分几何的教学与研究. E-mail: heyu@njnu.edu.cn

变刚性问题时遇到了一类退化椭圆型方程[4]

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k})\Omega^{ij}\nabla_{ij}\zeta + 2(\nabla z, \nabla\zeta) = 0 \quad \text{在 } D \text{ 中},$$

其中 $D\subset \mathbf{R}^2$ 是单位圆盘; $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 是两个单位向量, 它们的内积 $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k})$ 可等于零或变号; (Ω^{ij}) 是一个正定矩阵; ∇_{ij} 表示二阶共变导数; ∇ 表示梯度.

上面提到的几类方程的共同之处在于: 它们的线性化形式是类型十分相近的退化椭圆型或抛物型方程. 由于这几类方程具有很强的几何或物理及力学背景, 而且它们的线性化形式的类型具有一定的普遍性(见[5], [6], [7], [8]), 因此需要专门对其进行研究.

本文致力于在有界周期区域 $\Omega = \{(x, y)\in \mathbf{R}^2_+ \mid -\pi\leqslant x\leqslant \pi, 0< y< 1\}$ 上, 研究一类具有上述几何背景的退化椭圆型方程 Dirichlet问题

$$\begin{cases} Lu \equiv y(\omega u_{xx} + u_{yy} + cu) + au_x - mu_y = f, \text{在 } \Omega \text{中} (m\in \mathbf{N}), \\ u \text{ 关于 } x \text{ 是以 } 2\pi \text{ 为周期的函数}, \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

的解的高阶正则性. 为了简单起见, 本文约定:

(1) 文中的大写字母 C 均表示有界正常数, 以后凡是与 $s(s\in \mathbf{Z}^+)$ 有关的常数, 均用 C_s 来表示, 但不同行出现的 C 或 C_s 可能彼此不同;

(2) ω, a, b, c, f 关于 x 都是以 2π 为周期的函数, 且 $\omega, a, b, c\in C^\infty(\Omega)$, $c\leqslant 0$, 且 $\omega\geqslant C_* > 0$ 及 $b(x, 0) > \dfrac{1}{2}$;

(3) $u^{(k)} := \partial_y^k u \quad (k\in \mathbf{Z}^+)$ 表示 u 对 y 的 k 阶偏导数;

(4) $\gamma_k u := \partial_y^k u\mid_{y=0} \quad (k\in \mathbf{Z}^+)$ 表示 u 在边界 $\{-\pi\leqslant x\leqslant \pi, y = 0\}$ 上的 k 阶迹, 或表示 $\partial_y^k u$ 在迹的意义下取值;

(5) 用 L^2, H^k, C^1 及 C^∞ 分别简记函数空间 $L^2(\Omega), H^k(\Omega)(k\in \mathbf{Z}^+), C^1(\Omega)$ 及 $C^\infty(\Omega)$; 用 $\|\cdot\|_0$ 简记函数空间 $L^2(\Omega)$ 中的范数 $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, 用 $\|\cdot\|_k$ 简记函数空间 $H^k(\Omega)$ 中的范数 $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$.

1　主要结果

下面我们叙述本文的主要结果:

定理 1.1　若 $f\in H^{m+l}(l\in \mathbf{N})$, 则 (i) 问题 (1) 的解 $u\in H^{m+l+1}$ 当且仅当

$$f^{(m)}(x, 0) - m\sum_{k=1}^{m-1} C_{m-1}^k\Big[\omega^{(m-1-k)}(x, 0)(\gamma_k u)_{xx} + c^{(m-1-k)}(x, 0)\gamma_k u + \frac{a^{(m-k)}(x, 0)}{m-k}(\gamma_k u)_x\Big] - a(x, 0)(\gamma_m u)_x = 0 \tag{2}$$

(ii) 若 $f\in C^\infty$, 则问题 (1) 的解 $u\in C^\infty$ 当且仅当 (2) 在通常意义下成立.

注记 1.2　事实上, $\gamma_k u(k\in \mathbf{Z}^+, k\leqslant m)$ 均可通过 $Lu = f$, 由其系数 ω, a, c 及 f 在边界 $\{-\pi\leqslant x\leqslant \pi, y = 0\}$ 上的各阶导数惟一确定. 所以 (2) 实际上给出了 (1) 的 $H^{m+l+1}(l\in \mathbf{N})$ 解存在的一个充分必要条件, 即要求 $Lu = f$ 的系数 ω, a, c 及 f 在边界 $\{-\pi\leqslant x\leqslant \pi, y = 0\}$ 上的各阶导数满足一个相容性条件.

2　定理 1.1的证明

首先, 我们叙述两个后面要用到的正则性结果. 考虑

$$\begin{cases} y(\omega u_{xx} + u_{yy} + cu) + au_x + bu_y = f, \text{在 } \Omega \text{中}, \\ u \text{ 关于 } x \text{ 是以 } 2\pi \text{ 为周期的函数}, \\ u(x, 1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

定理 2.1　若 $f\in H^k(k\in \mathbf{Z}^+)$, 则 (3) 的解 $u\in H^{k+1}$, 且 $\|u\|_{k+1}\leqslant C_k\|f\|_k$. 进一步, 若 $f\in C^\infty$, 则 $u\in C^\infty$.

定理 2.2　设 u 是 (1) 的解. 若 $f\in H^k$, 则

(i) 在 $k\in \mathbf{Z}^+, k\leqslant m$ 情形, $u\in H^{k+1}$, 且 $\|u\|_{k+1}\leqslant C_k\|f\|_k$;

(ii) 在 $k\in \mathbf{N}$, $k>m$ 情形, $\partial_x^s u\in H^{m+1}$, $\forall s\in \mathbf{Z}^+$, $s\leqslant k-m$; 进一步, 若 $f\in C^\infty$, 则 $\partial_x^i u\in H^{m+1}$ ($i\in \mathbf{Z}^+$), 即 $\partial_y^j u$ ($j\in \mathbf{Z}^+$, $j\leqslant m+1$) 关于 x 属于 C^∞.

注记 2.3　文[9]与本文所讨论的方程类型十分类似, 具体说: 本文是用"$-m$"代替前者的系数项"b", 且仅比前者多了一系数项"ω". 总之, 可完全仿照文[9]中定理 3.1和定理 4.1的论证, 分别得定理 2.1和定理 2.2的结论. 另外, 本文只讨论解的高阶正则性问题. 实际上, 也可重复文[9]的整个论证而得到与之相同的适定性结果, 在此不一一赘述.

引理 2.4　设函数 $h\in L^2$ 满足 $h_y\in L^2$, 则 $h(x,0)=0$ (在迹的意义下) 当且仅当 $h/y\in L^2$.

证明　"$\Rightarrow$": 1) 先证: 若 $h_y\in L^2$, 且 $h(x,0)=h(x,1)=0$, 则 $h/y\in L^2$. 令 $X=\{h\in L^2 \mid h_y\in L^2, h(x,0)=h(x,1)=0\}$. 对于任意 $h\in C^1\cap X$, 则有

$$\iint_\Omega\left|\frac{h}{y}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1\frac{h^2}{y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{h^2}{y}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{2hh_y}{y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1\frac{2hh_y}{y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\iint_\Omega\left|\frac{h}{y}\right|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+2\iint_\Omega|h_y|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

于是, 有

$$\iint_\Omega\left|\frac{h}{y}\right|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant 4\iint_\Omega|h_y|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

即 $\|h/y\|_{L^2}\leqslant 2\|h_y\|_{L^2}$, $\forall h\in X$. 由于 $C^1\cap X$ 在 X 中是稠密的, 所以结论显然成立.

2) 对 $h(x,1)\neq 0$ 情形, 定义截断函数 α 满足

$$\alpha\in C^\infty([0,1]),\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1,\quad 且\ \alpha(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{3}\\ 0, & \frac{2}{3}\leqslant y\leqslant 1\end{cases}\tag{4}$$

显然 $(1-\alpha)h/y\in L^2$, 再由 1) 的结论可得 $\alpha h/y\in L^2$. 于是 $h/y=\alpha h/y+(1-\alpha)h/y\in L^2$.

"$\Leftarrow$": 3) 先证: 若 $h, h_y, h/y\in L^2$, 且 $h(x,1)=0$, 则 $h(x,0)=0$. 令 $Y=\{h\in L^2\mid h_y, h/y\in L^2$, 且 $h(x,1)=0\}$. 对于任意 $h\in C^1\cap Y$, 则有

$$\int_{-\pi}^{\pi}h^2(x,\varepsilon)\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\int_{-\pi}^{\pi}\frac{h^2(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\mathrm{d}x=\varepsilon\int_{-\pi}^{\pi}-\frac{h^2(x,y)}{y}\Big|_\varepsilon^1\mathrm{d}x$$

$$=\varepsilon\int_{-\pi}^{\pi}\int_\varepsilon^1\left(\frac{h^2}{y}-\frac{2hh_y}{y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant 2\varepsilon\int_{-\pi}^{\pi}\int_\varepsilon^1\left(\frac{h^2}{y^2}+h_y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

即可得 $\|h(\cdot,\varepsilon)\|_{L^2[-\pi,\pi]}\leqslant 2\varepsilon^{1/2}(\|h/y\|_0+\|h_y\|_0)$. 于是

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|h(\cdot,\varepsilon)\|_{L^2[-\pi,\pi]}=0$$

故 $h(x,0)=0$. 由于 $C^1\cap Y$ 在 Y 中是稠密的, 所以结论成立.

4) 对 $h(x,1)\neq 0$ 情形, 有 $h=\alpha h+(1-\alpha)h$, 其中 α 是由(4)定义的截断函数. 由 3) 的结论可得 $(\alpha h)(x,0)=0$, 于是有 $h(x,0)=(\alpha h)(x,0)=0$.

引理 2.5　问题(1)的解 u 满足

$$y[u^{(m+2)}+(\omega u_{xx}+cu)^{(m)}]=I+J.\tag{5}$$

其中

$$\begin{cases}I=f^{(m)}-m\sum\limits_{k=1}^{m-1}C_{m-1}^k[\omega^{(m-1-k)}u_{xx}^{(k)}+c^{(m-1-k)}u^{(k)}+\dfrac{a^{(m-k)}}{m-k}u_x^{(k)}]-au_x^{(m)},\\ J=-[\omega^{(m-1)}u_{xx}+c^{(m-1)}u+a^{(m)}u_x].\end{cases}\tag{6}$$

证明　方程 $Lu=f$ 两端关于变量 y 求 m 阶弱导数可得

$$y[u^{(m+2)}+(\omega u_{xx}+cu)^{(m)}]+m(\omega u_{xx}+cu)^{(m-1)}+(au_x)^{(m)}=f^{(m)},$$

再经计算可得结果.

注记 2.6　方程 $Lu=f$ 的系数 ω, a, c 和 f, 以及(1)的解 u 在迹的意义下满足(2), 可表示为 $\gamma_0(I)=0$.

有了上面的准备工作, 下面就来证定理 1.1.

定理 1.1的证明　显然, 定理 1.1的 (ii) 可由 (i) 以及 Sobolov嵌入定理得到. 下面仅证 (i) 的结论.

由 $f \in H^{m+l}(l \in \mathbf{N})$ 及定理 2.2可得 $\partial_x^s u \in H^{m+1}(s \in \mathbf{Z}, s \leqslant l)$. 显然, $(\omega u_{xx} + cu)^{(m)} \in L^2$. 再由 (6) 易知 $(I + J)_y \in L^2$ 及 $\gamma_0(J) = 0$.

"$\Leftarrow$" 之证: 1) $l = 1$的情形, 证 $u \in H^{m+2}$. 此时 $u_x \in H^{m+1}$, 所以只须证 $u^{(m+2)} \in L^2$. 由 (2) 即 $\gamma_0(I) = 0$, 及引理 2.4可得 $u^{(m+2)} + (\omega u_{xx} + cu)^{(m)} \in L^2$. 由于 $(\omega u_{xx} + cu)^{(m)} \in L^2$, 所以 $u^{(m+2)} \in L^2$. 再由 $u_x \in H^{m+1}$ 可得 $u \in H^{m+2}$.

2) $l = 2$的情形, 证 $u \in H^{m+3}$. 对 $Lu = f$两端关于 x求弱导数, 经化简可得 $Lu_x = f$. 其中 $L \equiv y(\omega\partial_x^2 + \partial_y^2 + c) + a\partial_x - m\partial_y$, 而 $a = y\omega_x + a$, $f = f_x - yc_x u - a_x u_x$. 显然 u_x 是问题

$$\begin{cases} Lv = f, \text{在 } \Omega \text{中}, \\ v \text{关于 } x \text{ 是以 } 2\pi \text{为周期的函数}, \\ v(x, 0) = v(x, 1) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

的解. 显然, 由 f, $u \in H^{m+2}$ 可得 $f \in H^{m+1}$. 于是由定理 2.2可得 $u_{xx} = \partial_x u_x \in H^{m+1}$.

另外, 对 (5) 两端关于 x求弱导数可得

$$y\{(u_x)^{(m+2)} + [\omega(u_x)_{xx} + c(u_x)]^{(m)}\} = I + J,$$

其中 $I = I_x - y(\omega_x u_{xx} + c_x u)^{(m)}$, $J = J_x$. 显然, $\gamma_0(J) = 0$. 由 $u_{xx} \in H^{m+1}$ 可得 $u_{xx}{}^{(m)} \in H^1$, 于是可知 $\gamma_0(y u_{xx}{}^{(m)}) = 0$. 因此, 易验证: 方程 $Lv = f$的系数与 (7) 的解 u_x 在迹的意义下满足

$$\gamma_0(I) = \gamma_0(I_x) - \gamma_0[y(\omega_x u_{xx} + c_x u)^{(m)}] = [\gamma_0(I)]_x = 0.$$

由于方程 $Lv = f$的类型, 以及系数与 (7) 的解所满足的各种条件均未改变, 于是由 1) 的结论可得 $u_x \in H^{m+2}$. 然后, 再对方程 $Lu = f$两端关于 y求 $m + 1$阶弱导数, 并经计算可得

$$Lu^{(m+1)} = f, \tag{8}$$

其中

$$L \equiv y(\omega\partial_x^2 + \partial_y^2 + c) + a\partial_x + \partial_y,$$

$$f = f^{(m+1)} - \sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^k [y\omega^{(m+1-k)} u_{xx}^{(k)} + yc^{(m+1)} u^{(k)} + a^{(m+1-k)} u_x^{(k)}] - (m+1)(\omega u_{xx} + cu)^{(m)}.$$

由 (8) 可得

$$L[\alpha u^{(m+1)}] = \alpha f + 2y\alpha_y u^{(m+2)} + (y\alpha_{yy} + \alpha_y) u^{(m+1)} := F, \tag{9}$$

其中 α是由 (4) 定义的截断函数. 此时, 由 $f \in H^{m+2}$ 可得 $f^{(m+1)} \in H^1$. 由于 $u \in H^{m+2}$ 及 $u_x \in H^{m+2}$, 所以 $F \in H^1$. 再由定理 2.1可得 $\alpha u^{(m+1)} \in H^2$. 由于 $Lu = f$仅在边界 $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi, y = 0\}$ 上退化, 因此 $u^{(m+1)} \in H^2$. 又由 $u_x \in H^{m+2}$ 可知 $u \in H^{m+3}$.

3) $l \geqslant 3 (l \in \mathbf{N})$ 的情形, 按照前面的论证方式依次进行下去 (或使用归纳法), 最后可得 $u \in H^{m+l+1} (l \in \mathbf{N})$.

"$\Rightarrow$" 之证: 首先, 由 (9) 可得

$$\begin{aligned} &\omega[\alpha y u^{(m+1)}]_{xx} + [\alpha y u^{(m+1)}]_{yy} + c[\alpha y u^{(m+1)}] \\ &= \alpha[f - a u_x^{(m+1)}] + (\alpha + 2\alpha_y y) u^{(m+2)} + (2\alpha_y + \alpha_{yy} y) u^{(m+1)} := G. \end{aligned}$$

其次, 由 $f \in H^{m+l} \subseteq H^{m+1}$ 及 $u \in H^{m+l+1} \subseteq H^{m+2} (l \in \mathbf{N})$ 易知 $G \in L^2$. 于是由椭圆型方程解的正则性可得 $\alpha y u^{(m+1)} \in H^2$. 同样由于 $Lu = f$仅在边界 $\{-\pi \leqslant x \leqslant \pi, y = 0\}$ 上退化, 因此 $yu^{(m+1)} \in H^2$. 从而 $[yu^{(m+1)}]_{yy} \in L^2$. 另外, 由 $u \in H^{m+2}$ 可知 $u^{(m+2)} \in L^2$. 因此, $[yu^{(m+2)}]_y = yu^{(m+3)} + u^{(m+2)} = [yu^{(m+1)}]_{yy} - u^{(m+2)} \in L^2$. 同样地, 由 $yu^{(m+1)} \in H^2$可得 $yu_{xx}^{(m+1)} \in L^2$. 然后, 再由 $u \in H^{m+2}$易证 $[y(\omega u_{xx} + cu)^{(m)}]_y = y(\omega u_{xx} + cu)^{(m+1)} + (\omega u_{xx} + cu)^{(m)} \in L^2$.

显然, 由 $u \in H^{m+2}$, 易验证 $u^{(m+2)} + (\omega u_{xx} + cu)^{(m)} \in L^2$. 于是, 由引理 2.4可得 $\gamma_0(I + J) = 0$. 又由 $\gamma_0(J) = 0$可知 $\gamma_0(I) = 0$, 即 (2) 成立.

[参考文献]

[1] Lin F H. On the Dirichlet problem for minimal graphs in hyperbolic space[J]. Invent Math, 1989, 96: 592-612.

[2] Daskalopoulos P, Hamilton R. Regularity of the free boundary for the n-dimensional porous medium equation[J]. J Amer Math Soc, 1998, 11: 899-965.

[3] Daskalopoulos P, Hamilton R, Lee K. All time C^{∞}-Regularity of the interface in degenerated diffusion: a geometric approach [J]. Duke Math J, 2001, 108: 295-327.

[4] Hong J X. Recent developments of realization of surfaces in $\mathbf{R}^3$ [J]. Studies in Advanced Mathematics, 2001, 20: 47-62.

[5] Oleinik O A, Radkevič E V. Second Order Equations with Nonnegative Characteristic Form [M]. New York: American Mathematical Society, Rhode Island and Plenum Press, 1973.

[6] Chen Z C. The Keldys-Fichera boundary value problem for a class of nonlinear degenerate elliptic equations[J]. Acta Math Sinica, 1993, 9(2): 203-211.

[7] 雷雨田. 具变系数的 Ginzburg-landau泛函径向极小元 [J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2004, 27(1): 1-6.

[8] 雷雨田. 一类泛函极小元的 H^2 收敛性 [J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2004, 27(3): 9-11.

[9] 何跃. 一类二阶退化半线性椭圆型方程边值问题的适定性及解的正则性 [J]. 数学年刊 A 辑, 2004, 25(2): 225-242.

[责任编辑: 陆炳新]