第 30卷第 2期
2007年 6月
南京师大学报 (自然科学版)
JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition)
Vol. 30 No. 2
Jun, 2007

变时滞神经网络指数稳定性条件

蒋秋浩[1,2], 曹进德[2]

(1. 中国药科大学数学系,江苏 南京 210009)
(2. 东南大学数学系,江苏 南京 210096)

[摘要] 基于时滞细胞神经网络 (DCNNs)在图像处理等领域的广泛应用,有关它的研究引起了越来越多学者和专家的关注. 早期 DCNNs稳定性的结果大多由网络权矩阵的分量构成的代数不等式来表示. 运用 Lyapunov-Krasovskii泛函的方法,研究了 DCNNs的指数稳定性,所得充分条件以矩阵的 (半)正定形式出现,在实际应用中更加便于验证. 与文献中的结果相比较,所得判据适用范围更广.

[关键词] 细胞神经网络,指数稳定性,变时滞
[中图分类号] O175 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2007)02-0006-05

Global Exponential Stability of Delayed Neural Networks

Jiang Qiuhao[1,2], Cao Jinde[2]

(1. Department of Mathematics, China Pharmaceutical University, Nanjing 210009, China)
(2. Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: In recent years, the study of cellular neural networks with delay (DCNNs) draws the attention of more and more specialists due to its extensive application in the fields of image processing etc. The early results on stability of DCNNs are usually represented by the elements of weight matrices of the network. In this paper, by employing the Lyapunov-Krasovskii method, global exponential stability of DCNNs is investigated, and sufficient conditions are obtained in the form of matrix with (semi-positive) positive definiteness, and they are easier to be checked in practice. Compared to the earlier criteria, our results have more extensive applications.

Key words: neural networks, exponential stability, time-varying delay

0 引言

近十几年来,细胞神经网络 (CNNs)的稳定性研究吸引了国内外诸多研究者,各种类型的神经网络被提出并被广泛研究. 由于多数作者考虑的是适合静态图像处理应用的完全稳定的 CNNs, 而动态图像的处理却需要引入时滞,但时滞的存在可能导致网络振荡甚至不稳定,因此,DCNNs的稳定性得到了广泛而深入的研究[1-8]. 目前稳定性的研究方法主要是借助于 Lyapunov函数 (或泛函),M-矩阵和线性矩阵不等式等. 本文通过构造 Lyapunov-Krasovskii泛函,研究了 DCNNs的指数稳定性,获得了一个稳定性的新判据.

变时滞神经网络的数学模型由如下状态方程来描述

$$\dot{u}(t) = -Au(t) + Bg(u(t)) + Cg(u(t-\tau(t))) + I, \tag{1}$$

或

$$\dot{u}_i(t) = -a_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j(u_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} g_j(u_j(t-\tau(t))) + I_i,\quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

收稿日期: 2006-10-20. 修回日期: 2007-01-11.
基金项目:国家自然科学基金 (6037306)、江苏省自然科学基金 (BK2003053)资助项目.
作者简介:蒋秋浩 (1965—),硕士,讲师. 主要从事神经网络的教学与研究. E-mail: qiuhaojiang@163.com
通讯联系人:曹进德 (1963—),教授,博士生导师. 主要从事复杂网络、非线性系统、神经网络的教学与研究. E-mail: jdcao@seu.edu.cn

其中 $u(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))^T\in\mathbf{R}^n$ 是与神经元有关的状态向量, $A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)>0$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 和 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 分别是连接权矩阵和时滞连接权矩阵, $I=(I_1,I_2,\cdots,I_n)^T\in\mathbf{R}^n$ 是外部输入常向量, $0\le\tau(t)\le\tau$ (τ 是常数)表示传输延时, $g(u(t))=(g_1(u_1(t)),g_2(u_2(t)),\cdots,g_n(u_n(t)))^T\in\mathbf{R}^n$, $g(u(t-\tau(t)))=(g_1(u_1(t-\tau(t))),g_2(u_2(t-\tau(t))),\cdots,g_n(u_n(t-\tau(t))))^T\in\mathbf{R}^n$, $g_j(\cdot)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 表示激活函数.

本文做假设如下:

(A_1):激活函数 $g_i(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是有界、单调不减函数, 且李普希兹连续,即存在常数 $l_i>0$ 使得

$$|g_i(v_1)-g_i(v_2)|\le l_i|v_1-v_2|,\qquad \forall v_1,v_2\in\mathbf{R} \tag{3}$$

(A_2): $\tau(t)$ 可微且 $0\le\dot{\tau}(t)<1$.

由假设 (A_1) 可知模型 (1) 至少有一个平衡点 $u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)^T$,为简单起见,作变换 $x(t)=u(t)-u^*$, $x(t-\tau(t))=u(t-\tau(t))-u^*$ 把模型 (1) 的平衡点 $u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)^T$ 移到原点,则模型 (1) 变为

$$\dot{x}(t)=-Ax(t)+Bf(x(t))+Cf(x(t-\tau(t))) \tag{4}$$
$$x(t)=\phi(t),\ t\in[-\tau,0]$$

即
$$\dot{x}_i(t)=-a_ix_i(t)+\sum_{j=1}^n b_{ij}f_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^n c_{ij}f_j(x_j(t-\tau(t))),\ i=1,2,\cdots,n$$

其中 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^T\in\mathbf{R}^n$ 表示状态向量, $f(x(t))=(f_1(x_1(t)),f_2(x_2(t)),\cdots,f_n(x_n(t)))^T\in\mathbf{R}^n$,其中 $f_i(x_i(t))=g_i(x_i(t)+u_i^*)-g_i(u_i^*)$ 且 $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$,此外,由 (3) 式可知 $f_i(\cdot)$ 单调不减且满足

$$|f_i(x_i)|\le l_i|x_i| \text{ 和 } f_i(x_i)x_i\ge0,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{5}$$

为方便,文中的 B^T, B^{-1}, $\lambda_m(B)$, $\lambda_M(B)$ 分别表示方阵 B 的转置矩阵,逆矩阵,最小特征值和最大特征值; $B>0$ ($B<0$) 表示 B 是对称正定(负定)矩阵; $l_M=\max\{l_1,l_2,\cdots,l_n\}$, E 表示单位矩阵,记 $L=\mathrm{diag}(l_1,l_2,\cdots,l_n)>0$.

定义 称模型 (4) 的平衡点是全局指数稳定的, 若存在常数 $k>0$, $\gamma\ge1$, 使得

$$\|x(t)\|\le\gamma\|\phi\|e^{-kt},\quad \forall t\ge0,$$

其中
$$\|\phi\|=\sup_{-\tau\le s\le0}\|\phi(s)\|.$$

引理 1[1] 对任意给定的实矩阵 Q_1,Q_2 和 Q_3,其中 $Q_3=Q_3^T$,下面矩阵不等式成立

$$-Q_2^TQ_3^{-1}Q_2+Q_2^TQ_1+Q_1^TQ_2\le Q_1^TQ_3Q_1.$$

引理 2[2] 对任意向量 $X,Y\in\mathbf{R}^n$,存在正定矩阵 P 使得如下矩阵不等式成立

$$2X^TY\le X^TPX+Y^TP^{-1}Y.$$

1 主要结果

定理 1 假设 (A_1) 和 (A_2) 成立,如果存在 $P>0$, $D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)>0$, $k>0$, $\beta>0$,使得

$$\Omega_1=PA+AP-2kP-4kDL-P-\frac{e^{2k\tau}}{\beta(1-\dot{\tau}(t))}P>0,$$

$$\Omega_2=2DAL^{-1}-DB-B^TD-B^TPB-2\beta C^TPC-\frac{e^{2k\tau}}{\beta(1-\dot{\tau}(t))}D^TP^{-1}D\ge0,$$

则系统 (4) 的平衡点是全局指数稳定的.

证明 构造如下 Lyapunov-Krasovkii泛函

$$V(x(t))=e^{2kt}x^T(t)Px(t)+2e^{2kt}\sum_{i=1}^n d_i\int_0^{x_i(t)}f_i(s)ds+2\beta\int_{t-\tau(t)}^t e^{2k\zeta}f^T(x(\zeta))C^TPCf(x(\zeta))d\zeta$$

$V(x(t))$ 沿模型 (4) 的解对 t 求导得:

$$\dot{V}(x(t))=2ke^{2kt}x^T(t)Px(t)+2e^{2kt}x^T(t)P\dot{x}(t)+4ke^{2kt}\sum_{i=1}^n d_i\int_0^{x_i(t)}f_i(s)ds$$

$$+2e^{2kt}f^T(x(t))D\dot{x}(t)+2\beta e^{2kt}f^T(x(t))C^TPCf(x(t))$$
$$-2\beta e^{2k(t-\tau(t))}f^T(x(t-\tau(t)))C^TPCf(x(t-\tau(t)))(1-\dot{\tau}(t)),$$

由式(5)得

$$0\le\sum_{i=1}^n d_i\int_0^{x_i(t)}f_i(s)\,ds\le x^T(t)DLx(t).$$

所以

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t))\le&2ke^{2kt}x^T(t)Px(t)+2e^{2kt}x^T(t)P\dot{x}(t)+4ke^{2kt}x^T(t)DLx(t)+2e^{2kt}f^T(x(t))D\dot{x}(t)\\&+2\beta e^{2kt}f^T(x(t))C^TPCf(x(t))-2\beta e^{2k(t-\tau(t))}f^T(x(t-\tau(t)))C^TPCf(x(t-\tau(t)))(1-\dot{\tau}(t))\\=&2ke^{2kt}x^T(t)Px(t)+2e^{2kt}x^T(t)P[-Ax(t)+Bf(x(t))+Cf(x(t-\tau(t)))]\\&+4ke^{2kt}x^T(t)DLx(t)+2e^{2kt}f^T(x(t))D[-Ax(t)+Bf(x(t))+Cf(x(t-\tau(t)))]\\&+2\beta e^{2kt}f^T(x(t))C^TPCf(x(t))-2\beta e^{2k(t-\tau(t))}f^T(x(t-\tau(t)))C^TPCf(x(t-\tau(t)))(1-\dot{\tau}(t))\\\le&e^{2kt}\{x^T(t)[2kP-2PA+4kDL]x(t)+2x^T(t)PBf(x(t))+2x^T(t)PCf(x(t-\tau(t)))\\&-2f^T(x(t))DAx(t)+2f^T(x(t))DBf(x(t))+2f^T(x(t))DCf(x(t-\tau(t)))\\&+2\beta f^T(x(t))C^TPCf(x(t))-2\beta e^{-2k\tau}f^T(x(t-\tau(t)))C^TPCf(x(t-\tau(t)))(1-\dot{\tau}(t))\}.\end{aligned}\tag{6}$$

由引理1,可得下列不等式

$$\begin{aligned}&-\beta e^{-2k\tau}f^T(x(t-\tau(t)))C^TPCf(x(t-\tau(t)))(1-\dot{\tau}(t))+2x^T(t)PCf(x(t-\tau(t)))\\&=-f^T(x(t-\tau(t)))C^T\left[\frac{P^{-1}e^{2k\tau}}{\beta(1-\dot{\tau}(t))}\right]^{-1}Cf(x(t-\tau(t)))+2x^T(t)PCf(x(t-\tau(t)))\\&\le\frac{e^{2k\tau}}{\beta(1-\dot{\tau}(t))}x^T(t)Px(t)\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}&-\beta e^{-2k\tau}f^T(x(t-\tau(t)))C^TPCf(x(t-\tau(t)))(1-\dot{\tau}(t))+2f^T(x(t))DCf(x(t-\tau(t)))\\&=-f^T(x(t-\tau(t)))C^T\left[\frac{P^{-1}e^{2k\tau}}{\beta(1-\dot{\tau}(t))}\right]^{-1}Cf(x(t-\tau(t)))+2f^T(x(t))DCf(x(t-\tau(t)))\\&\le\frac{e^{2k\tau}}{\beta(1-\dot{\tau}(t))}f^T(x(t))DP^{-1}D^Tf(x(t)).\end{aligned}\tag{8}$$

由引理2,可得不等式

$$\begin{aligned}2x^T(t)PBf(x(t))&\le x^T(t)Px(t)+f^T(x(t))B^TPP^{-1}PBf(x(t))\\&=x^T(t)Px(t)+f^T(x(t))B^TPBf(x(t)),\end{aligned}\tag{9}$$

由(5)式可得

$$2f^T(x(t))DAx(t)\ge2f^T(x(t))DAL^{-1}f(x(t)),$$

即

$$-2f^T(x(t))DAx(t)\le-2f^T(x(t))DAL^{-1}f(x(t)).\tag{10}$$

将(7),(8),(9),(10)式代入(6)式得

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t))\le&-e^{2kt}x^T(t)\left[2PA-2kP-4kDL-P-\frac{e^{2k\tau}}{\beta(1-\dot{\tau}(t))}P\right]x(t)\\&-e^{2kt}f^T(x(t))\left[2DAL^{-1}-2DB-B^TPB-2\beta C^TPC-\frac{e^{2k\tau}}{\beta(1-\dot{\tau}(t))}DP^{-1}D\right]f(x(t))\\=&-e^{2kt}x^T(t)\Omega_1x(t)-e^{2kt}f^T(x(t))\Omega_2f(x(t)).\end{aligned}$$

因为

$$\Omega_1>0,\Omega_2\ge0,$$

所以

$$\dot{V}(x(t))\le-e^{2kt}x^T(t)\Omega_1x(t)<0,$$

所以

$$V(x(t))\le V(x(0)),\quad\forall t>0.$$

此外

$$
\begin{aligned}
V(x(0)) &= x^{T}(0)Px(0) + 2\sum_{i=1}^{n} d_i \int_0^{x_i(0)} f_i(s)\,ds + 2\beta \int_{-\tau(0)}^{0} e^{2k\zeta} f^{T}(x(\zeta))C^{T}PCf(x(\zeta))\,d\zeta \\
&\le \lambda_M(P)\|\phi\|^2 + 2\lambda_M(DL)\|\phi\|^2 + 2\beta\lambda_M(C^{T}PC)\int_{-\tau}^{0} e^{2k\zeta} f^{T}(x(\zeta))f(x(\zeta))\,d\zeta \\
&\le \lambda_M(P)\|\phi\|^2 + 2\lambda_M(DL)\|\phi\|^2 + 2\beta l_M^2\lambda_M(C^{T}PC)\|\phi\|^2\int_{-\tau}^{0} e^{2k\zeta}\,d\zeta \\
&= \left\{\lambda_M(P) + 2\lambda_M(DL) + 2\beta l_M^2\lambda_M(C^{T}PC)\frac{1-e^{-2k\tau}}{2k}\right\}\|\phi\|^2,
\end{aligned}
$$

又因为

$$V(x(t)) \ge e^{2kt}\lambda_m(P)\|x(t)\|^2,$$

所以

$$e^{2kt}\lambda_m(P)\|x(t)\|^2 \le \left\{\lambda_M(P) + 2\lambda_M(DL) + 2\beta\lambda_M(C^{T}PC)l_M^2\frac{1-e^{-2k\tau}}{2k}\right\}\|\phi\|^2,$$

即

$$\|x(t)\| \le \sqrt{\frac{\lambda_M(P) + 2\lambda_M(DL) + 2\beta\lambda_M(C^{T}PC)l_M^2\frac{1-e^{-2k\tau}}{2k}}{\lambda_m(P)}}\,\|\phi\|e^{-kt}.$$

易知

$$\sqrt{\frac{\lambda_M(P) + 2\lambda_M(DL) + 2\beta\lambda_M(C^{T}PC)l_M^2\frac{1-e^{-2k\tau}}{2k}}{\lambda_m(P)}} \ge 1,$$

另外,由

$$V(x(t)) \ge e^{2kt}x^{T}(t)Px(t) \ge x^{T}(t)Px(t) \ge \lambda_m(P)\|x(t)\|^2$$

得,当 $\|x(t)\| \to \infty$ 时,$V(x(t)) \to \infty$,即 $V(x(t))$ 是径向无界的,由定义 1知,模型(4)的平衡点是全局指数稳定的.

特别地,在模型(4)中,当变时滞 $\tau(t) = \tau$ 为常数时,模型(4)变为

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + Bf(x(t)) + Cf(x(t-\tau)). \tag{11}$$

推论 对于模型(11),如果下式成立

$$\Omega_1 = PA + A^{T}P - 2kP - 4kDL - P - \frac{e^{2k\tau}}{\beta}P > 0,$$

$$\Omega_2 = 2DAL^{-1} - DB - B^{T}D - B^{T}PB - 2\beta C^{T}PC - \frac{e^{2k\tau}}{\beta}D^{T}P^{-1}D \ge 0,$$

则模型(11)的平衡点是全局指数稳定的.

2 数值例子及结果比较

为了便于与我们的结果进行比较,我们重述文献[4]的主要结果:

定理 2[4] 如果存在正定矩阵 P, Q 和 $\sum$ 及正常数 $k > 0$,使得下式成立

$$\Omega = 2P - 2kP - \left(Q + \sum\right) - PB\sum^{-1}B^{T}P - e^{2k\tau}PCQ^{-1}C^{T}P > 0,$$

则模型(11)(其中 $A = E, B, C$ 意义同模型(4))是全局指数稳定的.

例 考虑如下具有常时滞的神经网络模型

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) + bf(x(t)) + cf(x(t-\tau)), \tag{12}$$

其中 $a = 1, b = -\frac{1}{\sqrt{2}}, c = \frac{1}{\sqrt{2}}$,定理 2中需要存在 $p > 0, q > 0, \sigma > 0$ 和 $k > 0$,使得

$$\omega = 2p - 2kp - (q + \sigma) - \frac{p^2}{2\sigma} - e^{2k\tau}\frac{p^2}{2q} > 0.$$

另外

$$\omega = 2p - 2kp - (q + \sigma) - \frac{p^2}{2\sigma} - e^{2k\tau}\frac{p^2}{2q} = \frac{1}{2}\left[4p - 4kp - 2(q + \sigma) - \frac{p^2}{\sigma} - e^{2k\tau}\frac{p^2}{q}\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[4p - 4kp - q - \sigma - q - \sigma - \frac{p^2}{\sigma} - \frac{p^2}{q}\right] = \frac{1}{2}\left[4p - 4kp - q - \sigma - \left(\sigma + \frac{p^2}{\sigma}\right) - \left(q + \frac{p^2}{q}\right)\right].$$

因为, 对于任意 $p > 0, q > 0, \sigma > 0$ 都有

$$\sigma + \frac{p^2}{\sigma} \geq 2p, \quad q + \frac{p^2}{q} \geq 2p,$$

所以

$$\omega \leq \frac{1}{2}\left[4p - 4kp - q - \sigma - \left(\sigma + \frac{p^2}{\sigma}\right) - \left(q + \frac{p^2}{q}\right)\right] \leq \frac{1}{2}[4p - 4kp - q - \sigma - 2p - 2p]$$

$$= \frac{1}{2}[- 4kp - q - \sigma].$$

因为找不到 $p > 0, q > 0, \sigma > 0$ 使得 $\omega > 0$, 所以定理 2不能判定模型 (12) 的平衡点是指数稳定的.

而对于相同的参数,在定理 1的推论中我们取 $p = 1, d = 1, l = \frac{1}{4}, \beta = 2$, 则

$$\omega_1 = 2pa - 2kp - 4kdl - p - \frac{e^{2k\tau}}{\beta}p = 2 - 2k - k - 1 - \frac{e^{2k\tau}}{2} = 1 - 3k - \frac{e^{2k\tau}}{2},$$

$$\omega_2 = 2da\frac{1}{l} - 2db - pb^2 - 2\beta pc^2 - \frac{e^{2k\tau}}{\beta}pd^2 = 8 + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} - 2 - \frac{e^{2k\tau}}{2} = \frac{11}{2} + \sqrt{2} - \frac{e^{2k\tau}}{2}.$$

显然, 只要取充分小的 $k > 0$,就能保证 $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$, 所以, 由推论知, 模型 (12) 的平衡点是全局指数稳定的.

[参考文献]

[1] Ensari T, Arik S. Global stability of a class of neural networks with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems - II, 2005, 52(3): 126-130.

[2] 周冬明, 曹进德, 张立明. 时滞神经网络全局渐近稳定性条件[J]. 应用数学和力学, 2005, 26(3): 341-348.

[3] Khalil H K. Nonlinear Systems[M]. New York: McMillan, 1988.

[4] Liao X, Chen G, Sancheez E N. Delay dependent exponential stability analysis of delayed neural networks[J]. Neural Networks, 2002, 15: 855-866.

[5] 李小平. 算子中立型泛函微分方程稳定性[J]. 南京师大学报:自然科学版, 2000, 23(3): 20-24.

[6] Senan S, Arik S. New results for exponential stability of delayed cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems - II, 2005, 52(3): 154-158.

[7] Chen T. Global exponential stability of delayed Hopfield neural network[J]. Neural NetWorks, 2001, 14(8): 977-980.

[8] Arik S. An improved global stability result for delayed cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits Systems I, Fundam. Theory Appl, 2002, 49(8): 1 211-1 214.

[责任编辑:陆炳新]