广义 Smash-双积 $L_W \bowtie_R H$ 的映射刻画

焦争鸣[1], 王永忠[1,2]

(1. 河南师范大学数学与信息科学学院, 河南 新乡 453000)
(2 新乡师范高等专科学校数学系, 河南 新乡 453000)

[摘要] 作为 Smash积和 Smash余积的推广, S. Caenepeel, B. Ion, G. Militaru和 S. Zhu给出了 R-smash积, W-smash余积和广义 Smash-双积的概念. 本文讨论了广义 Smash-双积的一些性质,通过引进广义相容映射系统概念,给出了广义 Smash-双积的映射刻画. 推广了 D. E. Radford关于 Smash-双积的相应结论.

[关键词] 广义 Smash-双积, 相容映射系统, 双代数映射
[中图分类号] O153.3 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2007)02-0022-05

Mapping Descriptions for Generalized Smash-Biproduct

Jiao Zhengming[1], Wang Yongzhong[1,2]

(1. Department of Mathematics, Henan Normal University, Xinxiang 453000, China)
(2. Department of Mathematics, Xinxiang Normal College, Xinxiang 453000, China)

Abstract As the generalization of smash product and smash coproduct, the R-smash product, W-smash coproduct and generalized smash biproduct are introduced by S. caenepeel, B. Ion, G. Militaru and S. Zhu. In this paper, some properties of generalized smash-biproduct are discussed, by introducing the concept of generalized admissible mapping system, two mapping descriptions for generalized smash-biproduct are given as well.

Key words generalized smash-biproduct, admissible mapping system, bialgebra map

0 引言

基于 Smash积和 Smash余积[1], D. E. Radford在文[2]给出了双积双代数 $B\times H$ 的概念,同时讨论了 $B\times H$ 的结构性质, 并给出了其映射刻画. 作为 Smash积和 Smash余积的推广, 人们给出了偶交叉积[3], 广义 Drinfeld偶[4],扭曲 Smash积和扭曲 Samsh余积[5]. 2000年, S. Caenepeel, B. Ion, G. Militaru和 S. Zhu给出了 R-smash积, W-smash余积和广义 Smash-双积的概念[6]. 文[7, 8]分别研究了 R-smash积的拟三角结构和 W-smash余积的辫子结构. 本文给出了意义更为广泛的相容映射系统定义, 证明了广义 Smash-双积 $L_W \bowtie_R H$ 的映射刻画定理并获得一些结构性质. 本节结果是文[2]相应结论的推广.

除非特别指出, 通篇文章的讨论都是在一个固定的域 k 上进行. 我们沿用文[9, 10]中术语和记号. 对余代数 C 及 $c\in C$, 我们记 $\Delta(c)=\sum c_{(1)}\otimes c_{(2)}$. 为方便起见, 我们首先给出文[2]中的一些概念和结论.

设 V 和 W 是两个向量空间, $R: V\otimes W\to W\otimes V$ 是一个 k-线性映射, 对任意 $v\in V$, $w\in W$, 记 $R(v\otimes w)=\sum {}^R w\otimes {}^R v$.

定义 1.1 设 A 和 B 是 k-代数, $R: B\otimes A\to A\otimes B$ 是一个 k-线性映射, R 称为左正规的, 如果

$$R(b\otimes 1_A)=1_A\otimes b,\quad b\in B. \tag{1.1}$$

R 称为右正规的, 如果

收稿日期: 2006-03-28 修回日期: 2006-06-12
基金项目: 国家自然科学基金(10571045)、河南省教育厅基础研究基金(20011100010)资助项目.

作者简介: 焦争鸣(1956—), 教授, 博士, 主要从事 Hopf代数理论的教学与研究. E-mail: zmjiao@henannu.edu.cn

$$R(1_B\otimes a)=a\otimes 1_B,\quad a\in A. \tag{1.2}$$

如果 R 既是左正规又是右正规, 则称 R 是正规的.

若 $A\otimes B$ 关于乘法 $(a\otimes b)(c\otimes d)=\sum a{}^R c\otimes{}^R bd$ 和单位元 $1_A\otimes 1_B$ 构成一个 k-代数, 则称此代数为一个 R-smash积, 记为 $A\rhd\lhd_R B$.

定义 1.2 设 C 和 D 是 k-余代数, $W: C\otimes D\to D\otimes C$ 是一个 k-线性映射, W 是左余正规的, 如果

$$(I_D\otimes\varepsilon_C)W(c\otimes d)=\varepsilon_C(c)d,\quad c\in C,\quad d\in D. \tag{1.3}$$

W 是右余正规的, 如果

$$(\varepsilon_D\otimes I_C)W(c\otimes d)=\varepsilon_D(d)c,\quad c\in C,\quad d\in D. \tag{1.4}$$

如果 W 既是左余正规又是右余正规, 则称 W 是余正规的.

若 $C\otimes D$ 关于余乘法 $\Delta(c\otimes d)=\sum c_{(1)}\otimes{}^W d_{(1)}\otimes{}^W d_{(2)}\otimes d_{(2)}$ 和余单位元 $\varepsilon_C\otimes\varepsilon_D$ 构成一个 k-余代数, 则称此余代数为一个 W-smash余积, 记为 $C_W\rhd\lhd D$.

定理 1.3 设 A 和 B 为代数, $R: B\otimes A\to A\otimes B$ 是一个 k-线性映射, 则以下条件等价:

(1) $A\rhd\lhd_R B$ 是一个 Smash积;

(2) (i) R 是正规的;

(ii) $\sum{}^r({}^R a)\otimes{}^r b_1{}^R b_2=\sum ra\otimes^r(b_1b_2)$;

(iii) $\sum{}^r(a_1a_2)\otimes{}^r b=\sum Ra_1{}^r a_2\otimes{}^r({}^R b)$.

如果定理中(2)(ii)成立, 则称 R 是左乘的, 如果定义中(2)(iii)成立, 则称 R 是右乘的. 如果 R 既是左乘的又是右乘的, 则称 R 是乘的.

定理 1.4 设 C 和 D 为余代数, 对于 k-线性映射 $W: C\otimes D\to D\otimes C$, 则以下条件等价

(1) $C_W\rhd\lhd D$ 是一个 Smash-余积;

(2) (i) W 是余正规的;

(ii) $\sum({}^W d)_{(1)}\otimes({}^W d)_{(2)}\otimes{}^W c=\sum{}^W d_{(1)}\otimes{}^U d_{(2)}\otimes{}^U({}^W c)$;

(iii) $\sum{}^W d\otimes({}^W c)_{(1)}\otimes({}^W c)_{(2)}=\sum{}^U({}^W d)\otimes{}^U c_{(1)}\otimes{}^W c_{(2)}$.

如果定理中(2)(ii)成立, 则称 W 是左余乘的, 如果定义中(2)(iii)成立, 则称 W 是右余乘的. 如果 W 既是左余乘又是右余乘, 则称 W 是余乘的.

定理 1.5 设 H 和 L 是双代数, $R: H\otimes L\to L\otimes H$ 和 $W: L\otimes H\to H\otimes L$ 是两个 k-线性映射, 则下列条件等价:

(1) $L_W\rhd\lhd_R H$ 是一个 Smash-双积;

(2) 以下条件成立:

(DP1) R 是正规的且是左乘右乘的;

(DP2) W 是余正规的且是左余乘右余乘的;

(DP3) $(\varepsilon_L\otimes\varepsilon_H)R=\varepsilon_H\otimes\varepsilon_L$;

(DP4) $W(1_L\otimes 1_H)=1_H\otimes 1_L$;

(DP5) $W(l\otimes h)=W(l\otimes 1_H)W(1_L\otimes h)$;

(DP6) $\sum l_{(1)}l'_{(1)}\otimes{}^W 1_H\otimes{}^W(l_{(2)}l'_{(2)})=\sum l_{(1)}{}^R l'_{(1)}\otimes{}^R({}^W 1_H)^U 1_H\otimes{}^W l_{(2)}{}^U l'_{(2)}$;

(DP7) $\sum{}^W(h_{(1)}h'_{(1)})\otimes{}^W 1_L\otimes h_{(2)}h'_{(2)}=\sum{}^W h_{(1)}{}^U h'_{(1)}\otimes{}^W 1_L{}^R({}^U 1_L)\otimes{}^R h_{(2)}h'_{(2)}$;

(DP8) $\sum({}^R l)_{(1)}\otimes{}^W(({}^R h)_{(1)})\otimes{}^W(({}^R l)_{(2)})\otimes({}^R h)_{(2)}=\sum{}^R l_{(1)}\otimes{}^R({}^W h_{(1)})^U 1_H\otimes{}^W 1_L{}^r({}^U l_{(2)})$
$\otimes{}^r h_{(2)}$,

这里 $l, l'\in L$, $h, h'\in H$, $r=R$, $U=W$.

在定理 1.5中令 $W=T_{L,H}$ 是一个扭曲映射, 称 $L_W\rhd\lhd_R H=L\rhd\lhd_R H$ 为 H 和 L 的 R-smash积. 而令 $R=T_{H,L}$ 是一个 扭曲映射, 称 $L_W\rhd\lhd_R H=L_W\rhd\lhd H$ 为 H 和 L 的 W-smash余积.

定义 1.6 设 H 和 L 是双代数, $R: H\otimes L\to L\otimes H$ 和 $W: L\otimes H\to H\otimes L$ 是 两个 k-线性映射, 如

果 $L_W \triangleright\!\triangleleft_R H$ 是一个广义 Smash-双积,即 $L_W \triangleright\!\triangleleft_R H$ 是一个双代数,则称 (H, L) 是一个相容对.

1　广义 Smash-双积 $L_W \triangleright\!\triangleleft_R H$ 的映射刻画定理

如果 (H, B) 是一个相容对,文[1]的定理2给出了双积双代数 $B\times H$ 的映射刻画,本节将推广文[1]的相应结论,给出了意义更为广泛的相容映射系统定义,然后证明了广义 Smash-双积 $L_W \triangleright\!\triangleleft_R H$ 的映射刻画定理.

首先给出相容映射系统的定义.

定义 2.1　设 (H, L) 是一个相容对,A 是一个双代数,称 $L \overset{\Pi}{\underset{j}{\leftrightarrows}} A \overset{\pi}{\underset{i}{\leftrightarrows}} H$ 是一个相容映射系统,如果下列条件成立:

(1) $\Pi\circ j = I_L$ 且 $\pi\circ i = I_H$;

(2) i 和 j 是代数映射,π 和 Π 是余代数映射;

(3) $\sum j({}^R l)\, i({}^R h) = i(h)\, j(l)$,对任意的 $l\in L$, $h\in H$,

$\sum \pi(a_{(1)})\otimes\Pi(a_{(2)}) = \sum{}^{w}\pi(a_{(2)})\otimes^{w}\Pi(a_{(1)})$,对任意的 $a\in A$;

(4) Π, π, i, j 满足相容条件:

$\sum\Pi(j(b)_{(1)}\, i(h)_{(1)})\otimes\pi(j(b)_{(2)}\, i(h)_{(2)}) = \sum\Pi(j(b))\otimes h$;

(5) $(j\circ\Pi) * (i\circ\pi) = I$.

设 (H, L) 是一个相容对,定义映射如下:

$$\Pi_L: L_W\bowtie_R H\to L,\ l\bowtie h\ \mapsto\ \varepsilon(h)l;$$
$$j_L: L\to L_W\bowtie_R H,\ l\ \mapsto\ l\bowtie 1_H,$$
$$\pi_H: L_W\bowtie_R H\to H,\ l\bowtie h\ \mapsto\ \varepsilon(l)h,$$
$$i_H: H\to L_W\bowtie_R H,\ h\ \mapsto\ 1_L\bowtie h,$$

这里 $l\in L$, $h\in H$. 于是我们有:

定理 2.2　设 (H, L) 是一个相容对,则 $L \overset{\Pi_L}{\underset{j_L}{\leftrightarrows}} L_W \triangleright\!\triangleleft_R H \overset{\pi_H}{\underset{i_H}{\leftrightarrows}} H$ 是一个相容映射系统.

证明　定义 2.1中条件(1)的成立是显然的. 根据 i_H 和 j_L 的定义,我们有

$$i_H(hk) = 1_L\triangleright\!\triangleleft hk = (1_L\triangleright\!\triangleleft h)(1_L\triangleright\!\triangleleft k) = i_H(h)\, i_H(k),\quad h,\ k\in H;$$
$$j_L(ab) = ab\triangleright\!\triangleleft 1_H = (a\triangleright\!\triangleleft 1_H)(b\triangleright\!\triangleleft 1_H) = j_L(a)\, j_L(b),\quad a,\ b\in L$$

所以,i_H 和 j_L 是代数映射.

根据 π_H 的定义,对任意 $l\in L$, $h\in H$,我们有

$$\Delta\pi_H(l\triangleright\!\triangleleft h) = \sum\varepsilon(l)h_{(1)}\otimes h_{(2)}$$

和

$$(\pi_H\otimes\pi_H)\Delta(l\triangleright\!\triangleleft h) = \sum\varepsilon(l_{(1)})^{W}h_{(1)}\otimes\varepsilon({}^{W}l_{(2)})h_{(2)} = \sum\varepsilon(l)h_{(1)}\otimes h_{(2)}.$$

所以,$\Delta\pi_H = (\pi_H\otimes\pi_H)\Delta$,即 π_H 是余代数映射. 又由 Π_L 的定义,我们有

$$\Delta\Pi_L(l\triangleright\!\triangleleft h) = \sum\varepsilon(h)(l_{(1)}\otimes l_{(2)})$$

和

$$(\Pi_L\otimes\Pi_H)\Delta(l\triangleright\!\triangleleft h) = \sum\varepsilon({}^{W}h_{(1)})l_{(1)}\otimes\varepsilon(h_{(2)})^{W}l_{(2)} = \sum\varepsilon(l)l_{(1)}\otimes l_{(2)}.$$

所以,$\Delta\Pi_L = (\Pi_L\otimes\Pi_H)\Delta$,即 Π_L 是余代数映射,于是定义 2.1中条件(2)成立.

现验证定义 2.1中条件(3)成立. 对任意 $l\in L$, $h\in H$,我们有

$$\sum j_L({}^R l)\, i_H({}^R h) = ({}^R l\triangleright\!\triangleleft 1_H)(1_L\triangleright\!\triangleleft{}^R h) = \sum{}^R l\triangleright\!\triangleleft{}^R h$$

和

$$i_H(h)\, j_L(l) = (1_L\bowtie h)(l\triangleright\!\triangleleft 1_H) = \sum{}^R l\triangleright\!\triangleleft{}^R h,$$

所以,$\sum j_L({}^R l)\, i_H({}^R h) = i_H(h)\, j_L(l)$. 又由于

$$\sum \pi_H((l\triangleright\triangleleft h)_{(1)}) \otimes \Pi_L((l\triangleright\triangleleft h)_{(2)}) = \sum \varepsilon(l_{(1)})^W h_{(1)} \otimes \varepsilon(h_{(2)})^W l_{(2)} = \sum {}^W h \otimes {}^W l$$

和

$$\sum {}^W\pi_H((l\triangleright\triangleleft h)_{(2)}) \otimes {}^W\Pi_L((l\triangleright\triangleleft h)_{(1)}) = \sum {}^U\varepsilon({}^W l_{(2)})h_{(2)} \otimes {}^U\varepsilon({}^W h_{(1)})L_{(1)} = \sum {}^W h \otimes {}^W l$$

所以, $\sum \pi_H((l\triangleright\triangleleft h)_{(1)}) \otimes \Pi_L((l\triangleright\triangleleft h)_{(2)}) = \sum {}^W\pi_H((l\triangleright\triangleleft h)_{(2)}) \otimes {}^W\Pi_L((l\triangleright\triangleleft h)_{(1)})$. 这便证明了定义 2.1中条件 (3) 成立.

关于定义 2.1中条件 (4) 和 (5), 我们作如下计算:

$$\begin{aligned}
&\sum \Pi_L(j(b)_{(1)} i(h)_{(1)}) \otimes \pi_H(j(b)_{(2)} i(h)_{(2)})\\
&= \sum \Pi_L((b_{(1)}\triangleright\triangleleft {}^W 1_H)(1_L\triangleright\triangleleft {}^U h_{(1)})) \otimes \pi_H(({}^W b_{(2)}\triangleright\triangleleft 1_H)({}^U 1_L\triangleright\triangleleft h_{(2)}))\\
&= \sum \Pi_L(b_{(1)}\triangleright\triangleleft {}^W 1_H {}^U h_{(1)}) \otimes \pi_H({}^W b_{(2)} {}^U 1_L\triangleright\triangleleft h_{(2)})\\
&= \sum \varepsilon({}^W 1_H {}^U h_{(1)}) b_{(1)} \otimes \varepsilon({}^W b_{(2)} {}^U 1_L) h_{(2)} = b\otimes h.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(j_L \circ \Pi_L) * (i_H \circ \pi_H)(l\triangleright\triangleleft h)\\
&= \sum (j_L \circ \Pi_L)(l_{(1)}\triangleright\triangleleft {}^W H_{(1)})(i_H \circ \pi_H)(l\triangleright\triangleleft h)({}^W l_{(2)}\triangleright\triangleleft h_{(2)})\\
&= \sum (\varepsilon({}^W h_{(1)}) l_{(1)}\triangleright\triangleleft 1_H)(1_L\triangleright\triangleleft \varepsilon({}^W l_{(2)}) h_{(2)}) = l\triangleright\triangleleft h.
\end{aligned}$$

至此, 定理的证明全部完成.

定理 2.3 设 (H, L) 是一个相容对, A 是一个双代数, $L \underset{j}{\overset{\Pi}{\leftrightarrows}} A \underset{i}{\overset{\pi}{\leftrightarrows}} H$ 是一个相容映射系统. 则

(1) 存在惟一的代数映射 $f: L_W \triangleright\triangleleft_R H \to A$ 使得图 1(a) 可交换. 进一步, 图 1(b) 是可交换的, 并且 f 是一个双代数映射.

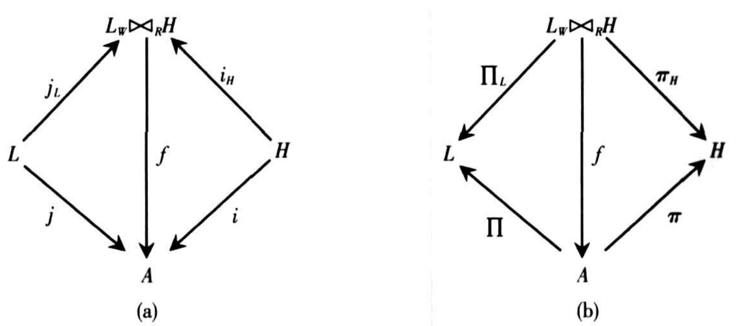

图 1 广义 Smash-双积 $L_W\bowtie_R H$ 的代数映射刻画

Fig.1 The algebra mapping description of generalized smash-biproduct

(2) 存在惟一的余代数映射 $g: A \to L_W \triangleright\triangleleft_R H$ 使得图 2(a) 可交换. 进一步, 图 2(b) 可交换, 并且 g 是一个双代数同构 (亦即 f, g 是互逆的).

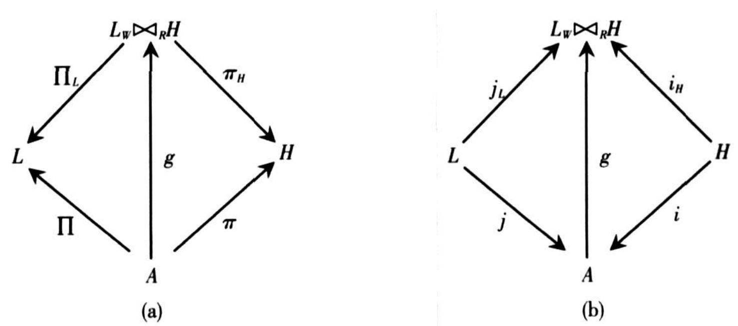

图 2 广义 Smash-双积 $L_W\bowtie_R H$ 的余代数映射刻画

Fig.2 The coalgebra mapping description of generalized smash-biproduct

证明 先证存在性和惟一性. 令

$$f: L_W \triangleright\triangleleft_R H \to A,\ f(l\triangleright\triangleleft h) = j(l)\, i(h),\quad l\triangleright\triangleleft h \in L_W \triangleright\triangleleft_R H,$$

$$g: A \to L_W \triangleright\triangleleft_R H,\ g(a) = \sum \Pi(a_{(1)})\triangleright\triangleleft \pi(a_{(2)}),\quad a\in A,$$

则 f 和 g 使得图 1(a) 和图 2(a) 交换.

若 $f': L_W \rhd\!\lhd_R H \to A$ 是代数映射, 且使得图 1(a) 是可交换的, 则有:

$$f'(l \rhd\!\lhd h) = f'((l \rhd\!\lhd 1_H)(1_L \rhd\!\lhd h)) = f'(l \rhd\!\lhd 1_H) f'(1_L \rhd\!\lhd h)$$
$$= f'(j_L(l)) f'(i_H(h)) = j(l) i(h) = f(l \rhd\!\lhd h).$$

若 $g': A \to L_W \rhd\!\lhd_R H$ 是余代数映射, 且使得图 2(a) 是可交换的, 则有:

$$g'(a) = \sum ((j_L \circ \Pi_L)(g'(a_{(1)})))((i_H \circ \pi_H)(g'(a_{(2)})))$$
$$= \sum (\Pi(a_{(1)}) \rhd\!\lhd 1_H)(1_L \rhd\!\lhd \pi(a_{(2)}))$$
$$= \sum \Pi(a_{(1)}) \rhd\!\lhd \pi(a_{(2)}) = g(a).$$

这里利用了等式:

$$\sum g(a)_{(1)} \otimes g(a)_{(2)} = \sum g(a_{(1)}) \otimes g(a_{(2)}).$$

于是得 f 和 g 的存在性和惟一性. 又因为

$$f(g(a)) = \sum (j \circ \Pi)(a_{(1)})(i \circ \pi)(a_{(2)}) = (j \circ \Pi) * (i \circ \pi)(a) = a,$$
$$g(f(l \rhd\!\lhd h)) = \sum \Pi(j(l)_{(1)} i(h)_{(1)}) \rhd\!\lhd \pi(j(l)_{(2)} i(h)_{(2)}) = \Pi(j(l)) \rhd\!\lhd h = l \rhd\!\lhd h,$$

所以 f 和 g 是互逆的. 于是要证 f 和 g 为双代数映射, 只需证明 f 是代数映射, g 是余代数映射即可.

首先, $f(1_L \rhd\!\lhd 1_H) = 1$ 是显然的. 对任意 $l \rhd\!\lhd h$, $l' \rhd\!\lhd h' \in L_W \rhd\!\lhd_R H$, 我们有

$$f((l \rhd\!\lhd h)(l' \rhd\!\lhd h')) = \sum f(l^R l' \rhd\!\lhd {}^R h h') = \sum j(l^R l') i({}^R h h')$$
$$= \sum j(l) j({}^R l') i({}^R h) i(h') = j(l) i(h) j(l') i(h')$$
$$= f(l \rhd\!\lhd h) f(l' \rhd\!\lhd h'),$$

所以 f 是代数映射. 另外, 对 g 有

$$\varepsilon(g(a)) = \sum \varepsilon(\Pi(a_{(1)}))\varepsilon(\pi(a_{(2)})) = \sum \varepsilon(a_{(1)})\varepsilon(a_{(2)}) = \varepsilon(a),$$

即 $\varepsilon_{L_W \bowtie_R H} g = \varepsilon_A$. 取 $a \in A$, 我们有

$$\Delta(g(a)) = \sum \Delta(\Pi(a_{(1)}) \rhd\!\lhd \pi(a_{(2)}))$$
$$= \sum \Pi(a_{(1)})_{(1)} \rhd\!\lhd^W \pi(a_{(2)})_{(1)} \otimes^W \Pi(a_{(1)})_{(2)} \rhd\!\lhd (a_{(2)})_{(2)}$$
$$= \sum \Pi(a_{(1)}) \rhd\!\lhd^W \pi(a_{(3)}) \otimes^W \Pi(a_{(2)}) \rhd\!\lhd \pi(a_{(4)})$$
$$= \sum \Pi(a_{(1)}) \rhd\!\lhd \pi(a_{(2)}) \otimes \Pi(a_{(3)}) \rhd\!\lhd \pi(a_{(4)})$$
$$= \sum g(a_{(1)}) \otimes g(a_{(2)}).$$

所以, g 是余代数映射.

[参考文献]

[1] Molnar R K. Semi-direct products of Hopf algebras[J]. J Algebra, 1977, 47: 29-51.

[2] Radford D E. The structure of Hopf algebras with a projection[J]. J Algebra, 1985, 92: 322-347.

[3] Majid S. Foundations of Quantum Group Theory[M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1995.

[4] Doi Y, Takeuchi M. Multiplication alteration by two-cocycles[J]. Comm Algebra, 1994, 22(14): 5715-5732.

[5] Wang S, Li J. On twisted smash products for bimodule algebras and the Drinfeld double[J]. Comm Algebra, 1998, 26(8): 2435-2444.

[6] Caenepeel S, Ion B, Militaru G, et al. The factorization problem and the smash biproduct of algebras and coalgebras[J]. Algebra and Repr Theory, 2000, 3: 19-42.

[7] Jiao Z. The quasitriangular structures for a class of T-smash product Hopf algebras[J]. Israel J of Math, 2005, 146: 125-148.

[8] Jiao Z, Wisbauer R. The braided structures for W-smash coproduct Hopf algebras[J]. J Algebra, 2005, 282: 474-495.

[9] Sweedler M E. Hopf Algebra[M]. New York: Benjamin, 1969.

[10] Montgomery S. Hopf Algebras and Their Actions on Rings[M]. Providence: Amer Math Soc, 1993.

[责任编辑: 陆炳新]