Sierpinski的一个三角数猜想

杨仕椿, 何　波

(阿坝师范高等专科学校数学系, 四川 汶川 623000)

[摘要] 基于三角数问题的研究目前非常活跃,最近, Bennett宣布解决了由 Sierpinski提出的一个三角数猜想问题,本文指出了 Bennett文中的错误,并利用 Pell方程解的性质的 Störmer定理以及 Bilu, Hanrot和 Voutier的关于本原素因子的深刻结论, 证明了在一列几何级数中, 不存在 4个相异的三角数, 完整地解决了 Sierpinski的问题.

[关键词] 三角数,几何级数, Sierpinski问题, Pell方程,本原素因子
[中图分类号] O156.7　[文献标识码] A　[文章编号] 1001-4616(2007)02-0033-04

A Conjectured of Sierpinski on Triangular Numbers

Yang Shichun, He Bo

(Department of Mathematics, ABa Teacher's College, Sichuan Wenchuan 623000, China)

Abstract: The study of triangular number promblem is very activing. Recently, Bennett proved a conjecture of Sierpinski on triangular numbers. In this paper, we firstly modified the mistake in reference of Bennett, then using Störmer's theorem of the solutions of Pell equation, and a deep result of privitive divisor of Bilu, Hanrot and Voutier, we proved that there is no exist four distinct triangular numbers in geometric progression, therefore we sovled the question of Sierpinski on triangular numbers.

Key words: triangular number, geometric progression, Sierpinski question, Pell equation, privitive divisor

0 引言

设 **Z**, **N**, **P**分别表示整数集、正整数集和全体素数的集合. 若 $n \in \mathbf{N}$, 则第 n个三角数 T_n定义为

$$T_n = \frac{1}{2} n (n+1). \tag{1}$$

关于三角数问题的研究由来已久,至今仍然非常活跃[1]. 例如,三角数中的方幂数, 三角数中的 Fibonacci数、Lucas数等等[2, 3].

利用 Pell方程的结论可以证明, 在一列几何级数中, 存在无穷多组 3个相异的三角数[4],其中最小的一组是 (T_1, T_3, T_8). 在 Guy的文献[5]中, Sierpinski提出如下问题:

问题　在一列几何级数中, 是否存在 4个相异的三角数?

Szymiczek曾经猜想[6], 该问题的答案是否定的. 最近, Bennett[7]宣布解决了以上问题, 他证明了, 在几何级数中, 不存在 4个相异的三角数. 但 Bennett在文献[7]中的方法是不正确的, 因为他假定这 4个三角数成几何级数. 事实上, 在一列几何级数中的任意 4个数未必成几何级数, 因此文献[7]的证法是不完整的.

本文利用 Pell方程解的性质的 Störmer定理,以及 Bilu, Hanrot和 Voutier的关于本原素因子的深刻结论, 给出了以上问题的完整解法, 证明了:

收稿日期: 2006-10-11. 修回日期: 2006-12-16.
基金项目:四川省教育厅自然科学基金 (2006C057)、阿坝师专校级科研基金 (ASB-0607)资助项目.
作者简介:杨仕椿 (1970—),副教授,主要从事代数及数论的教学与研究. E-mail: ysc1020@sina.com

定理　在一列几何级数中,不存在4个相异的三角数.

1　一些引理

引理1(Störmer定理)　若(x, y)是Pell方程

$$x^2 - Dy^2 = 1, D, x, y \in \mathbf{N} \tag{2}$$

的解,ε是方程(2)的基本解,则方程(2)的所有解可表为$x + y\sqrt{D} = \varepsilon^k$,这里$k \in \mathbf{N}$.如果$y = y', y' |^* D$,这里$y' |^* D$表示$y$的每一个素因子整除$D$,则

$$x + y\sqrt{D} = \varepsilon. \tag{3}$$

证明　见文献[1]和文献[8].

设α,β为代数整数,α+β与αβ是非零互素的有理整数,而且$\frac{\alpha}{\beta}$不是单位根,则称(α,β)为Lucas数对.令$s = \alpha + \beta$, $t = \alpha\beta$,则有

$$\alpha = \frac{1}{2}(s + \lambda\sqrt{d}),\quad \beta = \frac{1}{2}(s - \lambda\sqrt{d}).$$

这里$d = s^2 - 4t$,且$\lambda \in \{1, -1\}$.如此的(s, t)称为Lucas数对(α,β)的参数.若$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \pm 1$,则称Lucas数对$(\alpha_1, \beta_1)$和$(\alpha_2, \beta_2)$是等价的.

对于给定的Lucas数对(α,β),设Lucas序列

$$u_n(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, n = 1, 2, 3, \cdots,$$

如果素数$p \mid u_n(\alpha, \beta)$且$p \nmid (\alpha - \beta)^2 u_1(\alpha, \beta) \cdots u_{n-1}(\alpha, \beta)$,则称$p$是$u_n(\alpha, \beta)$的本原素因子.

引理2　当$4 < n \leq 30$且$n \neq 6$时,若$u_n(\alpha, \beta)$没有本原素因子,则

(1) $n = 5$, $(s, d) = (1, 5), (1, -7), (2, -40), (1, -11), (1, -15), (12, -76), (12, -1346)$;

(2) $n = 7$, $(s, d) = (1, -7), (1, -19)$;

(3) $n = 8$, $(s, d) = (1, -7), (2, -24)$;

(4) $n = 10$, $(s, d) = (2, -8), (5, -3), (5, -47)$;

(5) $n = 12$, $(s, d) = (1, 5), (1, -7), (1, -11), (2, -56), (1, -15), (1, -19)$;

(6) $n = 13$, $(s, d) = (1, -7)$;

(7) $n = 18$, $(s, d) = (1, -7)$;

(8) $n = 30$, $(s, d) = (1, -7)$.

证明　见文献[9]中的定理1.

引理3　当$n > 30$时,Lucas序列$u_n(\alpha, \beta)$都有本原素因子.

证明　见文献[10]中的定理4.

2　定理的证明

设T_x, T_y, T_z, T_w是一列几何级数中的4个相异的三角数,T_x最小,且该几何级数的公比为q, $q > 1$.令$8T_x = A$,于是存在$r_1, r_2, r_3 \in \mathbf{N}$,使得

$$8T_y = Aq^{r_1},\ 8T_z = Aq^{r_2},\ 8T_w = Aq^{r_3},$$

这里$x, y, z, w, q, A \in \mathbf{N}$,则由(1)可得

$$A + 1 = a^2,\ a \in \mathbf{N}, \tag{4}$$

以及

$$Aq^{r_1} + 1 = u^2,\ Aq^{r_2} + 1 = v^2,\ Aq^{r_3} + 1 = m^2,\ u, v, m \in \mathbf{N} \tag{5}$$

下面分两种情形讨论.

情形1　若r_1, r_2, r_3中有两个是奇数,不妨设$2 \nmid r_1$, $2 \nmid r_2$, $r_2 > r_1 \geq 1$,于是由(5)可得,Aq非平

方数, 因此由 (5) 得, Pell方程

$$x^2 - Aqy^2 = 1, x, y \in \mathbf{N} \tag{6}$$

有解 $(x, y) = \left(u, q^{\frac{r_1-1}{2}}\right), \left(v, q^{\frac{r_2-1}{2}}\right)$. 如果 $r_1 \geq 3$, 由于 $q \mid^{*} Aq$, 则由引理 1可得:

$$u + q^{\frac{r_1-1}{2}}\sqrt{Aq} = \varepsilon, \tag{7}$$

以及

$$v + q^{\frac{r_2-1}{2}}\sqrt{Aq} = \varepsilon. \tag{8}$$

这里 ε是方程 (6) 的基本解. 但 $r_2 > r_1$, 这显然是不可能的.

如果 $r_1 = 1$, 则由 (7) 可得, 方程 (6) 的基本解为 $\varepsilon = u + \sqrt{Aq}$, 由 (8), 同理可得, 这也不可能.

情形 2　若 r_1, r_2, r_3中有两个是偶数,不妨设 $2 \mid r_1, 2 \mid r_2, r_2 > r_1 \geq 2$,于是由 (5) 得, Pell方程

$$x^2 - Ay^2 = 1, x, y \in \mathbf{N} \tag{9}$$

有解 $(x, y) = \left(u, q^{\frac{r_1}{2}}\right), \left(v, q^{\frac{r_2}{2}}\right)$. 由方程 (4) 可得, 方程 (9) 的基本解为 $\varepsilon = a + \sqrt{a^2 - 1}$, 设 $\bar{\varepsilon} = a - \sqrt{a^2 - 1}$,于是存在 $k_1 < k_2 \in \mathbf{N}$, 使得

$$q^{\frac{r_1}{2}} = \frac{\varepsilon^{k_1} - \bar{\varepsilon}^{k_1}}{\varepsilon - \bar{\varepsilon}}, \quad q^{\frac{r_2}{2}} = \frac{\varepsilon^{k_2} - \bar{\varepsilon}^{k_2}}{\varepsilon - \bar{\varepsilon}}. \tag{10}$$

设 Lucas序列

$$u_n(\varepsilon, \bar{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon^n - \bar{\varepsilon}^n}{\varepsilon - \bar{\varepsilon}}, \tag{11}$$

因此, 由 (10) 可得,

$$u_{k_1}(\varepsilon, \bar{\varepsilon}) \mid u_{k_2}(\varepsilon, \bar{\varepsilon}). \tag{12}$$

于是,序列 $u_{k_2}(a + \sqrt{a^2 - 1}, a - \sqrt{a^2 - 1})$没有本原素因子. 由引理 2, 3可得,此时必有 $k_2 = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 18, 30$. 但利用引理 2逐一验证可得, $k_2 = 5, 7, 8, 10, 12, 13, 18, 30$均不可能, 因此 $k_2 = 2, 3, 4, 6$.

由 (11) 可得, $u_1 = 1, u_2 = 2a, u_3 = 4a^2 - 1, u_4 = 8a^3 - 4a, u_5 = 16a^4 - 12a^2 + 1, u_6 = 32a^5 - 32a^3 + 6a$.

若 $k_2 = 2$, 则 $k_1 = 1$, 但由 (5), (10) 可得, 此不可能.

若 $k_2 = 3$, 则 $k_1 = 2$, 于是由 (5), (10) 得, $q^{\frac{r_1}{2}} = 2a$, $q^{\frac{r_2}{2}} = 4a^2 - 1$, 但 $\gcd(2a, 4a^2 - 1) = 1$, 也不可能.

若 $k_2 = 4$, 则 $k_1 = 3, 2$. 若 $k_1 = 3$, 则 $\gcd(u_3, u_4) = \gcd(4a^2 - 1, 8a^3 - 4a) = \gcd(4a^2 - 1, 2a) = 1$, 但由 (11) 可得, 这不可能. 若 $k_1 = 2$, 则由 (10) 得, $q^{\frac{r_1}{2}} = 2a$, $q^{\frac{r_2}{2}} = 8a^3 - 4a$, 于是, $q^{\frac{3r_1}{2}} - 2q^{\frac{r_1}{2}} = q^{\frac{r_2}{2}}$, 即

$$q^{r_1} - 2 = q^{\frac{r_2 - r_1}{2}}. \tag{13}$$

所以由 (13) 得, $q = 2, r_1 = 2, r_2 = 4$, 则 $a = 1$, 但由 (4), (5) 知, 这不可能.

若 $k_2 = 6$, 则 $k_1 = 5, 4, 3, 2$. 由于 $\gcd(u_6, u_5) = \gcd(32a^5 - 32a^3 + 6a, 16a^4 - 12a^2 + 1) = 1$, $\frac{u_6}{u_4} = \frac{16a^4 - 16a^2 + 3}{4a^2 - 2} \notin \mathbf{N}$, $\gcd\left(\frac{u_6}{u_3}, u_3\right) = \gcd(8a^3 - 6a, 4a^2 - 1) = 1$, 因此当 $k_1 = 5, 4, 3$时, 由 (10) 得, 这不可能. 当 $k_1 = 2$时, $\gcd\left(\frac{u_6}{u_2}, u_2\right) = \gcd(16a^4 - 16a^2 + 3, 2a) = 1, 3$, 于是, $a = 3$, 由 (10) 得, 这也不可能.

于是定理得证.

[参考文献]

[1] Mordell L J. Diophantine Equations[M]. London: Academic Press, 1969.

[2] Erdös P. On a Diophantine equations[J]. J London Math Soc, 1951, 26: 176-178.

[3] Cao Z F. On the diophantine equation $x^{2n} - Dy^2 = 1$[J]. Proc Amer Math Soc, 1986, 98: 11-16.

[4] Szymiczek K. L'équation $uv = w^2$ en nombres triangulaires[J]. Publ Inst Math, 1963, 3(17): 139-141.

[5] Guy R. Unsolved Problems in Number Theory[M]. 3rd ed. New York: Springer Verlag, 2004: 245-247.

[6] Szymiczek K. The equation $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = (z^2 - 1)^2$[J]. Eureka, 1972, 35: 21-25.

[7] Bennett M A. A question of Sierpinski on triangular numbers[J]. Electronic J Combinatorial Number Theory, 2005, 5(1): A25: 1-2.

[8] Mei H F. Extensions of Störmer's theorem[J]. J Yuzhou University, 1995, 12(4): 25-27.

[9] Bilu Y, Hanrot G, Voutier P M. Existence of primitive divisions of Lucas and Lehmer numbers[J]. J Reine Anger Math, 2001, 539: 75-122.

[10] Voutier P M. Primitive divisions of Lucas and Lehmer sequences[J]. Math Comp, 1995, 64: 869-888.

[责任编辑 :陆炳新]

2008年气候与传染病国际会议筹备会在我校召开

6月 3日至 5日 ,由我校数科院举办的“Strategic Planning Meeting for 2008 International Workshop on the Impact of Climate Changes on Waterborne and Vector-borne Diseases”(2008年气候与传染病国际会议筹备会)在我校召开 ,会议由数科院讲座教授、加拿大 York大学朱怀平教授主持 ,此次会议是为 2008年气候与传染病国际会议而开的一个筹备会议. 参加本次会议的有南京师范大学校长宋永忠等国内相关领域的著名教授 ,有来自加拿大、美国的专家学者 ,还有来自加拿大公共卫生部以及国家和江苏省疾病控制中心的专家和官员.

本次筹备会主要有两个内容 :一方面专家们分别根据自己的研究领域介绍了天气变化、血吸虫病防治、疟疾、水藻等方面的研究进展和问题 ;另一方面讨论了 2008年国际会议的形式、主题、大会的规模和资金支持 ,以及 2008年国际会议的后勤保障等方面的问题.

传染病建模研究自 2003年非典以来在国内方兴未艾 ,但气候变化对水生及媒传疾病的影响的研究才刚刚起步 ,并越来越得到广大科学家的关注. 同时 ,水藻问题已被列为明年国际会议的主题之一.

2008年的国际会议将在明年 5月在我校召开 , 我们相信在这次筹备会的基础上 , 2008年的国际会议将一定能够成功举行.

(数科院)