

2- 循环相容次序阵的 AOR 迭代的收敛域

陈永林

(南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 设 $A \in C^{n \times n}$ 是 2- 循环相容次序阵, 其 Jacob 阵 J 的非零特征值均为纯虚数. 记 $\alpha = \rho(J)$. 本文证明了 A 的 AOR 迭代阵 $\mathcal{L}_{r, \omega}$ (约定 $\omega > 0, r \neq 0$) 收敛当且仅当参数 ω, r 满足条件

$$0 < \omega < \frac{2}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad \omega + \frac{\omega - 2}{\alpha^2} < r < \frac{1}{2} \left[\omega + \frac{(2 - \omega)^2}{\omega \alpha^2} \right], \quad r \neq 0$$

或等价地,

$$\begin{cases} r \geq r_b, & 0 < \omega < \frac{2 + \alpha^2 - \alpha \sqrt{r^2 \alpha^2 + 4r - 4}}{1 + \alpha^2}, \\ r_b \geq r > -\frac{2}{\alpha^2}, & r \neq 0, \quad 0 < \omega < \frac{2 + r \alpha^2}{1 + \alpha^2}, \text{ 其中 } r_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}. \end{cases}$$

这一结果纠正了薛秋芳文给出的相应结果, 并指出了其中的 3 个问题.

[关键词] 2- 循环相容次序阵, AOR 迭代阵, 收敛域, 最优参数, 渐近收敛因子

[中图分类号] O241.6 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2007)03-0001-05

Convergence Region for the AOR Iteration Matrix of an 2-Cyclic Consistently Ordered Matrix

Chen Yonglin

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract Suppose $A \in C^{n \times n}$ is an 2-cyclic consistently ordered matrix and its non-zero eigenvalues of Jacobian matrix J has only pure imaginary. Set $\alpha = \rho(J)$. In this paper we prove that the AOR iteration matrix $\mathcal{L}_{r, \omega}$ (with $\omega > 0$ and $r \neq 0$) of A converges iff

$$0 < \omega < \frac{2}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad \omega + \frac{\omega - 2}{\alpha^2} < r < \frac{1}{2} \left[\omega + \frac{(2 - \omega)^2}{\omega \alpha^2} \right], \quad r \neq 0$$

or equivalently,

$$\begin{cases} r \geq r_b, & 0 < \omega < \frac{2 + \alpha^2 - \alpha \sqrt{r^2 \alpha^2 + 4r - 4}}{1 + \alpha^2}, \\ r_b \geq r > -\frac{2}{\alpha^2}, & r \neq 0, \quad 0 < \omega < \frac{2 + r \alpha^2}{1 + \alpha^2}, \text{ where } r_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}. \end{cases}$$

This result corrects the corresponding one obtained by Xue

Key words 2-cyclic consistently ordered matrix, AOR iteration matrix, convergence region, optimal parameter, asymptotic convergence factor

0 引言

对于从许多实际问题引出的大规模线性方程组

收稿日期: 2006-12-27 修回日期: 2007-03-15

基金项目: 江苏省自然科学基金重点项目 (BK2006725).

作者简介: 陈永林 (1938-), 教授, 主要从事计算数学与广义逆矩阵论的教学与研究.

$$Ax = b, \quad (1)$$

通常的解法是迭代法. 当系数阵 A 具有 p -循环结构时, SOR 法的研究已经相当深入, 取得了丰富的成果, 见文 [1] 的引言部分及其所附文献. 但是, AOR 法的研究似乎并不如 SOR 法那么深入. 文 [2] 在 A 为 $(1, 1)$ 相容次序阵、其 Jacob 阵 J 的特征值均为实数且 $\rho(J) < 1$ 的条件下, 给出了 AOR 法收敛的充要条件. 最近, 文 [3] 对于对角元均非零、其 Jacob 阵 J 的非零特征值均为纯虚数的 $(1, 1)$ 相容次序阵研究了 SOR 法, 但遗憾的是, 所给出的收敛条件、最优参数、与 SOR 法的比较等 3 个方面的结果均是不正确的.

本文的目的是给出其 Jacob 阵 J 的非零特征值均为纯虚数的 2-循环相容次序阵的 AOR 法收敛的充要条件, 并简要说明文 [3] 中的 3 个问题. 至于 AOR 法的最优参数、渐近收敛因子等问题, 因篇幅关系, 拟另文研究.

不失一般性, 假设 2-循环相容次序阵 $A \in C^{n \times n}$ 的分块形式为

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ B_2 & A_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中 A_1, A_2 均为非奇异阵. 文 [2, 3] 所说的对角元均非零的 $(1, 1)$ 相容次序阵, 经一排列变换可化为 (2) 式中所示的形式, 只是其中 A_1, A_2 均为非奇异对角阵.

令 $D = \text{diag}(A_1, A_2)$. 通常的块分解为

$$A = D - L - U, \quad (3)$$

其中 L 与 U 分别是下与上块三角阵. 记 $C_i = -A_i^{-1}B_i$, $i = 1, 2$ 则 A 的 AOR 迭代阵为

$$\mathcal{L}_{r\omega} = (D - rL)^{-1}[(1 - \omega)D + (\omega - r)L + \omega U] = \begin{bmatrix} (1 - \omega)I & \omega C_1 \\ \omega(1 - r)C_2 & (1 - \omega)I + \omega r C_2 C_1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中 ω, r 为非零实参数. A 的 Jacob 阵为

$$J = D^{-1}(L + U) = \begin{bmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

利用矩阵特征值与特征向量的定义关系式, 并注意 J^2 与 $C_1 C_2, C_2 C_1$ 有相同的非零特征值, 以及外推关系

$$\mathcal{L}_{r\omega} = (1 - \omega)I + \omega \mathcal{L}_{r1}, \quad (6)$$

不难导出下面两个引理.

引理 1^[3] 若 $0 \neq t \in \sigma(\mathcal{L}_{r1})$, 而 ζ 适合关系式

$$t^2 = (1 - r + rt)\zeta^2, \quad (7)$$

则 $\zeta \in \sigma(J)$. 反之, 若 $\zeta \in \sigma(J)$, 而 t 适合 (7) 式, 则 $t \in \sigma(\mathcal{L}_{r1})$.

引理 2^[3] 若 $1 - \omega \neq \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{r\omega})$, 而 λ 适合关系式

$$\lambda^2 - [2(1 - \omega) + \omega r \zeta^2]\lambda + (1 - \omega)^2 + \omega(r - \omega)\zeta^2 = 0 \quad (8)$$

则 $\zeta \in \sigma(J)$. 反之, 若 $\zeta \in \sigma(J)$, 而 λ 适合 (8) 式, 则 $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{r\omega})$.

特别地, 若 J 的非零特征值均为纯虚数, 亦即 J^2 仅有非正特征值, 则 $\mathcal{L}_{r\omega}$ 的特征值 λ 或等于 $1 - \omega$ 或与 $-J^2$ 的特征值 μ_j^2 之间成立着关系式

$$\lambda^2 + [2(\omega - 1) + \omega r \mu_j^2]\lambda + (\omega - 1)^2 + \omega(\omega - r)\mu_j^2 = 0 \quad (9)$$

为了以后论证方便起见, 假设矩阵 $-J^2$ 的不同特征值为

$$\alpha^2 \equiv \rho(J)^2 = \mu_1^2 > \mu_2^2 > \dots > \mu_s^2 \equiv \beta^2 \geq 0 \quad (10)$$

其中 α, β, μ_j 均为非负实数. 另外, 记

$$r_b \equiv \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad \tilde{r}_b \equiv \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} \quad (11)$$

r_b 与 \tilde{r}_b 分别是二次方程 $\alpha^2 x^2 + 4x - 4 = 0$ 与 $\beta^2 x^2 + 4x - 4 = 0$ ($\beta^2 > 0$) 的正根. 若 $\beta^2 = 0$ 则 $\tilde{r}_b = 1$ 易知, 当 $r > -2/\alpha^2$ 且 $r \neq 0$ 时, 我们有

$$r^2 \alpha^2 + 4r - 4 \geq 0 \Leftrightarrow r \geq r_b; \quad r^2 \beta^2 + 4r - 4 \geq 0 \Leftrightarrow r \geq \tilde{r}_b.$$

再引进记号:

$$\Delta(r, \mu_j^2) \equiv r^2 \mu_j^2 + 4r - 4, \Delta_j \equiv \Delta(r, \mu_j^2). \quad (12)$$

1 2-循环相容次序阵的 AOR 迭代阵的收敛域

关于矩阵 $A \in C^{n \times n}$ 的假设如上. 完全仿照文 [2] 在 J 的特征值均为实数且 $\rho(J) < 1$ 的条件下, 利用外推原理与关系式 (6)、(7) 推导 (1.1) 相容次序阵的 AOR 法收敛的充要条件的过程, 在 $r \neq 0$ 的约定下, 当 J^2 仅有非正特征值时, 容易得到 AOR 法收敛的两组充要条件:

$$(I) \begin{cases} r > -2/\alpha^2, r \neq 0 \\ 0 < \omega < \min \left\{ \min_{\substack{\Delta_j \geq 0 \\ j=1,2,\dots,k}} \frac{2+r\mu_j^2 - \mu_j \sqrt{\Delta(r, \mu_j^2)}}{1+\mu_j^2}, \min_{\substack{\Delta_j < 0 \\ j=k+1,\dots,s}} \frac{2+r\mu_j^2}{1+\mu_j^2} \right\}. \end{cases} \quad (13)$$

$$(II) \begin{cases} r < -2/\beta^2 \text{ (当 } \beta^2 > 0 \text{ 时)}, \\ 0 > \omega > \max \left\{ \min_{\substack{\Delta_j \neq 0 \\ j=1,2,\dots,k}} \frac{2+r\mu_j^2 - \mu_j \sqrt{\Delta(r, \mu_j^2)}}{1+\mu_j^2}, \min_{\substack{\Delta_j < 0 \\ j=k+1,\dots,s}} \frac{2+r\mu_j^2}{1+\mu_j^2} \right\}. \end{cases} \quad (14)$$

条件 (II) 显然不适用于 Jacob 阵 J 为奇异阵的情形. 为此, 我们用事先约定 $\omega > 0$ 的办法 (文 [2, 3] 用约定 $r > 0$ 的办法) 来剔除条件 (II). 这样一来, AOR 法 ($\omega > 0, r \neq 0$) 收敛的充要条件就是条件 (I). 但条件 (I) 需要进一步简化, 因为它不能给出 AOR 法的收敛域的清晰形象.

易知 $\frac{2+r\mu_j^2}{1+\mu_j^2}$ 在 $r < 2$ 时是 μ_j^2 的减函数, $\frac{2+r\mu_j^2 - \mu_j \sqrt{\Delta(r, \mu_j^2)}}{1+\mu_j^2}$ 在 $r > 0$ 时是 r 与 μ_j^2 两者的减函数.

现在将 $r > -2/\alpha^2$ 且 $r \neq 0$ 分为三段来研究条件 (I):

(1) $r \geq \tilde{r}_b$;

(2) $\tilde{r}_b \geq r \geq r_b$;

(3) $r_b \geq r > -2/\alpha^2$ 且 $r \neq 0$

情形 1 $r \geq \tilde{r}_b$. 此时对所有的 μ_j^2 均有 $\Delta(r, \mu_j^2) \geq 0$ 故由 (14) 式得到

$$0 < \omega < \min_{1 \leq j \leq s} \frac{2+r\mu_j^2 - \mu_j \sqrt{\Delta(r, \mu_j^2)}}{1+\mu_j^2} = \frac{2+r\alpha^2 - \alpha \sqrt{\Delta(r, \alpha^2)}}{1+\alpha^2}.$$

情形 2 $\tilde{r}_b \geq r \geq r_b$. 此时我们对给定的 $r \in [r_b, \tilde{r}_b]$, 假定有

$$\Delta(r, \mu_j^2) \geq 0, j = 1, 2, \dots, k, \text{ 而 } \Delta(r, \mu_j^2) < 0, j = k+1, \dots, s$$

对这样的 r , 由 (14) 式得到

$$\begin{aligned} 0 < \omega &< \min \left\{ \min_{1 \leq j \leq k} \frac{2+r\mu_j^2 - \mu_j \sqrt{\Delta(r, \mu_j^2)}}{1+\mu_j^2}, \min_{k+1 \leq j \leq s} \frac{2+r\mu_j^2}{1+\mu_j^2} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{2+r\alpha^2 - \alpha \sqrt{\Delta(r, \alpha^2)}}{1+\alpha^2}, \frac{2+r\mu_{k+1}^2}{1+\mu_{k+1}^2} \right\} \\ &= \frac{2+r\alpha^2 - \alpha \sqrt{\Delta(r, \alpha^2)}}{1+\alpha^2}. \end{aligned}$$

情形 3 $r_b \geq r > -2/\alpha^2$ 且 $r \neq 0$ 此时对所有的 μ_j^2 均有 $\Delta(r, \mu_j^2) \leq 0$ 由 (14) 式得到

$$0 < \omega < \min_{1 \leq j \leq s} \frac{2+r\mu_j^2}{1+\mu_j^2} = \frac{2+r\alpha^2}{1+\alpha^2}.$$

综合上面的讨论, 得到

定理 1 若约定 $\omega > 0, r \neq 0$ 则 AOR 法收敛当且仅当 ω, r 满足条件

$$\begin{cases} r \geq \tilde{r}_b, 0 < \omega < \frac{2+r\alpha^2 - \alpha \sqrt{\Delta(r, \alpha^2)}}{1+\alpha^2}, \\ r_b \geq r > -2/\alpha^2 \text{ 且 } r \neq 0, 0 < \omega < \frac{2+r\alpha^2}{1+\alpha^2}. \end{cases} \quad (15)$$

还可将条件 (15) 改写成等价的另一形式, 或许更方便直观. 为此, 先来找参数 ω 的上界. 从 (15) 可得

$$0 < \omega < \frac{2 + r\alpha^2}{1 + \alpha^2} \leq \frac{2 + r_b\alpha^2}{1 + \alpha^2} = \frac{2\sqrt{1 + \alpha^2}}{1 + \alpha^2} = \frac{2}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \omega_0.$$

另外, 函数 $\omega = \frac{2 + r\alpha^2 - \alpha\sqrt{\Delta(r, \alpha^2)}}{1 + \alpha^2}$ 与 $\omega = \frac{2 + r\alpha^2}{1 + \alpha^2}$ 可分别改写为

$$r = \frac{1}{2} \left[\omega + \frac{(2 - \omega)^2}{\omega\alpha^2} \right] \equiv f(\omega), \quad r = \omega + \frac{\omega - 2}{\alpha^2} \equiv g(\omega).$$

容易验明 $f(\omega_0) = g(\omega_0) = r_b$. 这表明曲线 $r = f(\omega)$ 与直线 $r = g(\omega)$ 均过点 (ω_0, r_b) . 函数 $r = f(\omega)$ 在 $(0, \omega_0]$ 上严格下降, 在 $[\omega_0, +\infty)$ 上严格上升, 在 $(0, +\infty)$ 上严格下凸.

定理 2 AOR 法 (约定 $\omega > 0, r \neq 0$) 收敛当且仅当 ω, r 满足条件

$$\begin{cases} 0 < \omega < \frac{2}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \equiv \omega_0, \\ g(\omega) \equiv \omega + \frac{\omega - 2}{\alpha^2} < r < \frac{1}{2} \left[\omega + \frac{(2 - \omega)^2}{\omega\alpha^2} \right] \equiv f(\omega), \quad r \neq 0 \end{cases} \quad (16)$$

由条件 (15) 或 (16) 给出的 AOR 法的收敛域 \mathcal{D} 是在 $\omega - 0 - r$ 平面上由 r 轴、曲线 $r = f(\omega)$ 与直线 $r = g(\omega)$ 所围成的开区域, 但需要挖去其中 ω 轴上的一条线段 (因 $r \neq 0$). 不难画出收敛域 \mathcal{D} 的图像.

注 1 若如文 [2, 3] 事先约定 $r > 0$ 则 AOR 法的收敛域要在 \mathcal{D} 中剔除由两条坐标轴与直线 $r = g(\omega)$ 所围成的三角形小区域: $0 > r > -2/\alpha^2, 0 < \omega < \frac{2 + r\alpha^2}{1 + \alpha^2}$.

注 2 推导 AOR 法收敛的充要条件还有另一途径. 先应用引理 2 若 $1 - \omega \in \sigma(\mathcal{L}_r \omega)$, 则由 $\rho(\mathcal{L}_r \omega) < 1$ 得到必要条件 $0 < \omega < 2$. 若 $1 - \omega \notin \sigma(\mathcal{L}_r \omega)$, 则对二次方程 (9) 应用根模小于 1 的判定法则, 可得: $\rho(\mathcal{L}_r \omega) < 1$ 当且仅当对一切 $\mu_j^2 \in \sigma(J^2)$, 下列不等式成立:

$$(1) -1 < (\omega - 1)^2 + \omega(\omega - r)\mu_j^2 < 1,$$

$$(2) -[1 + (\omega - 1)^2 + \omega(\omega - r)\mu_j^2] < 2(\omega - 1) + \omega r\mu_j^2 < 1 + (\omega - 1)^2 + \omega(\omega - r)\mu_j^2.$$

在 $\omega > 0$ 的约定下, 首先可证不可能有 $\omega \geq 2$ 从而也可得 $0 < \omega < 2$. 最后, 在 $0 < \omega < 2$ 的条件下, 从这些不等式可导出条件 (16), 详细的推导过程可参阅文 [4].

注 3 若 $\beta^2 > 0$ 即 Jacob 阵 J 非奇异时, 前面所说的条件 (II) 也可确定 AOR 法的一个收敛域. 若约定 $\omega < 0, r \neq 0$ 并记 $\hat{r}_\beta \equiv \frac{2}{1 - \sqrt{1 + \beta^2}}$, 则 AOR 法收敛当且仅当条件 (II) 成立, 或当且仅当参数 ω, r 满足条件

$$\begin{cases} \hat{r}_\beta \geq r, \quad 0 > \omega > \frac{2 + r\beta^2 - \beta\sqrt{r^2\beta^2 + 4r - 4}}{1 + \beta^2}, \\ -2/\beta^2 > r \geq \hat{r}_\beta, \quad 0 > \omega > \frac{2 + r\beta^2}{1 + \beta^2}, \end{cases}$$

或等价地, $0 > \omega > -\frac{2}{\sqrt{1 + \beta^2}}, \omega + \frac{\omega - 2}{\beta^2} > r > \frac{1}{2} \left[\omega + \frac{(2 - \omega)^2}{\omega\beta^2} \right]$.

2 关于文 [3] 中 3 个方面的问题

(1) 在参数 $r > 0$ 的约定下, 该文给出的 AOR 法的收敛域, 缺失了对应于 $\tilde{r}_b > r > r_b$ 的那块小区域. 例如, 对该文的例 1: $\alpha^2 = 5, \beta^2 = 3$ 此时 $\tilde{r}_b = \frac{2}{3}, r_b = 0.5798$ 所缺失的小区域是

$$0.5798 < r < \frac{2}{3}, \quad 0 < \omega < \frac{1}{6} [2 + 5r - \sqrt{(2 + 5r)^2 - 24}].$$

(2) 该文正确地找到了 $\rho(\mathcal{L}_r \omega)$ 在相应于 $r \geq \tilde{r}_b$ 以及 $0 < r \leq r_b$ 且 $\omega \geq r$ 两块小区域上的局部极小

值, 但没有研究相应于 $0 < r \leq r_b$ 且 $r \geq \omega$ 的这块小区域上的局部极小值, 当然更没有研究 $\rho(\mathcal{L}_{r,\omega})$ 在缺失小区域上的局部极小值, 所以无法找到 $\rho(\mathcal{L}_{r,\omega})$ 的全局最小值, 亦即 AOR 法的渐近收敛因子. 例如对于该文的例 1: $\alpha^2 = 5$, $\beta^2 = 3$, $\mathcal{L}_{r,\omega}$ 的渐近收敛因子不是该文所说的 0.3953 而是 0.3056 它在 $\omega = 0.3887$ 与 $r = 0.6290$ 时达到, 而这个极小化点 (0.3887, 0.6290) 恰是位于上面写出的缺失小区域内部.

(3) 该文说有时 AOR 法优于 SOR 法, 有时则相反. 由于该文所找到的极小值不是 $\rho(\mathcal{L}_{r,\omega})$ 在整个收敛域 \mathcal{D} 上的最小值, 所以将 AOR 法与 SOR 法作比较时难免出错. 例如对于该文的例 2: $\alpha^2 = 8$, $\beta^2 = 3$ 该文断言 SOR 法比 AOR 法好. 但实际上此时 AOR 法的渐近收敛因子不是该文所说的 0.5750 而应是 0.4766 它在极小化点 (0.2930, 0.6031) 上达到, 而此时 SOR 法的渐近收敛因子是 0.5 所以还是 AOR 法比 SOR 法好.

也有 AOR 法与 SOR 法不分优劣的例子. 例如对于 $\alpha^2 = 15$, $\beta^2 = 1$ 两者的渐近收敛因子均是 0.6 对于 $\alpha^2 = 5$, $\beta^2 = 0$ 两者的渐近收敛因子均是 0.4202 总而言之, 对此两例来说, AOR 法与 SOR 法的渐近收敛因子均为 $1 - r_b = \frac{\alpha^2}{(1 + \sqrt{1 + \alpha^2})^2}$

实际上可以证明: 对于 J^2 有非正谱的 2-循环相容次序阵来说, AOR 法决不劣于 SOR 法, 在一定的条件下, AOR 法优于 SOR 法.

但是, 对于最小二乘问题, 若均采用“2块划分法”^[5,6], 则可证明: 不论是 (列) 满秩情形还是亏秩情形, AOR 法与 SOR 法总是具有相同的渐近收敛因子 (在列满秩情形) 或渐近半收敛因子 (在亏秩情形). 关于列满秩与亏秩最小二乘问题的 SOR 法的研究分别见文 [5] 与 [6]. 文 [7] 对亏秩最小二乘问题的 SOR 法, SSOR 法与 AOR 法作了综合性研究, 严格地证明了 SSOR 法与 SOR 法有相同的渐近半收敛因子, 但 AOR 法与 SOR 法有相同渐近半收敛因子这一结论, 尚属猜测. 文 [8] 仅对亏秩最小二乘问题的 AOR 法提出了一些充分条件.

上面所说的几个一般性结论, 其证明十分复杂, 拟另文介绍.

[参考文献]

- [1] Hadjidimos A, Plemmons R J. Optimal p -cyclic SOR [J]. Numer Math. 1994, 67: 475-490.
- [2] 胡家骥. 线性代数方程组的迭代解法 [M]. 北京: 科学出版社, 1991.
- [3] 薛秋芳. 一类矩阵的 AOR 迭代收敛性分析及其与 SOR 迭代的比较 [J]. 高校计算数学学报, 2006, 28(1): 39-49.
- [4] 陈永林. 亏秩线性最小二乘问题的 AOR 法的半收敛性 [J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2005, 28(4): 1-7.
- [5] Markham T L, Neumann M, Plemmons R J. Convergence of a direct iterative method for large scale least squares problems [J]. Linear Algebra Appl. 1985, 69: 155-167.
- [6] Miller V A, Neumann M. Successive overrelaxation methods for solving the rank deficient linear least squares problem [J]. Linear Algebra Appl. 1987, 88/89: 533-557.
- [7] Chen X, Chen Y L. A necessary and sufficient condition for semiconvergence and optimal parameters of the SSOR method for solving the rank deficient linear least squares problem [J]. Appl Math Comput. 2006, 182: 1108-1126.
- [8] Tian Hong-jun. Accelerated overrelaxation methods for rank deficient linear systems [J]. Appl Math Comput. 2003, 140(2/3): 39-49.

[责任编辑: 陆炳新]