第 30卷第 3期 南京师大学报 (自然科学版) Vol 30 No. 3
2007年 9月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition) Sep, 2007

# 粘弹性流体的一个爆破准则与存在性结果

樊继山[1],高洪俊[2]

(1. 南京林业大学信息学院,江苏 南京 210037)

(2. 南京师范大学数学与计算机科学学院,江苏 南京 210097)

[**摘要**] 我们给出描述粘弹性流体的 Oldroyd方程的一个爆破准则,即 $\int_0^{T^*} \| \nabla u \|_{L^\infty} dt = +\infty$. 在较弱的条件下,即当初值 $\phi_0 \in W^{2,q}(\Omega)$, $3 < q \leq 6$, $u_0 \in H_0^1 \cap H^2$ 时,同样得到了强解的局部存在惟一性,从而改进了林芳华、柳春和张平的一个结果.

[**关键词**] 粘弹性流体,Oldroyd方程,爆破准则,局部强解

[**中图分类号**] O175. 29 [**文献标识码**] A [**文章编号**] 1001-4616(2007)03-0006-04

# A Blow-up Criterion and Existence Result on Hydrodynamics of Viscoelastic Fluids

Fan Jishan[1], Gao Hongjun[2]

(1. College of Information Sciences and Technology, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China)

(2. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

**Abstract:** In this paper, we obtain a blow-up criterion i. e. $\int_0^{T^*} \| \nabla u \|_{L^\infty} dt = +\infty$ and the existence and uniqueness of local strong solutions to an Oldroyd model in viscoelastic fluids under weaker conditions, $\phi_0 \in W^{2,q}(\Omega)$, $3 < q \leq 6$, $u_0 \in H_0^1 \cap H^2$, thus improves a result of others

**Key words:** viscoelastic fluids, Oldroyd system, blow-up criterion, strong solutions

## 0 引言

考虑描述粘弹性流体的 Oldroyd方程:

$$\mathrm{div} u = 0, \tag{1}$$

$$\phi_t + u \cdot \nabla \phi = 0, \tag{2}$$

$$u_t + u \cdot \nabla u + \nabla p - \triangle u = - \triangle \phi \cdot \nabla \phi, \tag{3}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

$$\phi(0, x) = \phi_0(x), \quad u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

这里未知函数为 $\phi$, $u$和 $p$ 不妨设 $\phi$为数量函数. 关于模型 (1) ～ (3) 的详细讨论,见文 [1]. 在 [1]中,作者设 $\phi_0 \in H^3$, $u_0 \in H_0^1 \cap H^2$ 证明 (1) ～ (5) 存在惟一局部强解,且设 $T^*$ 是最大有限存在时间,则有

$$\int_0^{T^*} \| \nabla u \|_{H^2}^2 dt = +\infty. \tag{6}$$

当 $\phi \equiv 0$时, (1) ～ (3) 即为标准的 Navier-Stokes方程, Beal, Kato and Majda[2] 证明若 $T^*$ 是最大有限存在时间,则有

**收稿日期**: 2007-05-28. **修回日期**: 2007-06-20.

**基金项目**:国家自然科学基金 (10301014) (10571087)、教育部博士点专项基金 (20050319001)、江苏省自然科学基金 (BK2006523)、江苏省教育厅自然科学基金 (05KJB110063)资助项目.

**作者简介**:樊继山 (1968—),博士,主要从事偏微分方程理论的教学与研究. E-mail: fanjishan@njfu. com. cn

**通讯联系人**:高洪俊 (1965—),教授,博士生导师,主要从事偏微分方程理论的教学与研究. E-mail: gaohj@njnu. edu. cn

$$\int_0^{T^*} \| \nabla u \|_{L^\infty} \mathrm{d}t = +\infty. \tag{7}$$

本文我们将证明

**定理 1** 设 $\Omega := \mathbf{T}^3, \phi_0 \in H^3, u_0 \in H^2$,设 $T^*$ 是最大有限存在时间,则有 (7) 成立.

**定理 2** 设 $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ 为有界光滑区域,$\phi_0 \in W^{2,q}(\Omega)$, $6 \geq q > 3$, $u_0 \in H_0^1 \cap H^2$,则存在正常数 $T$ 使问题 (1) ～ (5) 在 $[0, T]$ 上存在惟一强解 $(\phi, u, p)$ 满足

$$\phi \in L^\infty(0, T; W^{2,q}(\Omega)),\ \phi_t \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)),$$
$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{2,q}(\Omega)),$$
$$u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$
$$p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{1,q}(\Omega)).$$

## 1 *Blow-up*准则

本节我们证明定理 1.

**引理 1**

$$\frac{1}{2}\left(\int |u|^2 + |\nabla\phi|^2\right)\mathrm{d}x + \int_0^t \int |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(\int |u_0|^2 + |\nabla\phi_0|^2\right)\mathrm{d}x \tag{8}$$

**证明** (2) $\times(-\triangle\phi)$ + (3) $\times u$ 并积分,立即可得 (8).

**引理 2**

$$\|\nabla\phi(t)\|_{L^\infty} \leq \|\nabla\phi_0\|_{L^\infty} \exp\left(\int_0^{T^*} \|\nabla u(t)\|_{L^\infty} \mathrm{d}t\right). \tag{9}$$

**证明** (2) 两端关于 $x_i$ 求导,然后乘以 $\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|^{q-2}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$ $(q > 2)$,再关于 $i$ 求和,有

$$\frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int |\nabla\phi|^q \mathrm{d}x \leq \|\nabla u\|_{L^\infty} \int |\nabla\phi|^q \mathrm{d}x,$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\phi(t)\|_{L^q} \leq \|\nabla u\|_{L^\infty} \|\nabla\phi(t)\|_{L^q},$$

利用 Gronwall 不等式并令 $q \to +\infty$,即得 (9).

**引理 3**

$$\|\triangle u(t)\|_{L^2} + \|\nabla\triangle\phi(t)\|_{L^2}$$
$$\leq C(\|\triangle u_0\|_{L^2} + \|\nabla\triangle\phi_0\|_{L^2}) \exp\left(\int_0^{T^*} \|\nabla u(t)\|_{L^\infty} \mathrm{d}t + \|\nabla\phi\|_{L^\infty}^2 T^*\right). \tag{10}$$

**证明** 在证明过程中我们将运用

$$\triangle\phi \cdot \nabla\phi = \mathrm{div}\left(\nabla\phi \otimes \nabla\phi - \frac{1}{2}\mathrm{II}\nabla |\nabla\phi|^2\right).$$

方程 (3) 两端作用 $\triangle$,并乘以 $\triangle u$ 积分,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int |\triangle u|^2 \mathrm{d}x + \int |\nabla\triangle u|^2 \mathrm{d}x \leq 3\|\nabla u\|_{L^\infty} \int |\triangle u|^2 \mathrm{d}x + C\|\nabla\triangle u\|_{L^2}\|\triangle\phi\|_{L^4}^2 +$$
$$C\|\nabla\triangle u\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\|\nabla\triangle\phi\|_{L^2},$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$\|\triangle\phi\|_{L^4}^2 \leq C\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\|\nabla\triangle\phi\|_{L^2}, \tag{11}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int |\triangle u|^2 \mathrm{d}x + \int |\nabla\triangle u|^2 \mathrm{d}x \leq C\|\nabla u\|_{L^\infty} \int |\triangle u|^2 \mathrm{d}x + C\|\nabla\phi\|_{L^\infty}^2 \|\nabla\triangle\phi\|_{L^2}^2. \tag{12}$$

(2) 两端作用 $\nabla\triangle$,并乘以 $\nabla\triangle\phi$,然后运用 Kato and Ponce[3] 的换位子估计,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int |\nabla\triangle\phi|^2 \mathrm{d}x \leq C\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla\triangle\phi\|_{L^2}^2 + \|\nabla\triangle u\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\|\nabla\triangle\phi\|_{L^2}. \tag{13}$$

联立 (12) 与 (13) 式,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int |\triangle u|^2+|\nabla\triangle\phi|^2\mathrm{d}x\le C(\|\nabla u\|_{L^\infty}+\|\nabla\phi\|_{L^\infty}^2)\int|\triangle u|^2+|\nabla\triangle\phi|^2\mathrm{d}x,$$

由 Gronwall不等式立即可得 (10).

## 2 一个存在性结果

本节证明定理 2.我们可以设 $\phi_{0\varepsilon}\in H^3(\Omega)$,让 $\phi_{0\varepsilon}\to\phi_0$ in $W^{2,q}(\Omega)$,根据 [1]可知 (1) ～ (4) 以 $(\phi_{0\varepsilon}, u_0)$ 为初值的问题存在惟一局部强解 $(\phi_\varepsilon, u_\varepsilon, p_\varepsilon)$,然后作与 $\varepsilon$ 无关的先验估计,而由标准的紧性原理,让 $\varepsilon\to 0$,可显然完成定理存在性的证明.惟一性的证明是标准的,故略去.所以以下只需作先验估计即可,并且去掉下标 $\varepsilon$.

(3) $\times u_t$ 并积分,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int|u_t|^2\mathrm{d}x=\int(u\otimes u+\nabla\phi\otimes\nabla\phi):\nabla u_t\mathrm{d}x$$
$$\le(\|u\|_{L^4}^2+\|\nabla\phi\|_{L^4}^2)\|\nabla u_t\|,\tag{14}$$

利用 Gagliardo-Nirenberg不等式,有

$$\|u\|_{L^4}^2\le C\|u\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|^{\frac{3}{2}},\tag{15}$$

$$\|\nabla\phi\|_{L^4}\le C\|\nabla\phi\|^\alpha\|\triangle\phi\|_{L^q}^{1-\alpha}+C\|\nabla\phi\|,\ 1-\alpha=\frac{3q}{2(5q-6)},\tag{16}$$

将 (15), (16) 代入 (14),有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int|u_t|^2\mathrm{d}x\le C\|\nabla u\|^3+C\|\triangle\phi\|_{L^q}^{\frac{6q}{5q-6}}+C+\frac{1}{8}\|\nabla u_t\|^2,\tag{17}$$

(3) 两端关于 $t$求导数,然后乘以 $u_t$并积分,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|u_t|^2\mathrm{d}x+\int|\nabla u_t|^2\mathrm{d}x=2\int(u_t\otimes u+\nabla\phi_t\otimes\nabla\phi):\nabla u_t\mathrm{d}x$$
$$\le 2(\|u\|_{L^\infty}\|u_t\|+\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\|\nabla\phi_t\|)\|\nabla u_t\|,\tag{18}$$

利用 Sobolev嵌入定理,

$$\|u\|_{L^\infty}\le C(\|u\|+\|\triangle u\|),\tag{19}$$

$$\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\le C(\|\nabla\phi\|+\|\triangle\phi\|_{L^q}),\ q>N:=3.\tag{20}$$

由此,知

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|u_t|^2\mathrm{d}x+\int|\nabla u_t|^2\mathrm{d}x$$
$$\le C(1+\|\triangle u\|^2)\|u_t\|^2+C(1+\|\triangle\phi\|_{L^q}^2)\|\nabla\phi_t\|^2+\frac{1}{4}\|\nabla u_t\|^2,\tag{21}$$

将方程 (3) 改写为

$$-\triangle u+\nabla p=f:=-u_t-u\cdot\nabla u-\triangle\phi\cdot\nabla\phi,\tag{22}$$

利用 Stokes方程的 $L^2$ 理论[4],有

$$\|\triangle u\|+\|\nabla p\|\le C\|f\|\le C\|u_t\|+C\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\|\triangle\phi\|+C\|u\|_{L^4}\|\nabla u\|_{L^4}$$
$$\le C\|u_t\|+C(1+\|\triangle\phi\|_{L^q}^2)+C\|u\|^{\frac{1}{4}}\|\nabla u\|\cdot\|\triangle u\|^{\frac{3}{4}},\tag{23}$$

所以有

$$\|\triangle u\|+\|\nabla p\|\le C\|u_t\|+C(1+\|\triangle\phi\|_{L^q}^2)+C\|\nabla u\|^4.\tag{24}$$

(2) 两端作用 $\nabla$,有

$$\|\nabla\phi_t\|\le(\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\|\nabla u\|+\|u\|_{L^\infty}\|\triangle\phi\|)$$
$$\le C(1+\|\triangle\phi\|_{L^q})\|\nabla u\|+(1+\|\triangle u\|)\|\triangle\phi\|_{L^q}\le C(1+\|\triangle u\|)(1+\|\triangle\phi\|_{L^q}),\tag{25}$$

将 (24), (25) 代入 (21) 得

$$\frac{d}{dt}\int |u_t|^2 dx + \int |\nabla u_t|^2 dx \le f_1(\|\nabla u\|, \|u_t\|, \|\triangle\phi\|_{L^q}), \tag{26}$$

其中 $f_1(\cdot,\cdot,\cdot)$ 是其每个变量的单增函数.

(2) 两端作用 $\triangle$,有

$$\triangle\phi_t + u\cdot\nabla\triangle\phi + \triangle u\cdot\nabla\phi + 2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\nabla\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = 0,$$

上式两端同乘以 $|\triangle\phi|^{q-2}\triangle\phi$,并积分,有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int|\triangle\phi|^q dx &\le C\|\nabla u\|_{L^\infty}\int|\triangle\phi|^q dx + C\|\triangle u\|_{L^q}\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\|\triangle\phi\|_{L^q}^{q-1} \\ &\le C(1+\|\triangle u\|_{L^q})(1+\|\triangle\phi\|_{L^q}^q),\end{aligned} \tag{27}$$

对 Stokes 方程 (22) 应用 $L^q$ 理论[4],有

$$\begin{aligned}\|\triangle u\|_{L^q} + \|\nabla p\|_{L^q} &\le C\|f\|_{L^q} \le C\|f\|_{L^q} \\ &\le C(\|u_t\|_{L^q} + \|\nabla\phi\|_{L^\infty}\|\triangle\phi\|_{L^q} + \|u\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^q}).\end{aligned}$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式:

$$\|u\|_{L^\infty} \le C\|u\|_{L^6}^{\alpha}\|\triangle u\|_{L^q}^{1-\alpha},\ 1-\alpha = \frac{q}{5q-6},$$

$$\|\nabla u\|_{L^q} \le C\|\nabla u\|_{L^2}^{\theta}\|\triangle u\|_{L^q}^{1-\theta},\ 1-\theta = \frac{3q-6}{5q-6}.$$

从而有

$$\|\triangle u\|_{L^q} + \|\nabla p\|_{L^q} \le (\|\nabla u_t\| + 1 + \|\triangle\phi\|_{L^q}^2 + \|\nabla u\|^{\frac{6q-6}{6q-7}}). \tag{28}$$

将其代入 (27),有

$$\frac{d}{dt}\int|\triangle\phi|^q dx \le f_2(\|\nabla u\|, \|u_t\|, \|\triangle\phi\|_{L^q}) + \frac{1}{8}\|\nabla u_t\|^2, \tag{29}$$

其中 $f_2$ 为与 $f_1$ 有相同性质的函数.

联合 (17), (26) 与 (29) 得

$$\frac{d}{dt}\int(|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |\triangle\phi|^q)dx + \int|\nabla u_t|^2 dx \le f_3(\|\nabla u\|, \|u_t\|, \|\triangle\phi\|_{L^q}),$$

其中 $f_3$ 为与 $f_1$ 有相同性质的函数. 因此,存在正常数 $T$,使

$$\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\triangle\phi\|_{L^q}^q + \int_0^T\int|\nabla u_t|^2 dxdt \le C \quad \text{in} \quad [0,T]. \tag{30}$$

由 (24) 知

$$\|\triangle u(t)\| + \|\nabla p(t)\| \le C, \quad \text{in} \quad [0,T], \tag{31}$$

由 (25) 知

$$\|\nabla\phi_t\| \le C \quad \text{in} \quad [0,T], \tag{32}$$

由 (27) 知

$$\int_0^T \|\triangle u\|_{L^q}^2 + \|\nabla p\|_{L^q}^2)dt \le C \quad \text{in} \quad [0,T]. \tag{33}$$

从而完成定理的证明.

## [参考文献]


[1] Lin F H, Liu C, Zhang P. On hydrodynamics of viscoelastic fluids[J]. Comm Pure Appl Math, 2005, LVIII: 1 437-1 471.

[2] Beale J T, Kato T, Majda A. Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3 - D Euler equations[J]. Commun Math Phys, 1984, 94: 61-66.

[3] Kato T, Ponce G. Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations[J]. Comm Pure Appl Math, 1988, XLI: 891-907.

[4] Temam R. Navier-Stokes Equations[M]. Amsterdam: North-Holland, 1977.


[责任编辑:陆炳新]