第 30卷第 3期 南京师大学报 (自然科学版) Vol 30 No. 3
2007年 9月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition) Sep, 2007

欧拉应用分析于数论研究综述

唐志华[1],徐沥泉[2],徐利治[3]

(1. 江苏教育学院学前分院,江苏 南京 210004)
(2. 无锡市教育研究中心,江苏 无锡 214001)
(3. 大连理工大学数学系,辽宁 大连 116024)

[摘要] 扼要而又系统地综述了欧拉应用分析于数论研究的早期工作. 其中有许多激动人心的数论公式与定理. 例如,关于自然数方幂倒数的无穷和公式、关于 Zeta函数的欧拉乘积公式、欧拉对 4平方数定理的思考与证明,及其欧拉在解决这些问题的同时所创造的有关数论函数、分拆函数和理想数的概念等等. 这些概念、定理或公式都是欧拉首先发现并加以精确论证的. 与众不同的是,他善于把一个纯数论问题变换为一个分析问题,事实上欧拉的想法更具一般性. 它足以展示欧拉的数学工作的深刻与广博. 最后我们引述了欧拉发现的数论中几个著名的级数公式和二次互反性定律,它们都是欧拉在数论文库中留给我们的宝贵遗产.

[关键词] L. 欧拉,数论,伯努利数,幂级数展开,欧拉乘积
[中图分类号] O156 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2007)03-0034-05

Early Study in Which Leonhard Euler Made Use of the Mathematical Analysis to the Research of Number Theory

Tang Zhihua[1], Xu Liquan[2], HSU Leetsch Charles[3]

(1. Nanjing Higher Normal Preschool, Nanjing 210004, China)
(2. Wuxi Teaching and Research Center, Wuxi 214001, China)
(3. Department of Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Here presented is a brief introduction of Euler's study. There are many exciting formulas and theorems such as Euler's infinite summation formula about reciprocal sum with powers of the natural numbers and Euler's infinite product representation. Another example is Euler's thinking and proving about the proof of Fermat's four-square theorem, yielding the arithmetical function, the partition function, and prime ideal. These conceptions, theorems, and formulas were all first discovered accurately by Euler's demonstrations. Euler was extraordinary at converting a problem of number theory into mathematical analysis. In fact, Euler's ideas have become more generalized. These facts are enough to prove that he had extensive and deep knowledge of his subject. Finally, we quoted a few famous examples of power series, and the law of quadratic reciprocity which Euler found. They are all part of our precious legacy in the library of number theory from Euler.

Key words: Leonhard Euler, number theory, Bernoulli numbers, power series expansion, Eular product

如所知,自从 Dirichlet之后,分析的方法在数论的研究中起到了非常重要的作用. 其实,分析与数论之间的相互关系在欧拉的工作中已经初见端倪[1,2]. 以下我们将力图构划出这一发展的初步轮廓.

数论中最重要的和最有趣味的研究对象渊源于几何级数 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$的求和问题. 它最早由 Nicole Oresme (1323～1382年)作出. 由于分析学的开始,利用逐项积分和 Abel's极限理论等导致了另一些级数. 其中包括$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)}$等等.

收稿日期: 2007-05-28. 修回日期: 2007-06-15.
作者简介:唐志华 (1965—),副教授,主要从事数学史、数学方法论和数学教育的研究. E-mail: tangzhihua@china.com
通讯联系人:徐利治 (1920—),教授,中国科学院数学所顾问. 主要从事函数论和组合数学的研究.

上述级数的发现,当时尽管是运用了一种朴素的与较为肤浅的方法,然而它却使得整数序列与它所满足的一种简单的数学原理之间建立起了联系,从而产生了超越函数这个工具.下面我们来介绍一个特别重要的例子,它与所谓的 Bernoulli(伯努利)数有关,在数学中甚至在现代数学中都有着非常重要的应用.其函数为 $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$,在单位圆盘内,它有一个收敛的幂级数表达式:$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n x^n}{n!}$, $|x|<1$.其中的系数 B_n 称为伯努利数(它是 Jacob Bernoulli发现的).利用两个幂级数的 Cauchy(柯西)积:

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{r}a_k b_{r-k}\right)x^r$$

可得关于求伯努利数的递归公式,如 $B_n=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{B_k n!}{k!(n-k+1)!}$, 或记为 $B_0=1,\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k B_k=0, n\geq 2$[3].所有的伯努利数 B_n 均为有理数,且有:

$$B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}, B_2=\frac{1}{6}, B_3=0, B_4=-\frac{1}{30}, B_5=0, B_6=\frac{1}{42}, B_7=0, B_8=-\frac{1}{30}, \cdots$$

欧拉一直计算到 B_{30}. B_k 这一符号于 1713年首次出现在 Jacob Bernoulli的手稿中,伯努利用它来计算自然数的方幂的和 $\sum_{\nu}\nu^k$, $1\leq\nu\leq n-1$,颇具趣味的这类和的计算问题甚至在费马之前就已经开始,而费马本人也对此做了许多工作.今天,伯努利数不仅出现在数论中的许多地方,而且也出现在代数拓扑等其它领域,人们已经发现它们与特别深刻的中心问题有关.以下我们会看到这些数的某些更为基本的性质.

首先,让我们用 $(n+1)$ 乘以递归公式的两端,得 $\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^k B_k=0$.用函数 $p(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$ 标记此式,其中 x 代之以 B,且不把 x^k 看作是 x 的方幂而作为相应的伯努利数 B_k,即得:$p(B):=\sum_{k=0}^{n}a_k B_k$, 那么,该递推公式可以表为非常紧致的式子 ※: $(1+B)^{n+1}-B^{n+1}=0$.

从上面的数表 (B_0 至 B_{12} 等)我们可以得到如下的启示:

注 当 k 是大于 1的奇数时, $B_k=0$.

下面我们引入定理 1,这是欧拉最激动人心的定理之一.

定理 1[1]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=2^{2k-1}\pi^{2k}|B_{2k}|/(2k)!.$$

特别地,当 $k=1,2,3$ 时可得:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\cdots,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},\cdots,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}.$$

推论[1] $|B_{2k}|$ 从而 $\sqrt[2k]{|B_{2k}|}\to\infty$ 当 $k\to\infty$ 时.

由于研究 $\sum n^{-2k}$ 这一级数,导致了另一个级数 $\sum n^{-s}$, $s\in\mathbf{N}$ 这里当 $s=2k+1$ 时便产生了麻烦.以致在今天,还没有找到类似于公式 ※的一个明确的级数表达式. Minkovski(敏可夫斯基)给出了这些式子有趣的和不同的解释.欧拉也许是第一位看到这些级数能应用于数论研究,他关于素数有无限多个的存在性的证明就用到了调和级数 $\sum n^{-1}$ 发散的这一事实.

如果我们假设素数只有有限多个,把乘积 $\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$(注,这里 p 取遍所有的素数,因为假设素数有限,所以 p 是有限的)中的每一个因子按照几何级数展开,并且根据算术基本定理中所说的每一个自然数都可以惟一地表为若干个素数的幂的乘积这一事实,可得到

$$\infty>\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=\prod_p(1+p^{-1}+p^{-2}+\cdots)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

显然,这缺乏说服力!

L. P. G Dirichlet (1805～1859年)是系统地把分析法引入数论问题的人.此外他还考察了 $\sum n^{-s}$ 这

个级数中 s取所有实数的情形. 而 B. Riemann(黎曼)则允许 s取复数,即把 s推广到复数的情形.

对 $s \geq 1+\varepsilon$ $(s \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0)$, $\sum n^{-(1+\varepsilon)}$ 优化了级数 $\sum n^{-s}$,因为 $\sum n^{-s}$当 $s \geq 1+\varepsilon$时一致收敛. 它定义为 s的连续函数,用称之为"Zeta"函数的级数来表示,一般记作 $\zeta(s)$,可得

$$\frac{1}{s-1} \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} \mathrm{d}x \leq \zeta(s) \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} \mathrm{d}x \leq 1 + \frac{1}{s-1},$$

进而, $\lim\limits_{s \to 1} \zeta(s)(s-1) = 1$,特别地 $\lim\limits_{s \to 1} \zeta(s) = \infty$. Zeta函数在 $s=1$处有一个单极点(1阶极点).

假如我们把无穷乘积 $\prod\limits_p (1-p^{-s})^{-1}$的每一个因子都按照几何级数展开,并且每一次都运用算术基本定理,可以得到与上面类似的结果. 对 $s>1$的所有的实数,欧拉乘积的表示式如下[4]:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}.$$

定理 2 $\sum\limits_p \frac{1}{p}$ (p是素数)发散.

证明 $\lim\limits_{s \to 1}(\log \zeta(s)) = \infty$因为 $\lim\limits_{s \to 1} \zeta(s) = \infty$. 由于

$$\log \zeta(s) = \log\left(\prod_p (1-p^{-s})\right)^{-1} = \sum_p \log\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{-ns}}{n} = \sum_p p^{-s} + \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p^{-ns}}{n},$$

显而易见, $\sum\limits_p \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{p^{-ns}}{n}$收敛. 故当 $s \to 1$时, $\sum\limits_p p^{-s}$发散.

从定理2,我们可以得到关于素数分布的第一个结论:

素数比自然数的平方数要稠密得多. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$,而 $\sum\limits_p \frac{1}{p}$却发散. 另外由定理1我们可以看到级数 $\sum\limits_p \frac{1}{p}$发散得非常慢,它的部分和从第5千万位之后的第一个数仍小于4.

欧拉思考方式的另一个典型例子是试图证明4平方数定理,即费马所述:"任一自然数都可表为4个自然数的平方和". 该问题吸引了他数十年,但始终没有给出完整的证明(对该定理的改进与化简,并给予证明的第一人应归功于拉格朗日). 欧拉的方法是试图借助函数 $f(x) = 1 + x + x^4 + x^9 + x^{25} + \cdots$,这里 $|x| < 1$. 把函数 $f^4(x)$展开成幂级数 $f^4(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \tau(n) x^n$之后,再比较它们的系数,这里 $\tau(n)$表示可以把 n改写成4个数的平方和的数目. 为了证实费马的猜测,只要能够揭示 $\tau(n) > 0$,但这恰恰是非常困难的. 多年之后, C. G. J. Jacobi利用椭圆函数的理论成功地解决了. 然而我们认为,当我们看到欧拉把一个纯数论问题变换为一个分析问题的时候,是多么地不可思议. 事实上欧拉的想法更具一般性. 正如我们马上要看到的在我们的一个相似问题的讨论中,对自然数的一个分拆是作为另一些自然数的和来描述的. 所谓两个分拆相同与否,只要看其被加数的序列相同与否. 因此,我们总可以把对 n的一个分拆假设为

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k, \text{这里 } n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k.$$

设 $p(n)$是 n的第 n个分拆. 1663年,莱布尼兹在给约翰·伯努利一世的一封信中提议对这些部分和进行进一步的审查. 对任意的 n要计算 $p(n)$极为困难,正如上面考虑的 $\tau(n)$,在这种情形下 $p(n)$是一个数论函数,即一个函数 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. 欧拉把每一个这样的函数匹配给一个级数 $F(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n) x^n$, $f(0) := 1$. F称之为 f的生成函数. 对自然数 n,如若 $f(n)$不是非常迅速地趋向于无穷大,那么这些级数的收敛半径是正的. 当 f是分拆函数时, $\forall\ |x| < 1$,这些级数是收敛的. 欧拉给出了下述定理:

定理 3 对 $|x| < 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \prod\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m}$, $(p(0) = 1)$.

证明 首先我们按几何级数展开每一个因子,可得

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)\cdots,$$

先不管它是否收敛,我们把等式右边的级数一项一项地乘起来,只要它们是多项式就总可以按照 x的方幂

来进行排列(不妨假设为升幂排列).那么我们可以得到下列形式的幂级数 $\sum a(k)x^k\ (a(0):=1)$.现在我们必须证明 $a(k)=p(k)$.在第1个级数中取一项 x^{k_1},第2个级数中取一项 x^{2k_2},一般地,在第 m 个级数中取一项 x^{mk_m}.那么这些项的积便是 $x^{k_1}x^{2k_2}\cdots x^{mk_m}=x^k$.这里,$k=k_1+2k_2+\cdots+mk_m$.这最后的一个式子便是数 k 的一个分拆(注,这个分拆应记为 $p_m(k)$,它不等于 $p(k)$).因为它只是从其中 m 个幂级数中各取一项相乘,即不大于 m 的 k 的一个分拆数.其中 $p_m(k)\le p(k)$.只有当 $m\to\infty$ 时 $p_m(k)=p(k)$.其中的任意一项都给出一个 k 的分拆;反之,k 的任意一个分拆也对应着一项,而且这个对应是一对一的.所以 $a(k)=p(k)$.这还不是一个完整的证明,下面我们来把它补全.

首先设 $x\in[0,1)$,引进函数 $G_m(x)=\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-x^k}$,$G(x)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}=\lim_{s\to 1}G_m(x)$.

由此连乘积之定义,$G(x)$ 必在 $x\in[0,1)$ 上收敛.因为级数 $\sum x^k$ 是收敛的.对 $x\in[0,1)$,级数 $G_m(x)$ 单调递增.因此,对每一个 m,且 $x\in[0,1)$,$G_m(x)\le G(x)$.因为 $G_m(x)$ 是由有限个绝对收敛级数的乘积组成的,所以 $G_m(x)$ 也绝对收敛,且能表示为 $G_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_m(k)x^k$,这里 $p_m(k)$ 表示把 k 分拆成不大于 m 的 k 的分拆数,且规定 $p_m(0):=1$.那么,当 $m\ge k$ 时,$p_m(k)=p(k)$.因为 $p_m(k)\le p(k)$,当 $m\to\infty$ 时,可得 $\lim_{m\to\infty}p_m(k)=p(k)$.

把 $G_m(x)$ 分解为两部分:$G_m(x)=\sum_{k=0}^{m}p_m(k)x^k+\sum_{k=m+1}^{\infty}p_m(k)x^k=\sum_{k=0}^{m}p(k)x^k+\sum_{k=m+1}^{\infty}p_m(k)x^k$,因为 $x\ge 0$,故 $\sum_{k=0}^{m}p(k)x^k\le G_m(x)\le G(x)$.因此,$\sum_{k=0}^{\infty}p(k)x^k$ 收敛.又因为 $p_m(k)\le p(k)$,故 $\sum_{k=0}^{\infty}p_m(k)x^k\le\sum_{k=0}^{\infty}p(k)x^k\le G(x)$.因此,级数 $\sum_{k=0}^{\infty}p_m(k)x^k$ 对所有的 m 一致收敛,从而

$$G(x)=\lim_{m\to\infty}G_m(x)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}p_m(k)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{m\to\infty}p_m(k)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}p(k)x^k.$$

至此,对 $x\in[0,1)$ 欧拉公式得证.完全类似地,我们可证明当 $x\in(-1,0]$ 的情形.由于分析的连续性,可以证明欧拉公式在 $x\in(-1,1)$ 成立.

如果用 $q(n)$ 表示把 n 分拆为奇数时 n 的分划数,$r(n)$ 表示把 n 分拆为另一些不同分拆的分划数,那么,q 和 r 的发生函数可以用类似的方法找到.

定理4 (欧拉).$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}$ 是 q 的一个发生函数,而 $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$ 则是 r 的一个发生函数.前者可以用类似于定理1的方法加以证明,后者则是显然的.

定理5 (欧拉).$q(n)=r(n)$.

其证明并不难,只要借助于相应的发生函数即可.我们恰好看到它们发生迭合.证明如下:

比较系数,事实上,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}.$$

如果不借助于发生函数这个工具,定理的证明是困难的.例如,Hardy、Wright 是用数论本身加以证明的.

最后我们给出欧拉的另一条定理.

让我们关注 $\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)$,这是 p 的发生函数的倒数.把乘积展开即为

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\cdots=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\cdots$$

这个级数并不遵循一个明显的规律.欧拉证明了:

定理6

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{\frac{3k^2+k}{2}}:=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(x^{\frac{3k^2-k}{2}}+x^{\frac{3k^2+k}{2}}\right).$$

第一个给出此结果“自然的”证明的人是 Jacobi,他再次在椭圆函数理论的范围内给出证明.

在本文的结尾,我们将再给出几个例子,它足以展示欧拉的数学工作的深刻与广博.其中的某些例子反映了他的深刻的洞察力,另一些例子则是非常奇特的,其中的每一个例子都与数论有着某种联系.这些结果中的某些问题我们在以后还将更为详细地去讨论它们.

以下的几个公式看起来并不难理解,但要证明它在当时来说却并非易事.例如:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad \int_0^{\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

于是就有了另一些公式,要证明它们是非常困难的,乍看起来更令人费解,例如:

$$\frac{1-2^{m-1}+3^{m-1}-4^{m-1}+\cdots}{1-2^{-m}+3^{-m}-4^{-m}+\cdots}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(m-1)(2^m-1)}{(2^{m-1}-1)\pi^m}\cos\frac{m\pi}{2}.$$

如果人们对它进一步观察,那么就会发现它就是关于Zeta函数的函数方程.在欧拉的通信集与论文集中有着各种精确的定理,对他们欧拉并没有给出证明,甚至连确切的说明也没有.其中有些数如

$$d=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,15,16,18,21,\cdots,1\,320,1\,365,1\,848\ (\text{总共 }65\text{个}).$$

具有如下的性质:

如果$ab=d$,且若一个数可以惟一地表为ax^2+by^2的形式,这里ax,by与素数相关,那么这个数就具有形式$p,2p$或者2^k,这里p是素数.特别地对任何大于1的奇数,它若能惟一地表为这种形式的话,则必为素数.欧拉称这些数为“理想数(适宜数)”,因为它们可以用于对于素性的试验.对$d=57(19\times 3)$,他给出了如下的一个应用,1000003就是一个素数,因为它可以惟一地表为$19\cdot 8^2+3\cdot 577^2$.当$d=1\,848(=1\times 1\,848)$,便产生18518807这一素数,它可惟一地表为$197^2+1\,848\cdot 100^2$.

欧拉的65个数是否是仅有的“理想数”,目前除了$d=1,2,3$的情形外仍未解决.欧拉提示了它们具有所需性质.在$d=1$的情形下,显然它直接与费马的2平方数定理相关.

下面显然是一个极妙的论述:x^2+x+41这个式子中当$x=0,1,2,\cdots,39$时都是素数.

当然人们可以很容易地一一检验.但是,这样的一个结果是怎样发现的,其理由是什么?(域$\mathbf{Q}\sqrt{-163}$有类数1.)

容易验证下列纯代数公式是成立的(这里应用欧拉的记号,以xx代之以x^2):

$$(aa+bb+cc+dd)(pp+qq+rr+ss)=xx+yy+zz+vv.$$

这里,$x=ap+bq+cr+ds,\ y=aq-bp\pm cs\mp dr,\ z=ar\mp bs-cp\pm dq,\ v=as\pm br\mp cq-dp$.

显然,它表示4个平方数的和与另4个平方数的和的乘积等于又一个4个平方数的和.它也意味着人们在费马的4平方数定理的证明中只限于(涉及到)素数.

我们运用二次互反性定理的陈述来结束本文的讨论.这一定律是由欧拉发现的,但没有给予证明:

一个素数s是一个奇素数p的一个平方模数,当且仅当$(-1)^{\frac{1}{2(p-1)}}p$是一个平方模数s.

以上扼要而又较为系统地综述了欧拉应用分析于数论研究的早期工作,它们都是欧拉在数论文库中留给我们的宝贵遗产.据统计,欧拉留给后人的丰富的科学遗产中,分析、代数、数论占40%;其它的覆盖了物理学、力学、几何学、天文学、弹道学与航海学等各个领域.尽管欧拉是属于两个多世纪前的数学家,但是他的富于成果的治学方法、献身科学的奋斗精神和纯洁高尚的道德风范,却是值得后人永远学习的[5]、[6].

[参考文献]

[1] Scharlau W, Hans Opolka. From Fermat to Minkowski[C]//Lectures on Theory of Numbers and its Historical Development. New York: Springer-Verlag, 1985: 13-31.

[2] Kline M. Mathematical Thought From Ancient to Modern Times[M]. New York: Oxford University Press, 1990.

[3] 华罗庚, 王元. 数论在近似分析中的应用[M]. 北京:科学出版社, 1978: 128-129.

[4] 潘承洞,潘承彪. 初等代数数论[M]. 济南:山东大学出版社, 1991: 112-117.

[5] 徐利治. 论数学方法学[M]. 济南: 山东教育出版社, 2001: 598-600.

[6] 徐沥泉. 首届一指的数学大师——纪念欧拉诞生300周年[J]. 自然杂志, 2007, 29(3): 183-186.

[责任编辑:陆炳新]