一类时变控制系统的稳定性研究

冯　宁, 张　涛

(常州轻工职业技术学院, 江苏 常州, 213164)

[摘要]　利用 Lyapunov函数法, 讨论了非线性时变控制系统第一类标准型的绝对稳定性和第二类标准型、一般非线性时变控制系统及时变大系统的渐近稳定性, 得到了时变控制系统平凡解绝对稳定、渐近稳定的一些充分性判据, 这些判据只与系统自身的参数有关.

[关键词]　时变控制系统, Lyapunov函数, 绝对稳定性, 渐近稳定性

[中图分类号] O175.13　[文献标识码] A　[文章编号] 1001-4616(2007)04-0036-05

Study of the Stability of a Type of Time-Variant Control Systems

Feng Ning, Zhang Tao

(Changzhou Institute of Light Industry Technology, Changzhou 213164, China)

Abstract By using Lyapunov function, the absolute stability of the first standard type of nonlinear time-variant control systems and the asymptotic stability of the second standard type of nonlinear time-variant control system, general nonlinear time-variant control systems and time-variant large-scale systems are studied, and some sufficient criterions are achieved. These criteria are just concerned with the parameters of itself.

Key words time-variant control system, Lyapunov function, absolute stability, asymptotic stability

0　引言

在分析与设计一个控制系统时, 常有多种性能指标需要考虑, 其中最为重要的是系统的稳定性问题. 从工程实际控制的角度看, 不稳定的系统不能实现预期的目标. 然而, 对于时变非线性控制系统的稳定性研究较常系数系统而言更为复杂, 研究的成果不是很多, 已有的论文中主要是针对一些特殊的时变线性和非线性控制系统的研究, 采用的方法多是利用 Lyapunov函数法、系统分析理论及引用集合绝对稳定概念研究中间变量 σ的情况, 或利用关于部分变元绝对稳定来研究系统的渐近或绝对稳定性. 本文通过构造 Lyapunov函数, 结合比较原理和许瓦兹不等式, 对时变控制系统的绝对稳定性或渐近稳定性进行了研究, 得到了只与系统自身参数有关的充分条件, 这些充分条件形式简洁, 易于检验, 对于研究时变系统的稳定性, 具有一定的指导作用.

1　引理

引理 1[1]　设 $\boldsymbol{B}$是一个有负的对角元素而所有其它元素非负的矩阵, $\boldsymbol{x}(t, x_0, t_0)$及 $\boldsymbol{y}(t, x_0, t_0)$分别是 $\dot{\boldsymbol{x}} \leqslant \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$, $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$的解, 且 $x_0 = y_0$, 则当 $t_0 \leqslant t < +\infty$时, $\boldsymbol{x}(t, x_0, t_0) \leqslant \boldsymbol{y}(t, x_0, t_0)$.

引理 2[2]　设 $a > 0$, $b > 0$, 则当 $0 \leqslant z < +\infty$时, 有 $-az^2 + bz \leqslant -\frac{a}{2}z^2 + \frac{b^2}{2a}$.

引理 3[3]　对于常系数控制系统, 若系数矩阵$\boldsymbol{A}$满足洛茨——霍维兹条件 ($\boldsymbol{A}$的特征根都具有负的实

收稿日期: 2007-03-20 修回日期: 2007-05-05.
基金项目: 江苏高校高新技术产业发展基金(JHZD05-037)资助项目.
作者简介: 冯　宁(1957—), 女, 副教授, 主要从事基础数学的教学与研究. E-mail: fn@czili.edu.cn
通讯联系人: 张　涛(1958—), 研究员, 主要从事自动控制系统的教学与研究. E-mail: zt@czili.edu.cn

部),则系统的平凡解为渐近稳定.

2 时变控制系统第一标准型[4]

第一标准型为:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\rho_i(t)x_i + f(\sigma), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \\ \sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i(t)x_i. \end{cases} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$ 是 n 维向量函数, $\rho_i(t)$, $r_i(t)$ 连续, $\rho_i(t) > 0$, 当 $\sigma \neq 0$ 时, $0 < \sigma f(\sigma) \leqslant k\sigma^2$; $f(0) = 0$, $k > 0$ 为常数, $f(\sigma)$ 连续且保证系统(1)的解存在且惟一.

定理 1 在系统(1)中, 若 $0 < \delta < \rho_i(t)$, $|r_i(t)| \leqslant \delta_1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则系统(1)的平凡解在角域 $[0, k]$ 内绝对稳定的充分条件为: $\delta_1 < \dfrac{\delta}{nk}$.

证明 对系统(1)作 Lyapunov 函数 $v(x_1, \cdots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(t)$. 对系统(1)有

$$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \leqslant \left(-\delta x_1^2 + \frac{f^2(\sigma)}{\delta}\right) + \left(-\delta x_2^2 + \frac{f^2(\sigma)}{\delta}\right) + \cdots + \left(-\delta x_n^2 + \frac{f^2(\sigma)}{\delta}\right) \leqslant$$

$$-\delta\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{n^2k^2\delta_1^2}{\delta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{(n^2k^2\delta_1^2 - \delta^2)}{\delta}\|x\|^2.$$

由条件: $\delta_1 < \dfrac{\delta}{nk}$, 可得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)} < 0$, 故系统(1)的平凡解在角域 $[0, k]$ 内绝对稳定.

3 时变控制系统第二标准型[5]

第二标准型为:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\rho_i x_i + \sigma, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \\ \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i(t)x_i(t) - R(t)\sigma - r(t)f(\sigma). \end{cases} \tag{2}$$

式中 $\rho_i(t)$, $\beta_i(t)$, $R_i(t)$, $r_i(t)$ 连续, $\rho_i(t) > 0$, $f(\sigma)$ 连续且满足解的存在惟一性条件; 当 $\sigma \neq 0$ 时, $0 < \sigma f(\sigma) < k\sigma^2$; $f(0) = 0$.

定理 2 在系统(2)中, 若 $\rho_i(t) \geqslant \delta > 0$, $|\beta_i(t)| \leqslant b$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $r(t) \geqslant 0$, $R(t) \geqslant R^* > 0$, 则系统(2)的平凡解渐近稳定的充分条件为: $nb < \delta R^*$.

证明 对系统(2)作 Lyapunov 函数 $v_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $v_2 = \sigma^2$. 对系统(2)有

$$\left.\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \leqslant \sum_{i=1}^{n}(-2\delta x_i^2 + 2|x_i||\sigma|) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(-\delta x_i^2 + \frac{\sigma^2}{\delta}\right) = -\delta v_1 + \frac{n}{\delta}v_2,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)} = 2\sigma\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{R^*\sigma^2}{n} + b_i|x_i||\sigma|\right) \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{R^*\sigma^2}{2n} + \frac{nb_i^2x_i^2}{2R^*}\right) \leqslant -R^*v_2 + \frac{nb^2}{R^*}v_1.$$

考虑辅助系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_1^*}{\mathrm{d}t} = -\delta v_1^* + \dfrac{n}{\delta}v_2^*, \\ \dfrac{\mathrm{d}v_2^*}{\mathrm{d}t} = \dfrac{nb^2}{R^*}v_1^* - R^*v_2^*. \end{cases} \tag{3}$$

系统(3)是常系数线性控制系统, 它的平凡解为渐近稳定的充要条件为: $\delta R^* - \dfrac{n^2b^2}{\delta R^*} > 0$, 即

$$nb < \delta R^{*}. \tag{4}$$

因此,若系统(3)的平凡解是渐近稳定的,则 $\lim\limits_{t\to\infty} v_1^{*} = \lim\limits_{t\to\infty} v_2^{*} = 0$

由引理 1可知, $v_1 \leqslant v_1^{*}$, $v_2 \leqslant v_2^{*}$,则 $\lim\limits_{t\to\infty} v_1 = \lim\limits_{t\to\infty} v_2 = 0$ 而 $v_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $v_2 = \sigma^2$,则 $\lim\limits_{t\to\infty} x_1 = \lim\limits_{t\to\infty} x_2 = \cdots = \lim\limits_{t\to\infty} x_n = 0$ 故当条件(4)成立时,系统(2)的平凡解渐近稳定.

4　一般时变控制系统

一般时变控制系统为:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + b_i(t) f_i(\sigma), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \\ \dot{\sigma} = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(t) x_i + \rho f(\sigma). \end{cases} \tag{5}$$

式中 $f(\sigma)$, $f_i(\sigma)$ 连续, $f(0) = 0$, $f_i(0) = 0$, $\rho < 0$ 设 $\delta_i > 0$, $k_i > 0$, $k > 0$,且均为常数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$,给出如下记号:

(Ⅰ) $a_{ii}(t) \leqslant -\delta_i (i = 1, 2, \cdots, n)$;

(Ⅱ) $0 < \sigma f(\sigma) < k\sigma^2$, $0 < \sigma f_i(\sigma) < k_i \sigma^2$, $\sigma \neq 0 (i = 1, 2, \cdots n)$.

定理 **3**　若系统(5)满足下列条件:

(1) $a_{ii}(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足条件(Ⅰ), $f(\sigma)$, $f_i(\sigma)$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ 满足条件(Ⅱ);

(2) $\gamma_i = \sup\limits_{t_0 \leqslant t < +\infty} \{2k_i |b_i| |c_i|\}$, $\lambda_{ij} = \sup\limits_{t_0 \leqslant t < +\infty} \{(|a_{ij}| + k_i |b_i| |c_j|)^2\}$,则系统(5)渐近稳定的充分条件为: $\delta_i - \gamma_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2\cdots, n)$,且

$$\begin{bmatrix} -(\delta_1 - \gamma_1) & \dfrac{n\lambda_{12}}{\delta_1} & \cdots & \dfrac{n\lambda_{1n}}{\delta_1} \\ \dfrac{n\lambda_{21}}{\delta_2} & -(\delta_2 - \gamma_2) & \cdots & \dfrac{n\lambda_{2n}}{\delta_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{n\lambda_{n1}}{\delta_n} & \dfrac{n\lambda_{n2}}{\delta_n} & \cdots & -(\delta_n - \gamma_n) \end{bmatrix} \tag{6}$$

满足洛茨——霍维兹条件.

证明　对系统(5)作 Lyapunov函数 $v_1 = x_1^2$, $v_2 = x_2^2$, $\cdots$, $v_n = x_n^2$.

由于 $\rho < 0$, $\sigma f(\sigma) > 0$,则 $|\sigma| \leqslant |\sigma - \rho f(\sigma)| = \left|\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j\right| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} |c_j| |x_j|$,故对系统(5)有

$$\left.\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} = 2x_i \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \leqslant -\left(\frac{2\delta_i}{n} - \gamma_i\right) x_i^2 + 2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left[-\frac{\delta_i}{2n} x_i^2 + \frac{n}{2\delta_i} (|a_{ij}| + k_i |b_i| |c_j|)^2 x_j^2\right] \leqslant$$

$$-(\delta_i - \gamma_i) v_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{n}{\delta_i} \lambda_{ij} v_j (i = 1, 2, \cdots, n).$$

考虑辅助系统

$$\frac{\mathrm{d}v_i^{*}}{\mathrm{d}t} = -(\delta_i - \gamma_i) v_i^{*} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{n}{\delta_i} \lambda_{ij} v_j^{*} \ (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{7}$$

显然,系统(7)是常系数线性系统,其对应的系数矩阵即为(6)式. 因此,当 $\delta_i - \gamma_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2\cdots, n)$,且(6)式满足洛茨——霍维兹条件时,系统(7)的平凡解渐近稳定,则

$$\lim_{t\to\infty} v_1^{*} = \lim_{t\to\infty} v_2^{*} = \cdots = \lim_{t\to\infty} v_n^{*} = 0$$

由引理 1可得 $\lim\limits_{t\to\infty} v_1 = \lim\limits_{t\to\infty} v_2 = \cdots = \lim\limits_{t\to\infty} v_n = 0$ 而 $v_1 = x_1^2$, $v_2 = x_2^2$, $\cdots$, $v_n = x_n^2$,故有

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} x_2(t) = \cdots = \lim_{t\to\infty} x_n(t) = 0,$$

即系统(5)的平凡解为渐近稳定的.

5　时变大系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + b_i f_i(\sigma), \\ \dot{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)x_i - r(t)\sigma. \end{cases} \tag{8}$$

设 $A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$, $a_{ij}(t)$ 连续有界 $(i, j = 1, \cdots, n)$, 将矩阵 $A(t)$ 分块, 得

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & \cdots & A_{1m}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1}(t) & \cdots & A_{mm}(t) \end{bmatrix},$$

其中 $A_{rs}(t)$ 是 $n_r \times n_s$ 矩阵 $(r, s = 1, 2, \cdots, m;\ n_1 + \cdots + n_m = n)$, 给出如下记号:

$$d_{11} = \sup_{\substack{t_0\leqslant t<+\infty \\ j=1,2,\cdots,n_1}} \left\{ a_{jj}(t) + \sum_{i=1,\ j\neq i}^{n_1} |a_{ij}(t)| \right\},$$

$$d_{12} = \sup_{\substack{t_0\leqslant t<+\infty \\ j=n_1+1,\cdots,n_1+n_2}} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} |a_{ij}(t)| \right\}, \cdots$$

$$d_{1m} = \sup_{\substack{t_0\leqslant t<+\infty \\ j=n-n_m+1,\cdots,n}} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} |a_{ij}(t)| \right\};$$

$$d_{r1} = \sup_{\substack{t_0\leqslant t<+\infty \\ j=1,2,\cdots,n_1}} \left\{ \sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r} |a_{ij}(t)| \right\}, \cdots$$

$$d_{rr} = \sup_{\substack{t_0\leqslant t<+\infty \\ j=n_1+\cdots+n_{r-1}+1,\cdots,n_1+\cdots+n_r}} \left\{ a_{jj}(t) + \sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1,\ j\neq i}^{n_1+\cdots+n_r} |a_{ij}(t)| \right\} \quad (r = 2, 3, \cdots, m), \quad \cdots$$

$$d_{rm} = \sup_{\substack{t_0\leqslant t<+\infty \\ j=n-n_m+1,\cdots,n}} \left\{ \sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r} |a_{ij}(t)| \right\} \quad (r = 2, 3, \cdots, m-1);$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n_1} |b_i|, \quad B_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} |b_i|, \quad \cdots, \quad B_m = \sum_{i=n-n_m+1}^{n} |b_i|;$$

$$\eta_1 = \max_{i=1,\cdots,n_1} \{k_i\}, \quad \cdots, \quad \eta_m = \max_{i=n-n_m+1,\cdots,n_1} \{k_i\};$$

$$C_1 = \sup_{\substack{t_0\leqslant t<+\infty \\ j=1,2,\cdots,n_1}} \{|c_j(t)|\}, \quad C_2 = \sup_{\substack{t_0\leqslant t<+\infty \\ j=n_1+1,\cdots,n_1+n_2}} \{|c_j(t)|\}, \quad \cdots, \quad C_m = \sup_{\substack{t_0\leqslant t<+\infty \\ j=n-n_m+1,\cdots,n}} \{|c_j(t)|\}.$$

取 $v_1 = \sum_{i=1}^{n_1} |x_i|$, $v_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} |x_i|$, $\cdots$, $v_m = \sum_{i=n-n_m+1}^{n} |x_i|$, $v_{m+1} = |\sigma|$ 作为大系统(8)的 Lyapunov 函数, 则

$$\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{(8)} = \sum_{i=1}^{n_1} \varphi(x_i)\dot{x}_i \leqslant \sum_{j=1}^{n_1} \left[a_{jj}(t)|x_j| + \sum_{i=1,\ j\neq i}^{n_1} |a_{ij}(t)||x_j| \right] + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \sum_{i=1}^{n_1} |a_{ij}(t)||x_j| + \cdots +$$

$$\sum_{j=n-n_m+1}^{n} \sum_{i=1}^{n_1} |a_{ij}(t)||x_j| + \sum_{i=1}^{n_1} |b_i||f_i(\sigma)| \leqslant d_{11}v_1 + d_{12}v_2 + \cdots + d_{1m}v_m + B_1\eta_1 v_{m+1}.$$

同理可得

$$\left.\frac{dv_r}{dt}\right|_{(8)} \leqslant d_{r1}v_1 + d_{r2}v_2 + \cdots + d_{rm}v_m + B_r\eta_r v_{m+1}, \quad r = 2, 3, \cdots, m,$$

$$\left.\frac{dv_{m+1}}{dt}\right|_{(8)} = \varphi(\sigma)\dot{\sigma} \leqslant C_1v_1 + C_2v_2 + \cdots + C_mv_m - r^* v_{m+1}.$$

考虑辅助系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_1^*}{\mathrm{d}t} = d_{11}v_1^* + d_{12}v_2^* + \cdots + d_{1m}v_m^* + B_1\eta_1 v_{m+1}^*, \\ \cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}v_m^*}{\mathrm{d}t} = d_{m1}v_1^* + d_{m2}v_2^* + \cdots + d_{mm}v_m^* + B_m\eta_m v_{m+1}^*, \\ \dfrac{\mathrm{d}v_{m+1}^*}{\mathrm{d}t} = C_1v_1^* + C_2v_2^* + \cdots + C_m v_m^* - r^* v_{m+1}^*. \end{cases} \tag{9}$$

系统 (9) 是常系数线性系统, 若 $d_{ii} < -\alpha < 0\ (i = 1, 2, \cdots, m)$, α是正常数, 且 (9) 的系数矩阵

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & B_1\eta_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & B_m\eta_m \\ C_1 & C_2 & \cdots & -r^* \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)} \tag{10}$$

满足洛茨 ——霍维兹条件, 则系统 (9) 的平凡解渐近稳定.

由引理 1可得 $\lim\limits_{t\to\infty} v_1 = \lim\limits_{t\to\infty} v_2 = \cdots = \lim\limits_{t\to\infty} v_m = \lim\limits_{t\to\infty} v_{m+1} = 0$ 而 $v_1 = \sum\limits_{i=1}^{n_1} |x_i|$, $v_2 = \sum\limits_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} |x_i|$, …, $v_m = \sum\limits_{i=n-n_m+1}^{n} |x_i|$, $v_{m+1} = |\sigma|$, 则

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} x_2(t) = \cdots = \lim_{t\to\infty} x_n(t) = 0$$

因此, 系统 (8) 的平凡解渐近稳定. 从而得到如下定理:

定理 4　对于系统 (8), 若满足下列条件: (1) $a_{ij}(t)\ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$满足条件 (Ⅰ); (2) $f_i(\sigma)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$满足条件 (Ⅱ); (3) $r_i(t) > r^* > 0$, $c_i(t)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$是有界的; (4) d_{ij}, B_i, $C_i\ (i, j = 1, 2, \cdots, m)$ 如上定义, 则系统 (8) 的平凡解渐近稳定的充分条件为: $d_{ii} < 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 且 (10) 式满足洛茨 ——霍维兹条件.

[参考文献]

[1] Bailey F N. The application of Lyapunov' s second method to interconnected system [J]. J SLAM Control Ser A, 1965, 3(3): 443-462

[2] 彭晓林. 一类拟线性大系统的稳定性 [J]. 新疆大学学报: 自然科学版, 1991, 8(1): 41-45

[3] 廖晓昕. 稳定性的理论、方法和应用 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1999.

[4] 廖晓昕. 关于控制系统的绝对稳定性准则 [J]. 应用数学和力学, 1982, 3(2): 235-248.

[5] 王莉, 章毅. 控制系统的绝对稳定性 [J]. 电子科技大学学报, 1997, 26(3): 308-313

[责任编辑: 丁　蓉]