

对称自正交相似矩阵反问题的最小二乘解

刘桂香

(扬州教育学院数学系, 江苏 扬州 225002)

[摘要] 通过给出对称自正交相似矩阵的表示定理, 研究了如下对称自正交相似矩阵反问题:  
问题 : 已知  $X, B \in R^{n \times m}, J \in R^{n \times n}$  为全体  $n$  阶对称自正交相似矩阵的集合,  $n = 2k$ . 求  $A \in J^{n \times n}$ , 使得  
$$\|AX - B\|_F = \min_{A \in J^{n \times n}}$$
  
问题 : 已知  $A^* \in R^{n \times n}, S_E$  是问题 的解集. 求  $A \in S_E$ , 使得  
$$\|A^* - A\|_F = \inf_{A \in S_E} \|A^* - A\|_F.$$
  
给出了问题 的解的通式及问题 的惟一解的表达式.  
[关键词] 对称自正交相似矩阵, 最小二乘解, 反问题  
[中图分类号] O241.6 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2008)01-0042-05

Least-Squares Solution for Inverse Problem of Symmetric and Self-Orthogonally Similar Matrices

Liu Guixiang

(Department of Mathematics Yangzhou College of Education Yangzhou 225002 China)

**Abstract** Upon using the denotative theorem of symmetric and self-orthogonally similar matrix, the following problems are discussed  
**Problem** : Given  $X, B \in R^{n \times m}$ , find  $A \in J^{n \times n}$ , such that  
$$\|AX - B\|_F = \min_{A \in J^{n \times n}}$$
  
**Problem** : Given  $A^* \in R^{n \times n}$ , find  $A \in S_E$ , such that  
$$\|A^* - A\|_F = \inf_{A \in S_E} \|A^* - A\|_F.$$
  
where  $S_E$  is the solution set of Problem .  
The existence of the solution for problem and the uniqueness of the solution for problem are proved. The general form of the solution set  $S_E$  and the expression of the unique solution  $A$  are given  
**Key words** symmetric and self-orthogonally similar matrix, least-squares solution, inverse problem

$R^{n \times m}$  表示所有  $n \times m$  实矩阵的集合,  $C^{n \times m}$  表示所有  $n \times m$  复矩阵的集合,  $SR^{n \times n}$  表示所有  $n$  阶实对称矩阵的集合,  $H^n$  表示所有  $n$  阶 Hermite 矩阵的集合,  $U^n$  表示所有  $n$  阶酉矩阵的集合,  $\|A\|_F$  是矩阵的 Frobenius 范数,  $A^*B$  表示矩阵  $A$  与  $B$  的 Hadamard 乘积,  $\bar{A}$  表示矩阵  $A$  的共轭,  $A^T$  表示  $A$  的转置,  $A^H$  表示  $A$  的共轭转置.  $a, \operatorname{Re}(a), \operatorname{Im}(a)$  分别表示  $a$  的共轭复数、 $a$  的实部和虚部,  $I_k$  表示  $k$  阶单位矩阵,  $S_k = (e_0, \dots, e_1)$ , 其中  $e_i$  为  $I_k$  的第  $i$  列.  
矩阵反问题在科学和工程技术中有广泛的应用, 近年来, 有关它们的研究非常活跃, 且已取得了许多研究成果, 如文 [1~8] 等. 对称自正交相似矩阵在结构力学和土木工程等领域有实际应用, 因此有关问题的研究是有意义的.

文 [6] 给出了对称自正交相似矩阵的定义, 得到  
定义 1<sup>[6]</sup>  $A \in R^{2k \times 2k}, J = \begin{bmatrix} 0 & S_k \\ -S_k & 0 \end{bmatrix}$ , 若  $JAJ^T = A^T, A^T = A$ , 则称  $A$  为对称自正交相似矩阵. 全体

$n$ 阶对称自正交相似矩阵的集合记为  $J^{n \times n}, n = 2k$ .

$$\text{结论 1}^{[6]} \quad J^{n \times n} = \left\{ D \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F^T \end{bmatrix} D^H \mid D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_k & I_k \\ \mathfrak{S}_k & -\mathfrak{S}_k \end{bmatrix}, U^{n \times n}, F \in \mathbb{C}^{k \times k} \right\}.$$

容易验证, 上述结论 1 是错误的. 如

$$F = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2+i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \text{ 但 } A = D \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F^T \end{bmatrix} D^H \text{ 不是对称自正交相似矩阵.}$$

本文重新给出了对称自正交相似矩阵的结构, 研究了如下两个问题:

问题 1: 已知  $X, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , 求  $A \in J^{n \times n}$ , 使得

$$\|AX - B\|_F = \min$$

问题 2: 已知  $A^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 求  $A \in S_E$ , 使得

$$\|A^* - A\|_F = \inf_{A \in S_E} \|A^* - A\|_F,$$

其中  $S_E$  是问题 1 的解集.

同时给出了问题 1 的解的通式及问题 2 的惟一解的表达式.

需要指出的是, 本文所研究的问题不能视为文 [7] 研究的 Hermite- 广义反 Hamilton 矩阵反问题的最小二乘解的特例.

文 [7] 给出了 Hermite- 广义反 Hamilton 矩阵的定义, 得到

定义 2<sup>[7]</sup>  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是反对称正交矩阵,  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 若  $JAJ = -A^H, A^H = A$ , 则称  $A$  为 Hermite- 广义反 Hamilton 矩阵. 全体  $n$  阶 Hermite- 广义反 Hamilton 矩阵的集合记为  $HAHC^{n \times n}, n = 2k$ .

若令  $P_1 = \frac{1}{2}(I + J), P_2 = \frac{1}{2}(I - J)$ , 则由  $P_1, P_2$  的性质可知, 存在列正交矩阵  $U_1 \in \mathbb{C}^{n \times k}, U_2 \in \mathbb{C}^{n \times k}$ , 使得  $P_1 = U_1 U_1^H, P_2 = U_2 U_2^H$ . 若记  $U = (U_1, U_2)$ , 则  $U \in \mathbb{C}^{n \times 2k}$ , 且有

$$\text{结论 2}^{[7]} \quad HAHC^{n \times n} = \left\{ A \mid A = U \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} U^H, M_1, M_2 \in \mathbb{H}^{k \times k} \right\}.$$

对称自正交相似矩阵是特殊的 Hermite- 广义反 Hamilton 矩阵, 但从本文的引理 2 可发现, 要使得  $A \in J^{n \times n}$ , 不仅要求  $M_1, M_2 \in \mathbb{H}^{k \times k}$ , 还要求  $M_2 = M_1^T$ . 文 [7] 基于结论 2 求出的最小二乘解仅仅是 Hermite- 广义反 Hamilton 矩阵, 不可能是对称自正交相似矩阵. 这就使得本文的结果不能视为文 [7] 结果的特例.

## 1 问题 1 的解

为了研究问题 1, 我们首先给出如下引理.

$$\text{引理 1}^{[7]} \quad J^{n \times n} = \left\{ \begin{bmatrix} M & GS_k \\ -S_k G & S_k M S_k \end{bmatrix} \mid G = -G^T, M = M^T \in \mathbb{R}^{k \times k} \right\}.$$

$$\text{引理 2} \quad J^{n \times n} = \left\{ D \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F^T \end{bmatrix} D^H \mid D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_k & I_k \\ \mathfrak{S}_k & -\mathfrak{S}_k \end{bmatrix}, F \in \mathbb{H}^{k \times k} \right\}.$$

证明 若  $A \in J^{n \times n}$ , 由引理 1 可知

$$D^H A D = D^H \begin{bmatrix} M & GS_k \\ -S_k G & S_k M S_k \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F^T \end{bmatrix},$$

$$A = D \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F^T \end{bmatrix} D^H, F = M + G \mathfrak{S}_k \mathfrak{S}_k^T.$$

反之, 若  $A = D \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F^T \end{bmatrix} D^H, F \in \mathbb{H}^{k \times k}$ , 则

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_k & I_k \\ \mathfrak{S}_k & -\mathfrak{S}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k & -\mathfrak{S}_k \\ I_k & \mathfrak{S}_k \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^{\text{T}} & (\boldsymbol{F}^{\text{T}} - \boldsymbol{F}) \boldsymbol{S}_k \\ \boldsymbol{S}_k (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}^{\text{T}}) & \boldsymbol{S}_k (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^{\text{T}}) \boldsymbol{S}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{G} \boldsymbol{S}_k \\ -\boldsymbol{S}_k \boldsymbol{G} & \boldsymbol{S}_k \boldsymbol{M} \boldsymbol{S}_k \end{bmatrix}.$$

由于  $\boldsymbol{F} - \boldsymbol{H}^{k,k}$  是 Hermitian 矩阵, 故  $\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^{\text{T}})$  是实对称矩阵,  $\boldsymbol{G} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{\text{T}} - \boldsymbol{F})$  是实的反对称矩阵. 从而, 由引理 1 知道  $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{J}^{n,n}$ .

类似于文 [2] 中引理 3 的证明, 我们易证

**引理 3** 设  $\boldsymbol{G} - \boldsymbol{C}^{r,r}$ ,  $\boldsymbol{S} = \text{diag}(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \dots, \boldsymbol{s}_r)$ ,  $\boldsymbol{s}_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ),  $\kappa_{ij} = \frac{1}{\boldsymbol{s}_i^2 + \boldsymbol{s}_j^2}$  ( $1 \leq i, j \leq r$ ),  $\boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{H}^{r,r}$ . 则对任意的  $\boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{H}^{r,r}$  有

$$\boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{G}^{-2} = \boldsymbol{S}_1 - * (\boldsymbol{G} + \boldsymbol{G}^{\text{H}})^{-2} + \boldsymbol{G} - * (\boldsymbol{G} + \boldsymbol{G}^{\text{H}})^{-2}.$$

对于给定的  $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{B} - \boldsymbol{R}^{n,m}$ , 令

$$\boldsymbol{D}^{\text{H}} \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{D}^{\text{H}} \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{C}^{k,m}, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{C}^{k,m}. \tag{1}$$

**引理 4** 设  $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{B} - \boldsymbol{R}^{n,m}$ ,  $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$  如 (1), 且设  $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2)$ ,  $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2)$ , 则问题 的解  $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{F}^{\text{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{D}^{\text{H}}$  当且仅当  $\boldsymbol{F} - \boldsymbol{H}^{k,k}$  为问题  $\boldsymbol{F} \boldsymbol{X} - \boldsymbol{B} = \min$  的解.

**证明** 由引理 2  $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{J}^{n,n}$  当且仅当  $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{F}^{\text{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{D}^{\text{H}}$ . 再由 Frobenius 范数的性质可知,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{A} \boldsymbol{X} - \boldsymbol{B}\|^2 &= \|\boldsymbol{D}^{\text{H}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{D} \boldsymbol{D}^{\text{H}} \boldsymbol{X} - \boldsymbol{D}^{\text{H}} \boldsymbol{B}\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{F}^{\text{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix} \right\|^2 = \\ &= \|\boldsymbol{F} \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{B}_1\|^2 + \|\boldsymbol{F}^{\text{T}} \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{B}_2\|^2 = \|\boldsymbol{F} \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{B}_1\|^2 + \|\boldsymbol{F} \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{B}_2\|^2 = \|\boldsymbol{F} \boldsymbol{X} - \boldsymbol{B}\|^2. \end{aligned}$$

因此, 问题 的解  $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{F}^{\text{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{D}^{\text{H}}$  当且仅当  $\boldsymbol{F} - \boldsymbol{H}^{k,k}$  为问题  $\boldsymbol{F} \boldsymbol{X} - \boldsymbol{B} = \min$  的解.

**引理 5** 设  $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{B} - \boldsymbol{R}^{n,m}$ ,  $\text{rank}(\boldsymbol{X}) = r$ ,  $\boldsymbol{X}$  的奇异值分解为  $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{V}^{\text{H}} = \boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{V}_1^{\text{H}}$ , 其中  $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2) - \boldsymbol{U}^{n,n}$ ,  $\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2) - \boldsymbol{U}^{m,m}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \dots, \boldsymbol{s}_r)$ ,  $\boldsymbol{s}_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), 则存在  $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{H}^{n,n}$  使得  $\boldsymbol{A} \boldsymbol{X} - \boldsymbol{B} = \min$  且

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} * (\boldsymbol{U}_1^{\text{H}} \boldsymbol{B} \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_1^{\text{H}} \boldsymbol{B}^{\text{H}} \boldsymbol{U}_1)^{-1} \boldsymbol{V}_1^{\text{H}} \boldsymbol{B}^{\text{H}} \boldsymbol{U}_2 \\ \boldsymbol{U}_2^{\text{H}} \boldsymbol{B} \boldsymbol{V}_1^{-1} \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \boldsymbol{U}^{\text{H}}, \tag{2}$$

其中  $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{H}^{(n-r) \times (n-r)}$ ,  $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{s}_{ij}) - \boldsymbol{S}^{r,r}$ ,  $\boldsymbol{s}_{ij} = \frac{1}{\boldsymbol{s}_i^2 + \boldsymbol{s}_j^2}$  ( $1 \leq i, j \leq r$ ).

**证明** 设  $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{H}^{n,n}$ , 记  $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{U}^{\text{H}}$ ,  $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{V}^{\text{H}}$ , 其中  $\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{H}^{r,r}$ ,  $\boldsymbol{B}_j = \boldsymbol{U}_i^{\text{H}} \boldsymbol{B} \boldsymbol{V}_j$  ( $i, j = 1, 2$ ). 则由引理 3 得

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{A} \boldsymbol{X} - \boldsymbol{B}\|^2 &= \left\| \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{U}^{\text{H}} \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{V}^{\text{H}} - \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{V}^{\text{H}} \right\|^2 = \\ &= \|\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{B}_{11}\|^2 + \|\boldsymbol{A}_{21} - \boldsymbol{B}_{21}\|^2 + \|\boldsymbol{B}_{12}\|^2 + \|\boldsymbol{B}_{22}\|^2 = \\ &= \|\boldsymbol{A}_{11} - * (\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{B}_{11}^{\text{H}})\|^2 + \|\boldsymbol{B}_{11} - * (\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{B}_{11}^{\text{H}})\|^2 + \\ &+ \|\boldsymbol{A}_{21} - \boldsymbol{B}_{21}\|^2 + \|\boldsymbol{B}_{12}\|^2 + \|\boldsymbol{B}_{22}\|^2. \end{aligned}$$

因此,  $\boldsymbol{A} \boldsymbol{X} - \boldsymbol{B} = \min$  当且仅当  $\boldsymbol{A}_{11} = * (\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{B}_{11}^{\text{H}}) = * (\boldsymbol{U}_1^{\text{H}} \boldsymbol{B} \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_1^{\text{H}} \boldsymbol{B}^{\text{H}} \boldsymbol{U}_1)$ ,  $\boldsymbol{A}_{21} = \boldsymbol{B}_{21}^{-1} = \boldsymbol{U}_2^{\text{H}} \boldsymbol{B} \boldsymbol{V}_1^{-1}$ , 故  $\boldsymbol{A} \boldsymbol{X} - \boldsymbol{B} = \min$  在  $\boldsymbol{H}^{n,n}$  上有解, 且解的通式如 (2) 式所示.

**定理 1** 设  $X, B \in R^{n \times m}$ ,  $X_1, X_2, B_1, B_2$  如 (1), 且设  $X = (X_1, X_2)$ ,  $B = (B_1, B_2)$ ,  $\text{rank}(X) = r$ ,  $X$  的奇异值分解为  $X = U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H = U_1 V_1^H$ , 其中  $U = (U_1, U_2) \in R^{n \times k}$ ,  $V = (V_1, V_2) \in R^{m \times 2n}$ ,  $U^H U = I_k$ ,  $V V^H = I_{2n}$ ,  $U_1^H U_1 = I_r$ ,  $V_1^H V_1 = I_r$ , 则问题 (3) 有解, 且通解可表为

$$A = DU \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{11}^T \end{bmatrix} U^H D^H, \quad (3)$$

其中

$$A_{11} = \begin{bmatrix} * & (U_1^H B V_1 + V_1^H B^H U_1)^{-1} V_1^H B^H U_2 \\ U_2^H B V_1^{-1} & E \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix},$$

$$E = H^{(k-r) \times (k-r)}, \quad = (e_{ij}) \quad SR^{r \times r}, \quad e_{ij} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{j}}, \quad 1 \leq i, j \leq r.$$

**证明** 由引理 5 可知, 问题  $\min \|FX - B\|_F = \min$  在  $H^{k \times k}$  上有解, 且通解为

$$F = U \begin{bmatrix} * & (U_1^H B V_1 + V_1^H B^H U_1)^{-1} V_1^H B^H U_2 \\ U_2^H B V_1^{-1} & E \end{bmatrix} U^H,$$

$$\text{其中 } E = H^{(k-r) \times (k-r)}, \quad = (e_{ij}) \quad SR^{r \times r}, \quad e_{ij} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{j}}, \quad 1 \leq i, j \leq r.$$

于是, 由引理 4 可知, 问题 (3) 有解, 且通解如 (3) 式所示.

## 2 问题 的解

**引理 6** 设  $B, C \in C^{n \times n}$ , 则问题  $\min \|A - B\|^2 + \|A - C\|^2 = \min$  在  $A \in H^{n \times n}$  的解为

$$A = \frac{B + B^H + C + C^H}{4}.$$

**证明** 记  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ ,  $C = (c_{ij})$ , 则  $\min \|A - B\|^2 + \|A - C\|^2 = \min$  等价于

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (|a_{ij} - b_{ij}|^2 + |a_{ij} - c_{ij}|^2) = \sum_{i,j} (|a_{ij} - b_{ij}|^2 + |a_{ij} - c_{ij}|^2) + \sum_{i < j} (|a_{ij} - b_{ji}|^2 + |a_{ij} - c_{ji}|^2) = \min$$

是关于  $\text{Re}(a_{ij})$  和  $\text{Im}(a_{ij})$  的二次函数, 由极值存在的条件可得

$$a_{ij} = \frac{b_{ij} + b_{ji} + c_{ij} + c_{ji}}{4},$$

从而

$$A = \frac{B + B^H + C + C^H}{4}.$$

**定理 2** 设  $A^* \in R^{n \times n}$ ,  $S_E$  为问题 (3) 的解集, 则问题 (3) 有惟一解  $A \in S_E$ . 若记

$$U^H D^H A^* D U = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{13}^* & A_{14}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* & A_{23}^* & A_{24}^* \\ A_{31}^* & A_{32}^* & A_{33}^* & A_{34}^* \\ A_{41}^* & A_{42}^* & A_{43}^* & A_{44}^* \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix},$$

则问题 (3) 的惟一解  $A$  可表示为

$$A = DU \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{11}^T \end{bmatrix} U^H D^H, \quad (4)$$

其中

$$A_{11} = \begin{bmatrix} * & (U_1^H B V_1 + V_1^H B^H U_1)^{-1} V_1^H B^H U_2 \\ U_2^H B V_1^{-1} & \frac{A_{22}^* + A_{22}^{*H} + A_{44}^{*T} + \overline{A_{44}^*}}{4} \end{bmatrix},$$

$$= ( \begin{smallmatrix} i & j \end{smallmatrix} ) \quad \boldsymbol{S} \boldsymbol{R}^r, \quad \begin{smallmatrix} i & j \end{smallmatrix} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{1}{j}}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

**证明** 因为问题 的解集  $S_E$  是完备内积空间中的闭凸集, 故问题 有惟一解  $\boldsymbol{A} \in S_E$ . 由 Frobenius 范数的性质可知

$$\begin{aligned} + \boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{A} +^2 &= + \boldsymbol{U}^H \boldsymbol{D}^H \boldsymbol{A}^* \boldsymbol{D} \boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}^H \boldsymbol{D}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{D} \boldsymbol{U} +^2 = \\ &+ \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^* & \boldsymbol{A}_{12}^* \\ \boldsymbol{A}_{21}^* & \boldsymbol{A}_{22}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5^* ( \boldsymbol{U}_1^H \boldsymbol{B} \boldsymbol{V}_{12} + 2 \boldsymbol{V}_1^H \boldsymbol{B}^H \boldsymbol{U}_1 ) & 2^{-1} \boldsymbol{V}_1^H \boldsymbol{B}^H \boldsymbol{U}_2 \\ \boldsymbol{U}_2^H \boldsymbol{B} \boldsymbol{V}_{12} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} +^2 + \\ &+ \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{33}^* & \boldsymbol{A}_{34}^* \\ \boldsymbol{A}_{43}^* & \boldsymbol{A}_{44}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5^* ( \boldsymbol{U}_1^H \boldsymbol{B} \boldsymbol{V}_{12} + 2 \boldsymbol{V}_1^H \boldsymbol{B}^H \boldsymbol{U}_1 ) & 2^{-1} \boldsymbol{V}_1^H \boldsymbol{B}^H \boldsymbol{U}_2 \\ \boldsymbol{U}_2^H \boldsymbol{B} \boldsymbol{V}_{12} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}^T +^2 + \\ &+ \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{33}^* & \boldsymbol{A}_{14}^* \\ \boldsymbol{A}_{23}^* & \boldsymbol{A}_{24}^* \end{bmatrix} +^2 + + \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{31}^* & \boldsymbol{A}_{32}^* \\ \boldsymbol{A}_{41}^* & \boldsymbol{A}_{42}^* \end{bmatrix} +^2, \end{aligned}$$

因此,  $+ \boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{A} + = \min$  等价于  $+ \boldsymbol{A}_{22}^* - \boldsymbol{E} +^2 + + \boldsymbol{A}_{44}^* - \boldsymbol{E}^T +^2 = \min$  即  $+ \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}_{22}^* +^2 + + \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}_{44}^{*T} +^2 = \min$  由引理 6 得

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{A}_{22}^* + \boldsymbol{A}_{22}^{*H} + \boldsymbol{A}_{44}^{*H} + \overline{\boldsymbol{A}_{44}^*}}{4},$$

从而问题 有惟一解如 (4) 式所示.

[参考文献]

[ 1 ] 谢冬秀, 张磊. 一类反对称矩阵反问题的最小二乘解 [ J ]. 工程数学学报, 1993, 10( 4): 25-34  
[ 2 ] 谢冬秀, 张磊, 胡锡炎. 一类双对称矩阵反问题的最小二乘解 [ J ]. 计算数学, 2000, 22( 1): 29-39  
[ 3 ] 戴华. 对称正交反对称矩阵反问题解存在的条件 [ J ]. 高等学校计算数学学报, 2002, 24( 2): 169-178  
[ 4 ] 孙继广. 实对称矩阵的两类逆特征值问题 [ J ]. 计算数学, 1988, 10( 3): 282-290  
[ 5 ] 盛炎平, 谢冬秀. 双反对称矩阵反问题的最小二乘解 [ J ]. 高等学校计算数学学报, 2002, 24( 3): 199-205  
[ 6 ] 盛炎平, 王来生. 对称自正交相似矩阵的逆特征值问题 [ J ]. 高等学校计算数学学报, 2004, 26( 4): 351-357.  
[ 7 ] 张忠志, 胡锡炎, 张磊. 线性流形上 Hermite- 广义反 Hamilton 矩阵反问题的最小二乘解 [ J ]. 计算数学, 2003, 25( 2): 209-218  
[ 8 ] 尤兴华, 严涛, 马圣容. 矩阵方程的反对称解问题 [ J ]. 南京师大学报: 自然科学版, 2003, 26( 1): 6-10

[责任编辑: 陆炳新]