连通图的拟拉普拉斯谱半径的一个上界

朱晓欣[1], 孙志人[2], 曹春正[1]

(1. 南京信息工程大学数理学院, 江苏 南京 210044)
(2. 南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 对于连通图 G, 矩阵 $\boldsymbol{Q}(G)=\boldsymbol{D}(G)+\boldsymbol{A}(G)$称为图 G 的拟拉普拉斯矩阵, 其中 $\boldsymbol{D}(G)$为图的度对角矩阵, $\boldsymbol{A}(G)$为图的邻接矩阵. 本文利用矩阵的一些性质, 推导出连通图的拟拉普拉斯谱半径的一个上界. 并将该上界与已有的一些结论结合具体图例作了优越性比较.

[关键词] 连通图, 拟拉普拉斯矩阵, 特征值, 谱半径, 度序列
[中图分类号] O157. 7 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2008)02-0027-04

A Bound on Quasi-Laplacian Spectral Radius of Connected Graphs

Zhu Xiaoxin[1], Sun Zhiren[2], Cao Chunzheng[1]

(1. School of Mathematics and Physics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China)
(2. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract Let G be a connected graph, its quasi-Laplacian matrix is $\boldsymbol{Q}(G)=\boldsymbol{D}(G)+\boldsymbol{A}(G)$, where $\boldsymbol{D}(G)$ is the diagonal matrix of its vertex degrees and $\boldsymbol{A}(G)$ is its adjacency matrix. Using some properties of matrix, a sharp upper bound on the quasi-Laplacian spectral radius of connected graphs is obtained, and the superiority of the upper bound is compared with other bounds through some graphs.

Key words connected graphs; quasi-Laplacian matrix; eigenvalue; spectral radius; degree sequence

设 $G=(V,E)$为 n阶无向简单连通图, 其顶点集为 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, 其边集为 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$. 令 d_i 表示顶点 v_i的度 $(i=1,2,\cdots,n)$, 且有 $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n$. $\boldsymbol{A}(G)=(a_{ij})_{n\times n}$及$\boldsymbol{D}(G)=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$分别为图 G的邻接矩阵和度对角矩阵, 则 $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$称为图 G的拉普拉斯矩阵, $\boldsymbol{Q}(G)=\boldsymbol{D}(G)+\boldsymbol{A}(G)$称为图 G的拟拉普拉斯矩阵.

图 G 的拟拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{Q}(G)$ 的所有特征值排成的序列称为图 G 的拟拉普拉斯谱, 其中最大特征值 μ_1 称为图 G 的拟拉普拉斯谱半径.

显然 $\boldsymbol{Q}(G)$ 是一个实对称非负不可约矩阵, 其所有特征值均为实数, 我们用序列

$$\mu_1(G)\geqslant\mu_2(G)\geqslant\cdots\geqslant\mu_n(G)$$

来表示, 在不引起混淆的情况下将 $\mu_i(G)$ 简记为 μ_i, $1\leqslant i\leqslant n$.

目前对图的邻接谱, 拉普拉斯谱的研究已经有了非常多的结论, 甚至专著. 但对拟拉普拉斯谱的研究相对不多, 其实对拟拉普拉斯谱的研究也具有一定的应用价值. 我们可以看到图 G 的拟拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{Q}(G)$ 和图 G的线图 L_G 的邻接矩阵有着密切的联系, 若 M 是图 G 的点边关联矩阵, 则有

$$\boldsymbol{Q}(G)=\boldsymbol{D}(G)+\boldsymbol{A}(G)=\boldsymbol{M}(G)\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}(G),$$

$$\boldsymbol{A}(L_G)=\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}(G)\boldsymbol{M}(G)-2\boldsymbol{I},$$

$$P_{\boldsymbol{A}(L_G)}=(x+2)^{m-n}P_{\boldsymbol{Q}(G)}(x+2),$$

其中 $P_M(x)=\det(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})$ 指矩阵$\boldsymbol{M}$ 的特征多项式. 所以我们可以借助于线图的邻接谱来研究图的拟拉

收稿日期: 2007-09-26
基金项目: 国家自然科学基金(10671095), 南京信息工程大学科研基金资助项目.
通讯联系人: 孙志人, 教授, 博士, 研究方向: 图论. E-mail: zrsun@njnu.edu.cn

普拉斯谱. 同时, 我们发现对于有些图研究其拟拉普拉斯谱或其线图的谱比直接研究其自身的邻接谱会更有效, 并且研究图的拟拉普拉斯谱可以反映图的某些特性.

显然, 图的拟拉普拉斯谱半径有如下性质:

性质 1　设 G 是 n 阶简单连通图, 则有:

(1) $\mu_1(G) \leqslant 2\Delta$;

(2) $\mu_1(G) \leqslant \max\{d_i + d_j: v_iv_j \in E(G)\}$.

同时, 拟拉普拉斯谱半径和拉普拉斯谱半径有这样的关系:

$$\lambda_1(G) \leqslant \mu_1(G),$$

两个谱半径的有些上界是非常类似的.

下面我们列出一些已有的结论:

定理 1[1]　设图 $G = (V, E)$ 为 n 个顶点 m 条边的简单图, 顶点的度序列 $\pi = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 且满足 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$, 则图 G 的拟拉普拉斯谱半径 $\mu_1(G)$ 有:

$$\mu_1(G) \leqslant d_1 + \sqrt{2m + d_1(d_n - 1) - d_n(n - 1)}.$$

定理 2[2]　设图 $G = (V, E)$ 为 n 个顶点 m 条边的无向简单图, 且 G 无孤立点, 则 G 的拟拉普拉斯谱半径 $\mu_1(G)$ 有:

$$\mu_1(G) \leqslant \sqrt{4m + 2\Delta^2 + 2(\delta - 1)\Delta - 2\delta(n - 1)},$$

其中 Δ, δ 分别为图 G 的最大度和最小度, 等号成立的充要条件是图 G 为一些顶点度相同的正则图的并.

定理 3[3]　设图 $G = (V, E)$ 为 n 个顶点 m 条边的无向简单图, 则

$$\mu_1(G) \leqslant \frac{1}{n}\left(2m + \sqrt{m[(n - 1)(n^2 - 4m) + 2mn]}\right),$$

其中等号成立时当且仅当 G 是完全图 K_n.

1　主要结论

引理 1[4]　设 $\boldsymbol{B}$ 是一个实对称阵, 令 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n}$, λ 为 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征值且其对应的特征向量为 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 其中 $x_i \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则有:

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} S_i(\boldsymbol{B}) \leqslant \lambda \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} S_i(\boldsymbol{B}),$$

其中 $S_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}$, 即 $\boldsymbol{B}$ 中第 i 行元素的和.

引理 2[4]　设 $\boldsymbol{B}$ 是一个 n 阶的实对称阵, 令 λ 为 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征值且其对应的特征向量为 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 其中 $x_i \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则有:

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} S_i(p(\boldsymbol{B})) \leqslant p(\lambda) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} S_i(p(\boldsymbol{B})),$$

其中 $p(\cdot)$ 表示一任意多项式, S_i 表示 $p(\boldsymbol{B})$ 中第 i 行元素之和.

下面我们针对连通图研究其拟拉普拉斯矩阵的特征值, 其中所用的记号见文献[5-7], 同时对连通性的考察见参考文献[8, 9].

定理 4　设图 $G = (V, E)$ 为具有 n 个顶点 m 条边的简单连通图, 且顶点的度序列满足 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$, $\boldsymbol{Q}(G) = \boldsymbol{D}(G) + \boldsymbol{A}(G)$ 为 G 的拟拉普拉斯矩阵, 令 μ_1 为 $\boldsymbol{Q}(G)$ 的最大特征值, 即图 G 的拟拉普拉斯谱半径, 则有

$$\mu_1 \leqslant \frac{d_1 + 2d_i - 1 + \sqrt{(d_1 + 1)^2 + 4(d_1 - d_i)(2i - 3 - d_i)}}{2},$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant n$.

证明　当 $i = 1$ 时, 不等式即为 $\mu_1(G) \leqslant 2d_1$, 由引理 1 可知该结论显然成立.

当 $2 \leqslant i \leqslant n$ 时, 设 $d_1 \geqslant d_i$, 则图 G 的拟拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{Q}(G)$ 的分块形式为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12} \\ \boldsymbol{Q}_{21} & \boldsymbol{Q}_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{Q}_{11}$ 为一个 $(i-1)\times(i-1)$ 的矩阵, $\boldsymbol{Q}_{22}$ 为一个 $(n-i+1)\times(n-i+1)$ 的矩阵.

设 x 为一个不大于 1的正实数, 取可逆矩阵

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} x\boldsymbol{I}_{i-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_{n-i+1}\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{U}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{x}\boldsymbol{I}_{i-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_{n-i+1}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}(G)=\boldsymbol{U}\boldsymbol{Q}(G)\boldsymbol{U}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_{11} & x\boldsymbol{Q}_{12} \\ \frac{1}{x}\boldsymbol{Q}_{21} & \boldsymbol{Q}_{22}\end{pmatrix}.$$

考虑矩阵 $\boldsymbol{K}(G)$ 的行和 $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$, 首先考虑前 $i-1$行的行和, 显然第一行的行和最大, 则

$$r_1=d_1+\sum_{j=1}^{i-1}a_{1j}+x\sum_{j=i}^{n}a_{1j}=d_1+xd_1+(1-x)\sum_{j=1}^{i-1}a_{1j}\leqslant (1+x)d_1+(1-x)(i-2). \tag{1}$$

接着考虑第 i行到第 n行的行和, 显然第 i行的行和最大, 则

$$r_i=d_i+\frac{1}{x}\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}+\sum_{j=i}^{n}a_{ij}=2d_i+\left(\frac{1}{x}-1\right)\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}\leqslant 2d_i+\left(\frac{1}{x}-1\right)(i-1). \tag{2}$$

显然,

$$\max\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}\leqslant\max\{(1+x)d_1+(1-x)(i-2), 2d_i+\left(\frac{1}{x}-1\right)(i-1)\}.$$

令

$$(1+x)d_1+(1-x)(i-2)=2d_i+\left(\frac{1}{x}-1\right)(i-1),$$

可得到:

$$(d_1-i+2)x^2+(d_1+2i-3-2d_i)x-(i-1)=0$$

解该方程得:

$$x=\frac{-(d_1+2i-3-2d_i)+\sqrt{(d_1+1)^2+4(d_1-d_i)(2i-d_i-3)}}{2(d_1-i+2)}.$$

易验证, $d_1=d_i$时, $x=1$, $d_1>d_i$时, $0<x<1$, 而另一个根由于 x 是不大于 1的正实数, 故舍去. 将其代入 (1) 式, 有:

$$\mu_1(G)\leqslant(1+x)d_1+(1-x)(i-2)=(d_1+i-2)+(d_1-i+2)x=\frac{d_1+2d_i-1+\sqrt{(d_1+1)^2+4(d_1-d_i)(2i-3-d_i)}}{2}.$$

从上述定理我们看到结论中的 i的任意性, 所以我们可以进一步得到下面更强的结论:

定理 5 设图 $G=(V, E)$ 为具有 n个顶点 m 条边的简单连通图, 且顶点的度序列满足 $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n$, 则图 G 的拟拉普拉斯谱半径 μ_1 有:

$$\mu_1\leqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{d_1+2d_i-1+\sqrt{(d_1+1)^2+4(d_1-d_i)(2i-3-d_i)}}{2}\right\}.$$

定理 6 设图 $G=(V, E)$ 为具有 n个顶点 m条边的简单连通图, 且顶点的最大度为 Δ, 次大顶点度为 Δ', 若 G 中有 p 个顶点度为 Δ, 则图 G的拟拉普拉斯谱半径 μ_1 有:

$$\mu_1(G)\leqslant\frac{\Delta+2\Delta'-1+\sqrt{(\Delta+1)^2+4(\Delta-\Delta')(2p-1-\Delta')}}{2}.$$

证明　将 $\Delta = d_1$, $\Delta' = d_i$, $p = i - 1$代入定理 5,即可得到该结论.

我们选择顶点数分别为 5、6、7的 3个简单图(图 1～3)来具体说明定理 4中所提上界的优越性,将定理 4,定理 1,2,3中的上界分别记为上界 1,上界 2,上界 3,上界 4,列表如下:

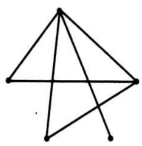

图 1　5个顶点

Fig.1　Five vertices

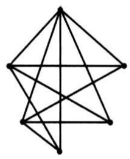

图 2　6个顶点

Fig.1　Six vertices

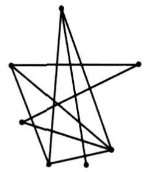

图 3　7个顶点

Fig.3　Seven vertices

表 1　几个上界优越性的比较

Table 1　The superiority comparison of some bounds

图	$\mu_1(G)$	上界 1	上界 2	上界 3	上界 4
图 1	7.7588	8.4495	9.1231	9.1652	8.9687
图 2	5.7785	6.3723	6.8284	6.9282	6.3192
图 3	6.7570	7.0000	7.7417	7.7460	9.1493

由此可见,该结果相比较而言具有一定的优越性.

[参考文献]

[1] Zhang X D, Luo Rong. The Laplacian eigenvalues of mixed graphs[J]. Linear Algebra Appl, 2003, 362: 109-119.

[2] 郭曙光. 图拟拉普拉斯矩阵的特征值[J]. 淮阴师范学院学报: 自然科学版, 2003, 2(1): 10-12.

[3] 汪乐飞. 图的拟拉普拉斯矩阵的最大特征值[J]. 乐山师范学院学报, 2005, 20(5): 14-15.

[4] Ellingham M N, Zha Xiaoya. The spectral radius of graphs on surfaces[J]. J Combin Theory, Series B, 2000, 78: 45-56.

[5] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory With Applications[M]. New York: The Macmillan Press LTD, 1976.

[6] Biggs N. Algebraic Graph Theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1974.

[7] 李乔, 冯克勤. 论图的最大特征根[J]. 应用数学学报, 1979, 2(2): 167-175.

[8] 吴雅容. 关于图的谱及色数的若干结果[D]. 上海: 华东师范大学, 2004.

[9] 杨进, 陈丽娟. 图的 Hamilton-圈与连通度[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2003, 26(1): 11-16.

[责任编辑: 丁　蓉]