

# W ehrl熵表征介观生物细胞量子效应的研究

徐兴磊, 徐世民, 王 帅

(菏泽学院物理系, 量子信息与计算重点实验室, 山东 菏泽 274015)

[摘要] 借助信息测量理论中的 W ehrl熵, 研究热场中谐振子系统的 W ehrl熵. 将介观生物细胞等效成热谐振子, 研究热场中 W ehrl熵和介观生物细胞量子效应的关系. 结果表明, W ehrl熵不仅和谐振子的本征频率有关, 而且与热场温度有关; 生物细胞等效电路中电流和电压的量子涨落及相应不确定关系随 W ehrl熵增加而增加, 随 W ehrl熵减小而减小; W ehrl熵是表征介观生物细胞量子效应的最好度量.

[关键词] W ehrl熵, 热谐振子, 介观生物细胞, 量子涨落

[中图分类号] O413.1; O431.2 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2008)02-0054-05

## Research on the Denotation of the Quantum Effects for a Mesoscopic Biological Cell by W ehrl Entropy

Xu Xinglei, Xu Shimin, Wang Shuai

(Department of Physics, Key Laboratory of Quantum Communication and Calculation, Heze College, Heze 274015, China)

**Abstract** By using the information-theoretic W ehrl entropy, the W ehrl entropy of a harmonic oscillator is obtained in thermal field. The mesoscopic biological cell is equivalent with the thermal harmonic oscillator. The relation between the W ehrl entropy and the quantum effects of mesoscopic biological cell is studied in thermal field. These results show that the W ehrl entropy is related not only to the eigenfrequency, but also to the temperature. And the quantum fluctuation and the corresponding uncertainty relation of current and voltage grow with increasing the W ehrl entropy and become small with decreasing the W ehrl entropy. So the W ehrl entropy is regarded as a best measurement of the quantum effects of mesoscopic biological cell equivalent circuit.

**Key words** W ehrl entropy, thermal harmonic oscillator, mesoscopic biological cell, quantum fluctuation

信息熵是信息科学中的一个基本量, 由统计物理理论知, 系统的信息熵是描述该系统量子涨落的度量. 信息熵这一概念首先由 Shannon 和 Weaver<sup>[1]</sup>提出, 而量子态或经典态的信息熵则由 W ehrl 建立<sup>[2]</sup>. 近年来, 人们研究了各种态下的 W ehrl 熵, 如奇偶相干态和叠加相干态的 W ehrl 熵和 Shannon 熵, 真空态与粒子数叠加态的 W ehrl 熵的压缩特性, 负  $P$  表示非经典光场的 W ehrl 熵. Louise<sup>[3]</sup>又首先研究了介观 LC 电路的量子效应, 并给出了这一电路中电荷和电流在真空态下的量子涨落. 近年来, 大量文献从不同的角度研究了无耗散和耗散介观电路体系中电荷、电流和电压的量子涨落<sup>[4-8]</sup>. 由于实际电路常常工作在一定温度下, 最近, 一些文献开始研究温度对介观电路量子效应的影响<sup>[6-8]</sup>. “生物芯片”的概念把微电子集成电路技术与生物活性分子功能有机的结合起来, 构建具有生物活性的微功能单元进行信息的获取、贮存和处理, 揭开了生物电子学发展的新篇章. 介观条件下生物细胞呈现电容、电感及电阻特性, 等效于 RLC 串并联电路<sup>[9-10]</sup>. 而利用 W ehrl 熵表征介观生物细胞等效电路量子效应的研究尚未见报道. 我们首先借助信息测量理论中的 W ehrl 熵, 研究了在平衡态热场中谐振子的 W ehrl 熵, 然后通过正则变换, 对介观生物细胞进行量子化, 使其等效为一个热场中的热谐振子, 建立了介观生物细胞量子效应和热场中的 W ehrl 熵之间的关系.

收稿日期: 2007-11-28

基金项目: 菏泽学院自然科学基金(XY07WL01), 山东省高等学校实验技术(S04WL38)资助项目.

通讯联系人: 徐兴磊, 副教授, 研究方向: 介观物理量子效应与 ISP 技术应用. E-mail: xxlw@126.com.

## 1 热场中谐振子系统的 W ehrl熵

在谐振子相干态表示的量子力学相空间分布中, Andersen 和 Halliwell<sup>[11]</sup>研究了 W ehrl熵和 Husim i分布. 而相干态是广义湮灭算符  $a$  的本征态<sup>[12]</sup>

$$|z\rangle = \exp\left[-\frac{|z|^2}{2} + za^\dagger\right] |0\rangle; a|z\rangle = z|z\rangle. \quad (1)$$

在 Hilbert 空间, 利用有序算符内的积分技术 (WOP)<sup>[12]</sup>, 可知相干态具有超完备性

$$\begin{aligned} \oint_{\pi} \frac{d^2z}{\pi} |z\rangle \langle z| &= \oint_{\pi} \frac{d^2z}{\pi} \exp\left[-\frac{|z|^2}{2} + za^\dagger\right] |0\rangle \langle 0| \exp\left[-\frac{|z|^2}{2} + z^* a\right] = \\ \oint_{\pi} \frac{d^2z}{\pi} \exp(-|z|^2 + za^\dagger + z^* a - a^\dagger a) &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

在统计物理中, W ehrl熵可用来表征系统的量子涨落, 而 W ehrl熵概念又常用相干态来描述. 文献[13]已给出 W ehrl熵定义

$$I_W = - \oint_{2\pi\hbar} \frac{dx dp}{2\pi\hbar} \mu(p, x) \ln \mu(p, x), \quad (3)$$

其中  $\mu(p, x) = \langle z | \rho | z \rangle$  是和密度矩阵相关的半经典相空间的分布函数, 又称为 Husim i分布<sup>[12]</sup>. Husim i分布对于讨论热平衡态具有特别意义<sup>[14]</sup>, 而热平衡态的热密度矩阵是

$$\rho = Z^{-1} e^{-\beta \hat{H}}, \quad (4)$$

式中  $Z = \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}})$  为配分函数,  $\beta = 1/kT$ ,  $\hat{H}$  为体系 Hamilton 算符. 对于一维谐振子, 其哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, \quad (5)$$

它的本征态为  $|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle$ , 本征值为  $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$ . 由式(1)得

$$|\langle z | n \rangle|^2 = \frac{|z|^{2n}}{n!} e^{-|z|^2}, \quad (6)$$

而配分函数在粒子数表象中为

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}}) = \sum_n \langle n | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle = \sum_n \langle n | e^{-\beta \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)} | n \rangle = \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta \hbar\omega}}{1 - e^{-\beta \hbar\omega}}, \quad (7)$$

由式(6), (7)可得 Husim i分布为

$$\mu(p, x) = \langle z | \rho | z \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n \langle z | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle \langle n | z \rangle = (1 - e^{-\beta \hbar\omega}) e^{-(1 - e^{-\beta \hbar\omega}) |z|^2}, \quad (8)$$

将式(8)代入式(3), 可得热场中谐振子系统的 W ehrl熵为

$$I_W = 1 - \ln(1 - e^{-\beta \hbar\omega}). \quad (9)$$

这里利用到高斯积分公式<sup>[12]</sup>

$$\oint_{\pi} \frac{d^2z}{\pi} e^{-\lambda |z|^2 + fz + g z^*} = -\frac{1}{\lambda} e^{-fg/\lambda}, \quad \oint_{\pi} \frac{d^2z}{\pi} e^{-\lambda |z|^2} z^n z^{*k} = (-1)^{k+1} \lambda^{-(k+1)} k! \delta_{n,k}. \quad (10)$$

由此可见, 热谐振子系统的 W ehrl熵不仅与系统的本征频率有关, 而且还与温度有关. 当热场中的温度  $T$  接近于零时, W ehrl熵趋近于 1; 当温度  $T$  趋近于无穷大, W ehrl熵趋近于无穷大; 即使热场温度等于零, W ehrl熵也不会消失. 由于 W ehrl熵可以用来表征系统可观测物理量的涨落及相应不确定关系<sup>[13]</sup>. 下面讨论介观生物细胞等效电路量子效应和 W ehrl熵之间的关系.

## 2 W ehrl熵表征介观生物细胞等效电路的量子效应

生物细胞活动具有阻尼震荡特征, 其等效电路如图 1所示.  $C$  代表生物细胞的容抗特性,  $L$  代表生物细胞的感抗特性,  $R$  为阻尼电阻,  $R_1$  为耗散电阻. 根据基尔霍夫定律, 其经典运动方程为

$$LC \ddot{i} + \left[ \frac{L}{R} + R_1 C \right] \dot{i} + \left[ 1 + \frac{R_1}{R} \right] i = i_s(t), \quad (11)$$

式中  $i$  为电感支路的电流,  $\dot{\mathbf{s}}(t)$  为信号源电激流. 令  $u = \dot{L}i$   
 $u$  为电感两端电压, 则有

$$\dot{i} = \frac{u}{L}, \dot{u} = - \left( \frac{1}{RC} + \frac{R_1}{L} \right) u - \left( \frac{1}{C} + \frac{R_1}{RC} \right) i + \frac{\dot{\mathbf{s}}(t)}{C},$$

(12)

要对介观生物细胞等效电路量子化, 引入如下正则变换

$$I = i\tau e^{\frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{RC}\right)t}, U = u\tau e^{\frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{RC}\right)t} + \frac{1}{2}\left(R_1 + \frac{L}{RC}\right)I$$

(13)

式中时间常数  $\tau = \omega_0^{-1} = \sqrt{LC}$ , 其作用是保证量纲一致.  $\omega_0$

为等效电路的谐振频率.  $I$  和  $U$  分别为复正则电流和复正则电压, 满足哈密顿正则方程

$$\dot{I} = \frac{\partial H}{\partial U} = \frac{U}{L}, \dot{U} = - \frac{\partial H}{\partial I} = - L\omega^2 I + \frac{\tau}{C}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{RC}\right)t}\dot{\mathbf{s}}(t),$$

(14)

式中  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{RC}\right)^2} + \frac{R_1}{LRC}$

可得:  $\frac{\partial I}{\partial I} + \frac{\partial U}{\partial U} = 0$  即  $I$  和  $U$  构成一对共轭变量, 作为正则力学量算符, 满足正则对易关系  $[I, U] = j\hbar (j^2 = -1)$ . 通过正则变换, 使有阻尼的介观电路的哈密顿量在形式上化成以  $\omega$  为频率的无阻尼的谐振子哈密顿量, 系统的哈密顿量为

$$H = \frac{U^2}{2L} + \frac{1}{2}L\omega^2 I^2 - iL\tau^{-1}\dot{\mathbf{s}}(t)e^{\frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{RC}\right)t},$$

(15)

引入推广的湮没和产生算符

$$a = \frac{1}{\sqrt{2L\omega\hbar}}(L\omega I + jU), a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2L\omega\hbar}}(L\omega I - jU).$$

(16)

由  $[I, U] = j\hbar$  可知  $[a, a^\dagger] = 1$  相应的量子化的哈密顿量为

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) - (a + a^\dagger)\sqrt{\frac{\hbar}{2L\omega}}L\dot{\mathbf{s}}(t)\tau^{-1}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{RC}\right)t}.$$

(17)

当  $\dot{\mathbf{s}}(t) = 0$  时,  $H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right).$

因此, 介观生物细胞量子化后可与外源驱动下的量子化谐振子等效.

在量子力学中, 对于一个热场中的一维谐振子, 它在基态的平均能量为<sup>[15]</sup>

$$E = \hbar\omega\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{1}{\beta\hbar\omega}} - 1}\right].$$

(18)

由于介观生物细胞等效电路可被等效为一个谐振子, 该谐振子和外部环境处于温度为  $T$  的热平衡态时, 式 (18) 所表示的基态平均能量就是介观生物细胞等效电路在热真空态下的平均能量. 显然该平均能量与电路系统的频率  $\omega$  和环境温度  $T$  有关. 在平衡态热场中, 谐振子的坐标方均值和动量方均值与其基态平均能量之间的关系为

$$E = m\omega^2\langle x^2 \rangle, E = \langle p^2 \rangle/m.$$

(19)

在介观生物细胞等效电路中, 将电路的电感  $L$  等效为参量  $m$ , 广义坐标  $I$  等效为坐标  $x$ , 广义动量  $U$  等效为动量  $p$ , 由式 (9)、(18) 和 (19) 可得电路系统的  $I$  和  $U$  在热真空态下的方均值

$$\langle I^2 \rangle_T = \frac{\hbar}{2\omega L}(2e^{\frac{1}{\beta\hbar\omega}} - 1); \langle U^2 \rangle_T = \frac{\hbar\omega L}{2}(2e^{\frac{1}{\beta\hbar\omega}} - 1).$$

(20)

由式 (13) 和 (20), 我们可以得到热真空态下介观生物细胞中电流电压的平均值和方均值为

$$\langle i \rangle_T = 0, \langle i^2 \rangle_T = \frac{\hbar}{2L\omega}(2e^{\frac{1}{\beta\hbar\omega}} - 1)\tau^2 e^{-\left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{RC}\right)t},$$

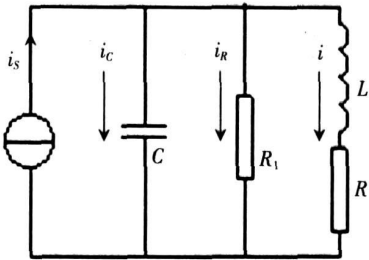


图 1 介观生物细胞等效电路  
Fig.1 Mesoscopic biological cell equivalent circuit

$$\langle u \rangle_T = 0 \quad \langle u^2 \rangle_T = \frac{L\hbar}{2\omega} \omega_0^2 \left( 1 + \frac{R_L}{R} \right) (2e^{I_{w-1}} - 1) \tau^2 e^{-\left( \frac{R_L+1}{L+RC} \right) t}. \quad (21)$$

由此我们可以得到电流和电压的量子涨落及测不准关系为

$$\begin{aligned} \langle (\Delta i)^2 \rangle_T &= \frac{\hbar}{2L\omega} (2e^{I_{w-1}} - 1) \tau^2 e^{-\left( \frac{R_L+1}{L+RC} \right) t}, \\ \langle (\Delta u)^2 \rangle_T &= \frac{L\hbar}{2\omega} \omega_0^2 \left( 1 + \frac{R_L}{R} \right) (2e^{I_{w-1}} - 1) \tau^2 e^{-\left( \frac{R_L+1}{L+RC} \right) t}, \\ \langle (\Delta i)^2 \rangle_T \cdot \langle (\Delta u)^2 \rangle_T &= \frac{\hbar^2}{4} \frac{\left( 1 + \frac{R_L}{R} \right) \omega_0^2}{1 - LC(R_L/L + 1/RC)^2/4 + R_L/R} (2e^{I_{w-1}} - 1)^2 \tau^4 e^{-2\left( \frac{R_L+1}{L+RC} \right) t}. \end{aligned} \quad (22)$$

由此可见,介观生物细胞中电流和电压的量子涨落及其相应不确定关系都随着 W ehrl熵的增大而增大, W ehrl熵的减小而减小. 而 W ehrl熵又随温度的升高而增大, 随温度降低而减小. 所以, 介观生物细胞中电流和电压的量子涨落及其相应不确定关系随着温度的升高而增大, 随温度的降低而减小. 这一结果与目前采用 Takahashi-Umezawa 的热场动力学理论 (TFD) 研究结论一致<sup>[9-10]</sup>. 因此 W ehrl熵可以作为表征介观电路量子涨落及不确定关系的最好度量.

当  $T \rightarrow 0$  时,  $I_w \rightarrow 1$  可得真空态下电流和电压的量子涨落及相应测不准关系

$$\begin{aligned} \langle (\Delta i)^2 \rangle &= \frac{\hbar}{2L\omega} \tau^2 e^{-\left( \frac{R_L+1}{L+RC} \right) t}, \quad \langle (\Delta u)^2 \rangle = \frac{L\hbar}{2\omega} \omega_0^2 \left( 1 + \frac{R_L}{R} \right) \tau^2 e^{-\left( \frac{R_L+1}{L+RC} \right) t}, \\ \langle (\Delta i)^2 \rangle \langle (\Delta u)^2 \rangle &= \frac{\hbar^2}{4\omega^2} \omega_0^2 \frac{\left( 1 + \frac{R_L}{R} \right)}{1 - LC(R_L/L + 1/RC)^2/4 + R_L/R} \tau^4 e^{-2\left( \frac{R_L+1}{L+RC} \right) t}. \end{aligned} \quad (23)$$

当  $R \rightarrow \infty$  且  $R_L \rightarrow 0$  时, 电路变成理想的无阻尼无耗散 LC 并联电路, 热真空态下电流和电压的量子涨落及相应测不准关系

$$\begin{aligned} \langle (\Delta i)^2 \rangle_T &= \frac{\hbar}{2L\omega_0} \tau^2 (2e^{I_{w-1}} - 1), \quad \langle (\Delta u)^2 \rangle_T = \frac{L\hbar\omega_0}{2} \tau^2 (2e^{I_{w-1}} - 1), \\ {}_T \langle (\Delta i)^2 \rangle_T \cdot {}_T \langle (\Delta u)^2 \rangle_T &= \frac{\hbar^2}{4} \tau^4 (2e^{I_{w-1}} - 1)^2. \end{aligned} \quad (24)$$

当  $T \rightarrow 0$   $R \rightarrow \infty$  且  $R_L \rightarrow 0$  时, 可得理想的无阻尼无耗散 LC 并联电路在真空态下电流和电压的量子涨落及相应测不准关系

$$\begin{aligned} \langle (\Delta i)^2 \rangle_T &= \frac{\hbar}{2L\omega_0} \tau^2, \quad \langle (\Delta u)^2 \rangle_T = \frac{L\hbar\omega_0}{2} \tau^2, \\ \langle (\Delta i)^2 \rangle_T \cdot \langle (\Delta u)^2 \rangle_T &= \frac{\hbar^2}{4} \tau^4. \end{aligned} \quad (25)$$

这时电流和电压的量子涨落及相应测不准关系和电路的固有频率有关.

### 3 结论

利用信息测量理论和热场中热密度矩阵, 给出了热谐振子系统的 W ehrl熵. 该 W ehrl熵不仅与热谐振子的本征频率有关, 而且随温度的升高而增大, 减小而减小. 把介观生物细胞等效电路量子化, 等效为一个热场中的谐振子, 研究了介观生物细胞等效电路中电流和电压的量子涨落及不确定关系与相应 W ehrl熵的表征. 研究表明, 介观生物细胞等效电路中电流和电压的量子涨落及相应不确定关系随着 W ehrl熵增大而增大, 减小而减小; 由于阻尼及耗散电阻的存在, 介观生物细胞中电流电压的量子涨落随时间按指数规律衰减. 因此 W ehrl熵是表征介观电路的量子效应的最好度量. 对生物电子芯片、生物电子开关、生物电子贮存器的设计、制作以及在生物电子学领域的广泛应用具有十分重要的理论指导意义.

[参考文献]

[ 1 ] Shannon C E, WeaverW. TheM a thematical Theory ofCommunication [M ]. Urbana TheUniversity of Illino Press, 1963 1-160

[ 2 ] Vaccaro J A, Orłowski A phase properties ofKerrmedia via variance and entropy as of uncertainty[ J]. J Phys Rev A, 1995 51( 5): 4 172-4 180

[ 3 ] LouisellH H. Quantum Statistical Properties ofRadiation[M ]. NewYork John Wiley, 1973 230-268

[ 4 ] Wang J S, Feng J Zhan M S Quantum fluctuations of a non-dissipative mesoscopic inductance coupling circuit in a displaced squeezed Fock state[ J]. Phys Lett A, 2001, 281 341-346

[ 5 ] Xu X L, LiH Q, Wang J S The quantum fluctuations ofmesoscopic damped mutual capacitance coupled double resonance RLC circuit in excitation state of the squeezed vacuum state[ J]. Int J ofTheor Phys 2006, 45( 12): 2 517-2 528

[ 6 ] Xu X L, LiH Q, Wang J S Quantum fluctuations ofmesoscopic damped double resonance RLC circuit with mutual capacitance-inductance coupling in thermal excitation state[ J]. Chin Phys 2007, 16( 8): 2 462-2 470

[ 7 ] Xu X L, Li H Q, Wang J S Quantum fluctuations of mesoscopic RLC circuit involving complicated coupling in thermal squeezed state[ J]. Physica B: Condensed Matter 2007, 396( 1/2): 199-206

[ 8 ] Fan H Y, Liang X T. Quantum fluctuation in thermal vacuum state formesoscopic LC electric circuit[ J]. Chin Phys Lett 2000, 17( 3): 174-176

[ 9 ] 韩玖荣, 姜玉梅, 李淑玲, 等. 介观生物细胞等效电路的量子化 [ J]. 量子电子学报, 2003, 20( 2): 198-202

[ 10 ] 李洪奇. 有限温度下生物细胞中电流电压的量子涨落 [ J]. 光电子激光, 2005, 16( 6): 757-760

[ 11 ] Arlen Anderson, Jonathan J Halliwell Information-theoretic measure of uncertainty due to quantum and thermal fluctuations [ J]. Phys Rev D, 1993, 48( 6): 2 753-2 765.

[ 12 ] 范洪义. 量子力学表象与变换论 [M ]. 上海: 上海科学技术出版社, 1997 43-323

[ 13 ] WehrlA. General properties of entropy[ J]. RevMod Phys, 1978, 50( 2): 221-260

[ 14 ] HusimiK. Some formal properties of the density matrix [ J]. Proc PhysM ath Soc Japan 1940 22 264-314

[ 15 ] Cohen-Tannoudji C, Diu B, Frank Laib. Quantum Mechanics[M ]. Hermann Wiley, 1977 481-508

[责任编辑: 顾晓天]