长方矩阵的加权群逆的存在条件与表示

陈永林

(南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 岑建苗定义了长方阵的加权群逆: 设 $A\in C^{m\times n}$, $W\in C^{n\times m}$. 若 $X\in C^{m\times n}$适合矩阵方程组

$$(W1)AWXWA=A,\quad (W2)XWAWX=X,\quad (W3)AWX=XWA,$$

则称 X 为 A 的加 W 权群逆, 记作 $A_W^{\#}$. 本文给出了加权群逆 $A_W^{\#}$ 的许多新的存在条件与新的表示, 并研究了 Cline 与 Greville定义的加权群逆的存在条件与表示.

[关键词] 加权群逆, 定义方程, 存在条件, 表示

[中图分类号] O241.6 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2008)03-0001-05

Existence Conditions and Expressions for Weighted Group Inverses of Rectangular Matrices

Chen Yonglin

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract Cen has defined a weighted group inverse of rectangular matrices. Let $A\in C^{m\times n}$ and $W\in C^{n\times m}$. If $X\in C^{m\times n}$ satisfies the system of matrix equations

$$(W1)AWXWA=A,\quad (W2)XWAWX=X,\quad (W3)AWX=XWA,$$

then X is called the weighted group inverse of A and denoted by $A_W^{\#}$. New existence conditions and new expressions for the inverse $A_W^{\#}$ were given, and an existence condition and several expressions for the weighted group inverse $A_{g,W}$ of A defined by Cline and Greville were also given.

Key words weighted group inverse, defining equation, existence condition, expression

最近, 文[1]定义了长方阵的一种加权群逆: 设 $A\in C^{m\times n}$, $W\in C^{n\times m}$. 若 $X\in C^{m\times n}$ 是矩阵方程组(以下简称 W-方程组)

$$(W1)AWXWA = A,\quad (W2)XWAWX = X,\quad (W3)AWX = XWA$$

的解, 则称 X 为 A 的加 W 权群逆, 记作 $A_W^{\#}$. 这是一个新概念, 它不同于 Cline与 Greville[2] 提出的长方矩阵的加权 Drazin逆的概念. 文[1] 给出了 $A_W^{\#}$ 存在的条件及其若干显式表示, 但文[1] 没有考虑 Cline与 Greville[2] 意义下长方阵的加权群逆的存在条件与表示.

本文的目的是给出加权群逆 $A_W^{\#}$ 存在的新的充要条件与 $A_W^{\#}$ 的许多新表示, 作为文[1] 的补充; 给出 Cline与 Greville[2] 意义下的加权群逆存在的充要条件与显式表示, 作为文[3] 中关于长方阵的加权 Drazin逆内容的补充.

本文采用文[3, 4] 中关于广义逆矩阵与投影算子的记号与术语.

1 $A_W^{\#}$ 的存在条件与表示

定理 1 设 $A\in C^{m\times n}$, $W\in C^{n\times m}$, A 有满秩分解 $A = PQ$. 则下列提法互相等价:

(1) A 的加 W 权群逆 $A_W^{\#}$ 存在.

收稿日期: 2007-10-04

基金项目: 江苏省自然科学基金(BK2006725)资助项目.

通讯联系人: 陈永林, 教授, 研究方向: 计算数学与广义逆矩阵论.

(2) 群逆 $(\boldsymbol{AW})^{\#}$ 与 $(\boldsymbol{WA})^{\#}$ 均存在, 且 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{AW}=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{WA}=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$.

(3) $R(\boldsymbol{WA})\oplus N(\boldsymbol{A})=C^n$ 且 $N(\boldsymbol{AW})\oplus R(\boldsymbol{A})=C^m$.

(4) $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{AWA}=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$ (或方程 $\boldsymbol{AWAX}=\boldsymbol{A}$ 有解, 或方程 $\boldsymbol{XAWA}=\boldsymbol{A}$ 有解).

(5) $\boldsymbol{QWP}$ 可逆[1].

证明　(1)⇒(2): 设 $\boldsymbol{W}$-方程组有解 $\boldsymbol{X}_0$. 则从 (W1)$\boldsymbol{AWX}_0\boldsymbol{WA}=\boldsymbol{A}$ 可得 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{AW}=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{WA}$. 另从 (W1) 与 (W3) 可得 $(\boldsymbol{AW})^2\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{WA})^2=\boldsymbol{A}$, 从而有

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{AW})^2=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{AW}\text{ 与 }\mathrm{rank}(\boldsymbol{WA})^2=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{WA}.$$

这表明两个群逆 $(\boldsymbol{AW})^{\#}$ 与 $(\boldsymbol{WA})^{\#}$ 均存在.

(2)⇒(3): 因 $(\boldsymbol{AW})^{\#}$ 存在等价于 $R(\boldsymbol{AW})\oplus N(\boldsymbol{AW})=C^m$, $(\boldsymbol{WA})^{\#}$ 存在等价于 $R(\boldsymbol{WA})\oplus N(\boldsymbol{WA})=C^n$, 注意到条件 $R(\boldsymbol{AW})=R(\boldsymbol{A})$ 与 $N(\boldsymbol{WA})=N(\boldsymbol{A})$, 故 (3) 中两个直和分解成立.

(3)⇒(4): 在直和分解 $R(\boldsymbol{WA})\oplus N(\boldsymbol{A})=C^n$ 两边左乘以 $\boldsymbol{A}$, 可得 $R(\boldsymbol{AWA})=R(\boldsymbol{A})$, 此即 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{AWA}=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$. 这一条件等价于方程 $\boldsymbol{AWAX}=\boldsymbol{A}$ 有解或方程 $\boldsymbol{XAWA}=\boldsymbol{A}$ 有解.

(4)⇔(5): 因 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{AWA}\equiv\mathrm{rank}\,\boldsymbol{PQWPQ}=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{QWP}$, $\boldsymbol{QWP}$ 为 r 阶方阵, 这里 $r=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$, 故 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{AWA}=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{QWP}$ 可逆.

(5)⇒(1): 当 $\boldsymbol{QWP}$ 可逆时, 令 $\boldsymbol{X}_0\equiv\boldsymbol{P}(\boldsymbol{QWP})^{-2}\boldsymbol{Q}$. 则易验明 $\boldsymbol{X}_0$ 是 $\boldsymbol{W}$-方程组的解.

注 1　设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PQ}$ 为满秩分解. 若 $\boldsymbol{W}$-方程组有解 $\boldsymbol{X}_0$, 则易证 $R(\boldsymbol{X}_0)=R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{P})$ 与 $N(\boldsymbol{X}_0)=N(\boldsymbol{A})=N(\boldsymbol{Q})$. 进而不难证明 $\boldsymbol{X}_0$ 可表为

$$\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{PDQ}, \text{ 其中 } \boldsymbol{D} \text{ 为某个待定的可逆阵.}$$

将 $\boldsymbol{X}_0$ 的这一表示代入 (W1) 或 (W2), 可知 $\boldsymbol{QWP}$ 必是可逆阵, 且 $\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{QWP})^{-2}$. 这说明了如果 $\boldsymbol{W}$-方程组有解, 则其解必是惟一的, 它可表为 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{QWP})^{-2}\boldsymbol{Q}$ 之形状.

次之定理给出加 $\boldsymbol{W}$ 权群逆 $\boldsymbol{A}_W^{\#}$ 存在时它的性质与表示.

定理 2　设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PQ}$ 为满秩分解. 若 $\boldsymbol{A}_W^{\#}$ 存在, 则它是惟一的, 并有下面的性质与表示:

$$\boldsymbol{A}_W^{\#}=(\boldsymbol{WAW})^{(1,2)}_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A})},$$

$$\boldsymbol{A}_W^{\#}=(\boldsymbol{AW})^{\#}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{WA})^{\#}=\boldsymbol{A}[(\boldsymbol{WA})^{\#}]^2=[(\boldsymbol{AW})^{\#}]^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{QWAWP})^{-1}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{QWP})^{-2}\boldsymbol{Q}.$$

证明　设定理 1所述条件成立, $\boldsymbol{X}_0$ 是 $\boldsymbol{W}$-方程组的解. 用条件 $R(\boldsymbol{AW})=R(\boldsymbol{A})$ 与 $N(\boldsymbol{WA})=N(\boldsymbol{A})$, 易证

$$\boldsymbol{AWX}_0\boldsymbol{WA}=\boldsymbol{A}\text{ 等价于 }\boldsymbol{WAWX}_0\boldsymbol{WAW}=\boldsymbol{WAW}.$$

注意到 (W2)$\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{WAWX}_0=\boldsymbol{X}_0$, 可知 $\boldsymbol{X}_0\in(\boldsymbol{WAW})\{1,2\}$. 又, 从 $\boldsymbol{W}$-方程组容易导出 $R(\boldsymbol{X}_0)=R(\boldsymbol{A})$ 与 $N(\boldsymbol{X}_0)=N(\boldsymbol{A})$. 故 $\boldsymbol{X}_0=(\boldsymbol{WAW})^{(1,2)}_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A})}$. 熟知, 这种广义逆在存在时是惟一的, 此即 $\boldsymbol{A}_W^{\#}$ 存在时是惟一的, $\boldsymbol{A}_W^{\#}=\boldsymbol{X}_0$.

在等式 $\boldsymbol{AWX}_0\boldsymbol{WA}=\boldsymbol{A}$ 的两边左乘以 $(\boldsymbol{AW})^{\#}$、右乘以 $(\boldsymbol{WA})^{\#}$, 并注意 $\boldsymbol{AW}(\boldsymbol{AW})^{\#}\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{WA})^{\#}\boldsymbol{WA}$, 可得 $\boldsymbol{X}_0=(\boldsymbol{AW})^{\#}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{WA})^{\#}$. 再用等式 $(\boldsymbol{AW})^{\#}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{WA})^{\#}$[3], 可得 $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{A}[(\boldsymbol{WA})^{\#}]^2=[(\boldsymbol{AW})^{\#}]^2\boldsymbol{A}$.

从 $\boldsymbol{QWP}$ 可逆知, $\boldsymbol{QW}$ 与 $\boldsymbol{WP}$ 分别是行满秩与列满秩阵, 从而有

$$(\boldsymbol{AW})^{\#}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{QWP})^{-2}\boldsymbol{QW},$$
$$(\boldsymbol{WA})^{\#}=\boldsymbol{WP}(\boldsymbol{QWP})^{-2}\boldsymbol{Q},$$

进而有

$$\boldsymbol{A}_W^{\#}=(\boldsymbol{AW})^{\#}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{WA})^{\#}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{QWP})^{-2}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{QWAWP})^{-1}\boldsymbol{Q}.$$

2　$\mathrm{A}_{\mathrm{W}}^{\#}$ 的定义方程与其他表示

据文[3]第 5章第 5节关于广义逆 $\boldsymbol{A}^{(2)}_{T,S}$ 的定义方程及其应用的理论, 可以得到次之引理.

引理 1　设 $\boldsymbol{A}\in C^{m\times n}$, $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 分别是 C^n 与 C^m 的子空间, 适合条件

$$T\oplus N(\boldsymbol{A})=C^n\text{ 与 }R(\boldsymbol{A})\oplus S=C^m,$$

等价地, 广义逆 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}_{T,S}$ 存在. 则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{(1,2)}_{T,S}$ 是下列 3个约束矩阵方程的惟一解:

(1) $AX = P_{R(A),S}$, $R(X) \subset T$;

(2) $XA = P_{T,N(A)}$, $N(X) \supset S$;

(3) $AXA = A$, $R(X) \subset T$, $N(X) \supset S$.

定理 3　设加 W 权群逆 $A_W^{\#}$ 存在. 则 $X = A_W^{\#}$ 是下列 5个约束矩阵方程的惟一解:

(1) $AWX = A(WA)^{\#}$, $R(X) \subset R(A)$;

(2) $XWA = (AW)^{\#}A$, $N(X) \supset N(A)$;

(3) $AWXWA = A$, $R(X) \subset R(A)$, $N(X) \supset N(A)$;

(4) $(AW)^2X = A$, $R(X) \subset R(A)$;

(5) $X(WA)^2 = A$, $N(X) \supset N(A)$.

证明　已知 $A_W^{\#} = (WAW)^{(1,2)}_{R(A),N(A)}$. 由引理 1可知, $X = A_W^{\#}$ 是下列 3个约束矩阵方程的惟一解:

(1′) $WAWX = P_{R(WAW),N(A)}$, $R(X) \subset R(A)$;

(2′) $XWAW = P_{R(A)N(WAW)}$, $N(X) \supset N(A)$;

(3′) $WAWXWAW = WAW$, $R(X) \subset R(A)$, $N(X) \supset N(A)$.

注意到(1′)与(2′)中的两个投影算子分别是 $WA(WA)^{\#}$ 与 $(AW)^{\#}AW$, 并注意到 $N(WA) = N(A)$ 与 $R(AW) = R(A)$, 所以(1′)与(2′)中的方程分别可左、右消去 W 而得到(1)与(2). 同理, (3′)中的方程可左、右消去 W 而得(3).

在(1)中方程两边以 AW 左乘, 可得 $(AW)^2X = AW(AW)^{\#}A = A$, 故得(4), 反之, 以 $(AW)^{\#}$ 左乘(4)中方程的两边, 可得(1). 所以(1)与(4)是同解的. 同理可证(2)与(5)是同解的.

从定理 3的 5个约束矩阵方程及其变形, 可以获得 $A_W^{\#}$ 的仅用(1)–逆的许多表示与含有可逆阵的许多表示.

定理 4　设 $A_W^{\#}$ 存在. 则 $A_W^{\#}$ 有下列各种表示:

(1.1) $A_W^{\#} = A[(WA)^3]^{(1)}WA = AW[(AW)^3]^{(1)}A$

(1.2) $A_W^{\#} = A(AWA)^{(1)}A(AWA)^{(1)}A$

(1.3) $A_W^{\#} = A[(WA)^2]^{(1)}WAW[(AW)^2]^{(1)}A$

(1.4) $A_W^{\#} = A(AWAWA)^{(1)}A$

(2.1) $A_W^{\#} = (AW + I - AA^{(1)})^{-1}(AW)^{\#}A = A(WA)^{\#}(WA + I - A^{(1)}A)^{-1}$

(2.2) $A_W^{\#} = (AW + I - (AW)^{\#}AW)^{-1}(AW)^{\#}A = A(WA)^{\#}(WA + I - (WA)^{\#}WA)^{-1}$

(2.3) $A_W^{\#} = (AWAA^{(1)} + I - AA^{(1)})^{-1}(AW)^{\#}A = A(WA)^{\#}(A^{(1)}AWA + I - A^{(1)}A)^{-1}$

(2.4) $A_W^{\#} = ((AW)^2 + I - AA^{(1)})^{-1}A = A((WA)^2 + I - A^{(1)}A)^{-1}$

(2.5) $A_W^{\#} = (AW + I - AA^{(1)})^{-1}A(WA + I - A^{(1)}A)^{-1}$

证明　用公式 $G^{\#} = G[G^3]^{(1)}G$ 将定理 3的约束方程(1)与(2)改写为

(1) $AWX = AWA[(WA)^3]^{(1)}WA$, $R(X) \subset R(A)$;

(2) $XWA = AW[(AW)^3]^{(1)}AWA$, $N(X) \supset N(A)$.

由此立见 $A_W^{\#}$ 有(1.1)中的两个表示. 将约束条件 $R(X) \subset R(A)$ 与 $N(X) \supset N(A)$ 等价地表示为 $X = AZA$ 对某个 Z, 代入方程(3), 可得 Z 的一个解 $Z = (AWA)^{(1)}A(AWA)^{(1)}$, 从而得到表示(1.2). 类似地, 可从方程(3′)得到表示(1.3). 最后, 从方程(4)与(5)均可得到表示(1.4).

注意到约束条件 $R(X) \subset R(A) = R(AW)$ 等价于 $(I - AA^{(1)})X = 0$ 或 $(I - AW(AW)^{\#})X = 0$, 约束条件 $N(X) \supset N(A) = N(WA)$ 等价于 $X(I - A^{(1)}A) = 0$ 或 $X(I - (WA)^{\#}WA) = 0$, 易知定理 3中的 5个约束方程的惟一解 $A_W^{\#}$ 是下列 9个非奇异矩阵方程的解:

$$(AW + I - AA^{(1)})X = (AW)^{\#}A,$$

$$(AW + I - (AW)^{\#}AW)X = (AW)^{\#}A,$$

$$(AWAA^{(1)} + I - AA^{(1)})X = (AW)^{\#}A,$$

$$X(WA + I - A^{(1)}A) = A(WA)^{\#},$$

$$X(WA + I - (WA)^{\#}WA) = A(WA)^{\#},$$

$$X(A^{(1)}AWA+I-A^{(1)}A)=A(WA)^{\#},$$
$$(AW+I-AA^{(1)})X(WA+I-A^{(1)}A)=A,$$
$$[(AW)^2+I-AA^{(1)}]X=A,$$
$$X[(WA)^2+I-A^{(1)}A]=A.$$

由此立得$A_W^{\#}$的含有可逆阵的表示(2.1)~(2.5). 上述9个方程的系数矩阵的非奇异性是容易证明的,毋庸赘言.

注 2　文[1]没有给出$A_W^{\#}$的仅用(1)-逆的表示,而在其定理2.4与2.6中给出了下列表示:

(3.1) $A_W^{\#}=U^{-2}A=AV^{-2}=U^{-1}AV^{-1}$,其中$U=AWAA^{(1)}+I-AA^{(1)}$, $V=A^{(1)}AWA+I-A^{(1)}A$;

(3.2) $A_W^{\#}=[(AW)^2AA^{(1)}+I-AA^{(1)}]^{-1}A=A[A^{(1)}A(WA)^2+I-A^{(1)}A]^{-1}$.

可以看出,我们的表示(2.4)与(2.5)分别比文[1]的表示(3.2)与$A_W^{\#}=U^{-1}AV^{-1}$简洁. 现在我们来说明:文[1]的两个表示$A_W^{\#}=U^{-2}A=AV^{-2}$,实际上就是表示(2.3).

用文[1]给出的等式

$$U^{-1}=AXAA^{(1)}+I-AA^{(1)}=AYAA^{(1)}+I-AA^{(1)},$$
$$V^{-1}=A^{(1)}AXA+I-A^{(1)}A=A^{(1)}AYA+I-A^{(1)}A,$$

其中X与Y分别适合$AWAX=AA^{(1)}$与$YAWA=A^{(1)}A$,易见$U^{-1}A=AXA=AYA=AV^{-1}$,再对$AWAXA=A$与$AYAWA=A$分别左乘以$(AW)^{\#}$与右乘以$(WA)^{\#}$,可得$AXA=(AW)^{\#}A$, $AYA=A(WA)^{\#}$,所以最后有$A_W^{\#}=U^{-2}A=U^{-1}(AW)^{\#}A$, $A_W^{\#}=AV^{-2}=A(WA)^{\#}V^{-1}$,这正是我们的表示(2.3).

我们无从知道文[1]的作者是如何想到去构造上述几个可逆阵从而得出表示(3.1)与(3.2)的. 但我们在这一节的讨论表明:如果希望获得某个广义逆的仅用(1)-逆的或含可逆阵的表示,则考虑该广义逆的定义方程及其变形,应该是一条有效的途径.

在文[3]第5章第5节中,我们详尽地叙述了广义逆$A_{T,S}^{(2)}$的多种定义方程的产生、定义方程的诸多变形手段及各类表示的导出. 这些内容普遍适用于$A_{T,S}^{(2)}$类型的各种广义逆,例如文[3]第2章介绍的10种常用的重要广义逆:MP逆A^{+},加正定权MP逆A_{MN}^{+}, T-约束MP逆$(AP_T)^{+}$,加W权Drazin逆$A_{d,W}$, Elden逆A_{HK}^{+}, Drazin逆$A^{(d)}$,群逆$A^{\#}$, BD逆$A_{(L)}^{(-1)}$,广义BD逆$A_{(L)}^{(+)}$,双侧约束逆$(P_LAP_L)^{+}$.

3　Cline与Greville定义的加权群逆的存在条件与表示

设$A\in C^{m\times n}$, $W\in C^{n\times m}$,并假定AW与WA均是奇异方阵. 按文[2]的定义,A的加W权群逆,记作$A_{g,W}$,是如下的CG-方程组的解:

$$(CG1)\ AWXWAW=AW,\quad (CG2)\ XWAWX=X,\quad (CG3)\ AWX=XWA.$$

设CG-方程组有解X_0,则易见有 $\operatorname{rank}X_0=\operatorname{rank}AW=\operatorname{rank}WAW$.

从$(CG1)$与$(CG3)$可得

$$(CG4)\ (AWV)^2X_0W=AW.$$

由此知 $\operatorname{ind}(AW)=1$,即$(AW)^{\#}$存在,且 $\operatorname{rank}AW=\operatorname{rank}AWA$,进而有

$$\operatorname{rank}X_0=\operatorname{rank}WAW=\operatorname{rank}WAWA\equiv\operatorname{rank}(WA)^2.$$

由 $\operatorname{ind}(AW)=1$,可得 $\operatorname{rank}(WA)^3\geqslant\operatorname{rank}W(AW)^3=\operatorname{rank}WAW=\operatorname{rank}(WA)^2$,故有 $\operatorname{rank}(WA)^3=\operatorname{rank}(WA)^2$,此即 $\operatorname{ind}(WA)=1$或2.

另由$(CG2)$与$(CG3)$可推出两个等式:

$$X_0=AWX_0WX_0\text{与}X_0=X_0WX_0WA=X_0W(X_0WX_0WA)WA=(X_0W)^2X_0(WA)^2.$$

因此我们得到

$$R(X_0)=R(AW)\text{与}N(X_0)=N((WA)^2).$$

进而有

$$X_0=(WAW)_{R(AW),N((WA)^2)}^{(1,2)}.$$

从CG-方程组易证$X_0W=(AW)^{\#}$. 在$(CG1)$的等式两边左乘以W、右乘以A,并用$(CG3)$可得出等式$WX_0(WA)^3=(WA)^2$,从而可得$WX_0=(WA)^{(d)}$. 最后从$(CG2)$得

$$X_0 = (AW)^{\#}A(WA)^{(d)}.$$

反过来, 若 $\mathrm{ind}(AW)=1$, 则用关系式 $(AW)^{\#}A = A(WA)^{(d)}$ [3], 可以验明, 这样的 $X_0 = (AW)^{\#}A(WA)^{(d)}$ 确实是 CG-方程组的解. 因此我们有次之结论.

定理 5 Cline与Greville意义下的加 W 权群逆 $A_{g,W}$ 存在当且仅当群逆 $(AW)^{\#}$ 存在, 此时 $A_{g,W}$ 是惟一的, 它可表示为

$$A_{g,W} = (WAW)^{(1,2)}_{R(AW),N((WA)^2)} = (AW)^{\#}A(WA)^{(d)} = [(AW)^{\#}]^2A = A[(WA)^{(d)}]^2.$$

这个定理表明, 加权群逆 $A_{g,W}$ 的存在条件远比 $A^{\#}_W$ 的存在条件宽松. 若 $A\in C^{m\times n}$ 与 $W\in C^{n\times m}$ 是给定的, 则或者 $A_{g,W}$ 与 $A^{\#}_W$ 均不存在, 或者 $A_{g,W}$ 存在但 $A^{\#}_W$ 不存在, 或者 $A_{g,W}$ 与 $A^{\#}_W$ 均存在且 $A_{g,W}=A^{\#}_W$, 三者必居其一.

类似于定理 3, 若 $A_{g,W}$ 存在, 则它是下列 5个约束矩阵方程的惟一解:

(1) $AWX = A(WA)^{(d)}\ (= (AW)^{\#}A),\ R(X)\subset R(AW)$;

(2) $XWAW = (AW)^{\#}AW,\ N(X)\supset N((WA)^2)$;

(3) $AWXWAW = AW,\ R(X)\subset R(AW),\ N(X)\supset N((WA)^2)$;

(4) $(AW)^3X = AWA,\ R(X)\subset R(AW)$;

(5) $X(WA)^3 = AWA,\ N(X)\supset N((WA)^2)$.

从这 5个约束方程及其变形, 可以导出 $A_{g,W}$ 的仅用 (1)-逆的或含可逆阵的许多表示, 例如:

$$A_{g,W} = AW[(AW)^4]^{(1)}AWA = AWA[(WA)^5]^{(1)}(WA)^2,$$

$$A_{g,W} = [AW + I - (AW)^{\#}AW]^{-1}(AW)^{\#}A = [(AW)^3 + I - AW(AW)^{(1)}]^{-1}AWA,$$

等等, 不赘述.

注 3 文[1]最后考虑了将加权群逆应用于求解约束线性方程组

(3.3) $WAWx = b,\ x\in R(AW)$.

文[1]说, 若 $A^{\#}_W$ 存在, $\mathrm{ind}(AW)=1$, $\mathrm{ind}(WA)=k$, $b\in R((WA)^k)$, $\mathrm{rank}AW = \mathrm{rank}(WA)^k$, 则(3.3)有惟一解 $x = A^{\#}_W b$. 这些假设条件中有点混乱: 当 $A^{\#}_W$ 存在时, 必有 $\mathrm{ind}(AW)=\mathrm{ind}(WA)=1$; 条件 $\mathrm{rank}AW = \mathrm{rank}(WA)^k$ 是多余的; 这些条件不是(3.3)有惟一解的充要条件.

实际上, 据文[3]第 2章第 2节中关于约束方程组的理论, 可知(3.3)有惟一解当且仅当

(3.4) $b\in R(WAWAW)$ 且 $R(AW)\cap N(WAW)=\{0\}$.

由此易证以下结论:

(1) 当 $A^{\#}_W$ 存在时, (3.3)有惟一解当且仅当 $b\in R(WA)$, 此时其惟一解为 $x = A^{\#}_W b$.

(2) 当 $A^{\#}_W$ 不存在但 $A_{g,W}$ 存在时, (3.3)有惟一解当且仅当 $b\in R(WAW)$, 此时其惟一解为 $x = A_{g,W}b$.

(3) 当 $A_{g,W}$ 不存在时, (3.3)有惟一解当且仅当条件(3.4)成立, 此时其惟一解为

$$x = AW(WAWAW)^{(1)}b.$$

[参考文献]

[1] 岑建苗. 关于长方矩阵的加权群逆的存在性[J]. 计算数学, 2007, 29(1): 39-48.

[2] Cline R E, Greville T N E. A Drazin inverse for rectangular matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1980, 29: 53-62.

[3] 陈永林. 广义逆矩阵的理论与方法[M]. 南京: 南京师范大学出版社, 2005.

[4] Ben-Israel A, Greville T N E. Generalized Inverses: Theory and Applications[M]. 2nd. New York: Springer, 2003.

[责任编辑: 丁 蓉]