第 31卷第 3期 南京师大学报(自然科学版) Vol 31 No. 3
2008年 9月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition) Sep. 2008

连续范畴

卢 涛[1,2], 王习娟[1,3], 贺 伟[1]

(1. 南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)
(2. 江南大学理学院, 江苏 无锡 214063)
(3. 连云港师范高等专科学校, 江苏 连云港 222006)

[摘要] 将定向完备偏序集上的 way-below 关系推广到任意小范畴上, 从而在任意小范畴上引入了连续性. 并进一步讨论了连续范畴的性质, 证明了连续范畴有许多类似于连续偏序集的好的性质.

[关键词] 范畴, 余积, 连续

[中图分类号] O154. 1 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2008)03-0012-04

Continuous Categories

Lu Tao[1,2], Wang Xijuan[1,3], He Wei[1]

(1. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)
(2. School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214063, China)
(3. Lianyungang Teacher's College, Lianyungang 222006, China)

Abstract The way-below relation on dcpos was generalized to arbitrary small categories and the concept of continuous category was introduced. Then the properties of continuous categories were discussed. It was proved that continuous categories had some good properties analogous to continuous posets.

Key words category, coproduct, continuous

定义在完备偏序集[1,2]上的 way-below 关系是定义连续定向完备偏序集的基础, 并且是 Domain理论和连续格理论中最重要的概念之一. 从范畴论的角度看, 一个偏序集是一个小的, thin, skeletal范畴[3-5]. 所以考虑如何在任意小范畴上定义一个合适的 way-below 关系从而定义连续范畴是很有意义的.

1 小范畴上的 way-below 关系

在本文中, 所涉及到的范畴都为小范畴. 记一个范畴 $\mathscr{L}$中的态射为$\rightarrow$. 对任意的 $x\in ob\mathscr{L}$, 记 $\downarrow x=\{y\in ob\mathscr{L}: y\rightarrow x\}$.

定义 1 设 $\mathscr{L}$是一个小范畴, $D: \mathscr{J}\rightarrow\mathscr{L}$是一个 $\mathscr{J}$型图. 我们称 D 是一个滤子图表, 如果对任意的 j, $j'\in ob\mathscr{J}$, 都存在 $i\in ob\mathscr{J}$使得 $D(i)\rightarrow D(j)$, $D(i)\rightarrow D(j')$.

$$\begin{tikzcd} & D(i) \arrow[dl, "\lambda_j"'] \arrow[dr, "\lambda_{j'}"] & \\ D(j) & & D(j') \end{tikzcd}$$

对偶于滤子图表的概念, 我们可以定义定向图表: 设 $\mathscr{L}$是一个小范畴, $D: \mathscr{J}\rightarrow\mathscr{L}$是一个 $\mathscr{J}$型图, 若对任意的 j, $j'\in ob\mathscr{J}$都存在 $i\in ob\mathscr{J}$使得 $D(j)\rightarrow D(i)$, $D(j')\rightarrow D(i)$, 则称 D 是一个定向图表.

收稿日期: 2007-06-12
基金项目: 国家自然科学基金(10731050)资助项目.
通讯联系人: 卢 涛, 博士, 研究方向: 拓扑学. E-mail: lutao7@live.com

$$\begin{tikzcd} & D(i) & \\ D(j) \arrow[ur, "\lambda_j"] & & D(j') \arrow[ul, "\lambda_{j'}"'] \end{tikzcd}$$

定义 **2**　设 $D: \mathscr{J} \to \mathscr{L}$ 是一个 $\mathscr{J}$型图. $a \in ob\mathscr{L}$.

(1) 如果存在 D 上的一个余锥形, 也就是对任意的 $\alpha \in Mor\mathscr{L}$ 有下面的三角形交换:

$$\begin{tikzcd} & a & \\ D(j) \arrow[ur, "\lambda_j"] \arrow[rr, "D(\alpha)"] & & D(j') \arrow[ul, "\lambda_{j'}"'] \end{tikzcd}$$

则称 a 为 D 的一个上界.

(2) 如果余锥形 $\{\lambda_j: D(j) \to a \mid j \in ob\mathscr{J}\}$ 是万有的, 亦即对任意的余锥形

$$\begin{tikzcd} & b & \\ D(j) \arrow[ur, "\mu_j"] \arrow[rr, "D(\alpha)"] & & D(j') \arrow[ul, "\mu_{j'}"'] \end{tikzcd}$$

都存在惟一的态射 $a \to b$, 使得对任意的 $j \in ob\mathscr{J}$ 有下面的图形交换:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr] & & b \\ & D(j) \arrow[ul, "\lambda_j"] \arrow[ur, "\mu_j"'] & \end{tikzcd}$$

则称 a 为 D 的上确界. 记 a 为 $\vee D$ 或者 $\mathrm{colim}\, D$. 特别地, 若 $\mathscr{J}$ 为 $\mathscr{L}$ 的满子范畴, 则可将 a 记为 $\vee\mathscr{J}$ 或者 $\mathrm{colim}\,\mathscr{J}$.

定义 **3**　设 $\mathscr{L}$ 为小范畴, 称 $\mathscr{L}$ 为定向完备的, 如果每一个定向图表 $D: \mathscr{J} \to \mathscr{L}$ 都有上确界.

定义 **4**　设 $\mathscr{L}$ 是一个定向完备范畴. $x, y \in ob\mathscr{L}$, 我们称 x way-below 于 y, 记作 $x \Rightarrow y$, 当且仅当对每一个定向图表 $D: \mathscr{J} \to \mathscr{L}$, 如果存在态射 $y \to \mathrm{colim}\, D$, 那么我们有 $d_i \in ob\mathscr{L}$ 满足 $x \to d_i$.

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, dashed] & \mathrm{colim}\, D \\ x \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r] & d_i \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

命题 **1**　设 $\mathscr{L}$ 是一个余完备范畴, 也就是, $\mathscr{L}$ 有所有的余极限. 对任意的 $u, x, y, z \in ob\mathscr{L}$, 下列结论成立:

(1) 若 $x \Rightarrow y$, 则 $x \to y$;

(2) 若 $u \to x \Rightarrow y \to z$, 则 $u \to z$;

(3) 若 $x \Rightarrow z$ 且 $y \Rightarrow z$, 则 $x \leftarrow y \Rightarrow z$, 此处 $x \leftarrow y$ 表示 x 和 y 的余积;

(4) $0 \Rightarrow x$.

证明

(1) 取 $D = \{b\}$, 则 $a \to b$ 显然.

(2) 从以下图表易见 (2) 成立.

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r] & x \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & y \arrow[r] & z \arrow[d, dashed] \\ & d_i \arrow[rr, dashed] & & \mathrm{colim}\, D \end{tikzcd}$$

(3) 对任意的定向图表 D, 假设存在 $z \to \mathrm{colim}\, D$, 由 $x \Rightarrow z$, $y \Rightarrow z$, 根据 way-below 关系的定义, 则存在 d_x

$\to \operatorname{colim} D$, $d_y \to \operatorname{colim} D$, 使得 $x \to d_x$, $y \to d_y$. 由余极限的万有性质, 可知 $x \leftarrow y \to d_x \leftarrow d_y \to \operatorname{colim} D$. 从而 $x \leftarrow y \Rightarrow z$

(4) 0是初始对象, 所以结论显然.

我们记 $\Downarrow x = \{u \in ob\mathscr{L}: u \Rightarrow x\}$, $\Uparrow x = \{v \in ob\mathscr{L}: x \Rightarrow v\}$.

定义 5 设 $\mathscr{L}$是一个定向完备范畴. 我们称 $\mathscr{L}$是一个连续范畴, 如果对任意的 $a \in ob\mathscr{L}$, $\{b: b \Rightarrow a\}$是定向图表并且 $a = \coprod \{b: b \to a\}$.

引理 1 设 $\mathscr{L}$是定向完备范畴, 则下列条件等价:

(1) $x \Rightarrow y$;

(2) 若 $y \to \coprod X$ 且 $X \subseteq ob\mathscr{L}$, 则存在有限子集 $A \subseteq X$ 满足 $x \to \coprod A$.

引理 2 在范畴 $\mathscr{L}$中, 下列条件等价:

(1) $x \Rightarrow y$;

(2) 对 $\mathscr{L}$中的任意理想图表, 若 $y \to \coprod I$, 则 $x \in I$.

证明

(1)$\Rightarrow$(2): 由定义 4, 结论显然成立.

(2)$\Rightarrow$(1): 假设(2)成立, 设 D 为 $\mathscr{L}$中的定向图表且满足 $y \to \coprod D$. 令 $I = \downarrow D$, 则 I为理想图表, 并且 $y \to \coprod D = \coprod I$, 所以 $x \in I$, 从而表明存在一个 $d \in D$(蕴含着 $d \to \coprod D$) 使得 $x \to d$. 所以 $x \Rightarrow y$.

命题 2 设 $\mathscr{L}$是一个连续范畴.

(1) 对一个定向图表 D, 如果 $z \to \coprod D$ 并且 $x \Rightarrow z$, 则存在 $d \to D$, 使得 $x \Rightarrow d$;

(2) Way-below 关系满足插值性质, 也就是, 若 $x \Rightarrow z$成立, 则存在 y使得 $x \Rightarrow y \Rightarrow z$成立.

证明

(1) 设 D 为一个定向图表满足 $z \to \coprod D$, 令 $I = \bigcup \{\Downarrow d: d \in D\}$, 则 I为一个理想图表. 由连续性可知, $\coprod I = \coprod D$, 因此, 若 $x \Rightarrow z$, 则有 $x \in I$, 这表明存在 $d \in D$, 使得 $x \Rightarrow d$.

(2) 若 $x \Rightarrow z$, 由连续性可知 $x \Rightarrow z = \coprod \{c: c \Rightarrow z\} = \coprod\{\coprod\{d: d \Rightarrow c\}: c \Rightarrow z\} = \coprod \{d: d \Rightarrow c \Rightarrow z\}$, 所以存在 d满足 $d \Rightarrow c \Rightarrow z$ 且使得 $x \to d$. 从而 $x \Rightarrow c \Rightarrow z$.

定义 6 设 $\mathscr{L}$为一个范畴且具有初始对象. 我们称 $ob\mathscr{L}$上的一个二元关系 $\prec$ 为辅关系, 若对于 $u, x, y, z \in ob\mathscr{L}$, $\prec$ 满足以下条件:

(1) 若 $x \prec y$成立, 则 $x \to y$ 成立;

(2) 若 $u \to x \prec y \to z$, 则 $u \prec z$;

(3) $0 \prec x$.

我们记 $ob\mathscr{L}$上的所有辅关系构成的集合为 $\mathrm{Aux}(ob\mathscr{L})$(当附以包含序时可看作是一个范畴). 显然, 每个辅关系都是传递的, 并且 way-below 关系是一个辅关系. 所以, 我们的问题是如何从 $\mathrm{Aux}(ob\mathscr{L})$ 中确定出 way-below 关系($\Rightarrow$). 对范畴 $\mathscr{L}$, 记 $\mathrm{Low}(ob\mathscr{L})$ 为 $ob\mathscr{L}$上所有的下集构成的集合.

命题 3 设 $\mathscr{L}$为一个范畴. 设单调函数 $s: ob\mathscr{L} \to \mathrm{Low}(ob\mathscr{L})$满足对任意的 $x \in ob\mathscr{L}$, $s(x) \subseteq \downarrow x$. 令 M 为所有这样的单调函数组成的集合(可看作是一个范畴, 其中的态射为 $(s \to t) \Leftrightarrow (s(x) \subseteq t(x))$对所有的 $x \in ob\mathscr{L}$), 则范畴 $\mathrm{Aux}(ob\mathscr{L})$ 等价于范畴M, 其中等价函子分别为 $F: \mathrm{Aux}(ob\mathscr{L}) \to M$ $(\prec \mapsto s_{\prec} = (x \mapsto \{y: y \prec x\}))$, 和 $G: M \to \mathrm{Aux}(ob\mathscr{L})$ $(s \mapsto \prec_s (x \prec_s y) \Leftrightarrow x \in s(y))$.

证明　设 $\prec$ 为一个辅关系. 则易验证 $s_{\prec} \in M$ 成立. 若 $s \in M$, 则易证 $\prec_s$是一个辅关系. 所以, 我们还需证明等价性成立. 对于等价性我们只需证明 $FG = 1_M$, $GF = 1_{\mathrm{Aux}(ob\mathscr{L})}$. 从以下的交换图表可知:

$$\begin{tikzcd} s_1 \arrow[r] \arrow[d] & FG(s_1) \arrow[d, dashed] \\ s_2 \arrow[r, dashed] & FG(s_2) \end{tikzcd}$$

$FG = 1_M$ 成立. $GF = 1_{\mathrm{Aux}(ob\mathscr{L})}$ 同样易证.

由引理 2, 我们知道 $\Downarrow x = \bigcap \{I \in \mathrm{Id}(ob\mathscr{L}): x \rightarrow \prod I\}$. 若我们通过

$$m_I(x) = \begin{cases} \downarrow x \cap I, & x \rightarrow \prod I, \\ \downarrow x, & x \not\rightarrow \prod I \end{cases} \tag{1}$$

来定义函数 $m_I: ob\mathscr{L} \rightarrow \mathrm{Low}(ob\mathscr{L})$, 则可得 $m_I \in M$. 并且我们可在 M 中化简 $\prod\{m_I: I \in \mathrm{Id}(ob\mathscr{L})\}$, 得到:

$\prod\{m_I: I \in \mathrm{Id}(ob\mathscr{L})\}(x) = \bigcap_{I \in \mathrm{Id}(ob\mathscr{L})} m_I(x) = \bigcap_{x \rightarrow \prod I} m_I(x) \cap \bigcap_{x \not\rightarrow \prod I} m_I(x) = \bigcap_{x \rightarrow \prod I} (\downarrow x \cap I) \cap \downarrow x = \bigcap \{I \in \mathrm{Id}(ob\mathscr{L}): x \rightarrow \prod I\} = \Downarrow x$.

定义 7　设 $\mathscr{L}$ 为定向完备范畴, 我们称定义在 $ob\mathscr{L}$ 上的辅关系 $\prec$ 为逼近的, 如果集合 $\{u \in ob\mathscr{L}: u \prec x\} = s_{\prec}(x)$ 是 $\mathscr{L}$ 的定向子范畴并且对任意的 $x \in ob\mathscr{L}$ 都有 $x = \prod\{u \in ob\mathscr{L}: u \prec x\} = \prod s_{\prec}(x)$.

现在, 我们可以回答以上的问题如下:

命题 4　在一个连续范畴中, way-below 关系 $\Rightarrow$ 是 $ob\mathscr{L}$ 上的最小的逼近辅关系.

证明　由等式 (1) 和命题 3, 可易知结论成立.

[参考文献]

[1] Gierz G, Hofmann K H. Continuous Lattice and Domains[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003

[2] 徐罗山. 偏序集的主理想连续性和闭区间连续性[J]. 扬州大学学报: 自然科学版, 1999, 2(4): 1-5.

[3] 贺伟. 范畴论[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[4] Mac Lane S. Categories for Working Mathematician[M]. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1972

[5] Adamek J, Herelich H, Strecker G E. Abstract and Concrete Categories[M]. New York: Wiley-Interscience, 1990

[责任编辑: 丁　蓉]