带随机波动率的 L vy模型下美式看涨期权的定价

丁 玲[1], 杨纪龙[2]

(1.江苏科技大学基础教学部, 江苏 张家港 215600)
(2 南京师范大学数学与计算机科学学院,江苏 南京 210097)

[摘要] 期权定价是现代金融理论的重要内容之一. 期权的价格通常与标的资产价格的波动率等因素有关. B - S模型中假设波动率为常数, 而实际上波动率往往是一个随机过程. 本文研究带随机波动率的 L vy模型下美式看涨期权的定价问题,得到了美式看涨期权的最优执行时间以及期权价格满足的偏微分方程.

[关键词] 美式期权, 随机波动率, L vy模型, 期权定价
[中图分类号] O211. 5 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2008)03-0048-06

Pricing of American Call Option Under L vy Model With Stochastic Volatility

Ding Ling[1], Yang Jilong[2]

(1. Department of Basic Education, Jiangsu University of Science and Technology, Zhangjiagang 215600, China)
(2. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract Option pricing is one of the important contents in the modern theory of finance. Option price is related to the volatility of underlying assets. In the B - S model, volatility is assumed as a constant, but in reality, it is often seemed as a random process. In this paper, the pricing of American call option under L vy model with stochastic volatility was discussed. The optimal exercising time of American call option and the partial differential equation of the value function of the option were obtained.

Key words American option, stochastic volatility, L vy model, option pricing

期权定价是现代金融理论的重要内容之一. 期权的价格通常与标的资产的波动率等因素有关. B - S模型中假设波动率为常数, 而实际上波动率往往是一个随机过程, 称之为随机波动率. Hull J等[1-6]对带随机波动率的期权定价问题进行了深入的探讨. 陈萍等[7]研究了带随机波动率的 B - S模型下美式看涨期权的定价问题, 得到了美式看涨期权的最优执行时间和期权函数值满足的偏微分方程. 本文研究带随机波动率的 L vy模型下美式看涨期权的定价问题, 得到了与文[7]相似的结论, 从标的资产价格模型上推广了文[7]的结论.

设市场上有两种资产, 一种为风险资产, 它在时刻 t的价格 $S(t)$满足方程

$$dS(t) = S(t-)\left[\mu(t)dt + \sigma(Y(t))dB(t) + \int^{\infty} xN(dt, dx)\right], \ 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1}$$

其中 $T > 0$为常数, $B(t)$是一标准布朗运动, $N(t, \cdot)$为泊松鞅值测度, 且 $B(t)$与 $N(t, \cdot)$独立. $\mu(t)$, $\sigma(t) \geqslant 0$为确定性函数, $c > -1$为常数, 在$[c, \infty)$上的积分应理解为在$[c, \infty) - \{0\}$上的积分. 且 $Y(t)$满足如下方程

$$dY(t) = \alpha(m - Y(t))dt + \beta d\hat{B}(t), \ 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2}$$

$$d\hat{B}(t) = \rho dB(t) + \sqrt{1 - \rho^2}\, dW(t), \ 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3}$$

其中 $W(t)$是与 $B(t)$相互独立的另一个标准布朗运动, α、β、ρ、m 均为常数, $\rho \in [0, 1]$表示过程 $B(t)$与过程 $\hat{B}(t)$之间的相关系数.

收稿日期: 2007-12-10
通讯联系人: 杨纪龙, 副教授, 研究方向: 随机积分和期权定价. E-mail: yangjilong@njnu.edu.cn

另一种资产是无风险资产, 它在时刻 t的价格为

$$A(t) = \exp\left[\int_0^t r(u)\,du\right],\quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

其中 $r(t) \geqslant 0$是一适应过程, 且与 $B(t)$、$W(t)$、$N(t,\cdot)$ 独立, 称 $r(t)$ 为在时刻 t的无风险利率, 一般情况下, 可取 $r(t)$ 为复合泊松过程.

在以上模型中所涉及的过程均假定是右连左极的.

利用 (2) 和 (3) 式可将风险资产在时刻 t的价格 $S(t)$ 所满足的方程改写为

$$dS(t) = S(t-)\left[\mu(t)\,dt + \sigma(Y(t))\,dB(t) + \int^{\infty} xN(dt, dx)\right],\quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{4}$$

$$dY(t) = \alpha(m - Y(t))\,dt + \beta\rho\,dB(t) + \beta\sqrt{1-\rho^2}\,dW(t),\quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{5}$$

其中 $B(t)$、$W(t)$ 是两个相互独立的标准布朗运动, $\rho \in [0, 1]$ 为常数.

1　欧式期权价格满足的偏微分方程

设 X 是一 Lévy过程, 其 Lévy测度为 υ, 对给定的 $T > 0$, $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}_0)$, 考虑从 $[0, T] \times A \times \Omega$到 $\mathbf{R}$的映射 F. $\mathscr{H}_2(T, A)$ 表示所有满足下述条件的映射 F组成的集合

(A_1) F是可料的,

(A_2) $\| F \|^2_{T,A} \triangleq E\left(\int_0^T \int_A | F(t, x) |^2 \upsilon(dx)\,dt\right) < \infty$.

特别地, 当 F是从 $[0, T] \times \Omega$到 $\mathbf{R}$的映射时, 简记为 $\mathscr{H}_2(T)$.

设风险资产在 t时刻的价格 $S(t)$ 满足方程 (4) 和 (5), 它的折现值 $S(t)$ 定义为

$$S(t) = e^{-\int_0^t r(u)\,du} S(t),\quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

其中 $r(t)$ 为无风险利率. 对折现值 $S(t)$ 应用 Itô公式得

$$dS(t) = S(t-)\left[(\mu(t) - r(t))\,dt + \sigma(Y(t))\,dB(t) + \int^{\infty} xN(dt, dx)\right]. \tag{6}$$

由文[8]知, 若 $F(t)$ 和 $K(t)$ 满足下述条件 (C_1), $H(x)$ 满足条件 (C_2):

(C_1) $F(t), K(t) \in \mathscr{H}_2(T)$ 且 $E\left[\exp\left(\int_0^T F^2(u)\,du\right)\right] < \infty$, $E\left[\exp\left(\int_0^T K^2(u)\,du\right)\right] < \infty$,

(C_2) $\int_{\mathbf{R}_0} H^2(x)\upsilon(dx) < \infty$ 且 $\int_{\mathbf{R}_0} e^{H(x)}\upsilon(dx) < \infty$,

则 $(e^{Z(t)}, 0 \leqslant t \leqslant T)$ 是指数鞅, 且 $\forall\, 0 \leqslant t \leqslant T$, $E(e^{Z(t)}) = 1$, 其中

$$Z(t) = \int_0^t F(u)\,dB(u) - \frac{1}{2}\int_0^t F^2(u)\,du + \int_0^t K(u)\,dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t K^2(u)\,du +$$

$$\int_0^t \int^{\infty} H(x)N(du, dx) - \int_0^t \int^{\infty} (e^{H(x)} - 1 - H(x))\upsilon(dx)\,du.$$

作测度变换, 令 $dP^* = e^{Z(T)}dP$, 则测度 P^* 与 P 等价, 简记为 $P^* \sim P$. 令

$$B^*(t) = B(t) - \int_0^t F(u)\,du,$$

$$W^*(t) = W(t) - \int_0^t K(u)\,du,$$

$$N^*(t, A) = N(t, A) - \int_0^t \int_A (e^{H(x)} - 1)\upsilon(dx)\,du \triangleq N(t, A) - t\upsilon^*(A),$$

其中 $\upsilon^*(A) = \int_A e^{H(x)}\upsilon(dx)$, $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}_0)$. 由 Girsanove定理[8]知, 在测度 P^* 下, $B^*(t)$、$W^*(t)$ 均为标准布朗运动. $N(t, A)$ 是强度为 $\upsilon^*(A)$ 的泊松过程, $N^*(t, A)$ 是鞅, 且 $B^*(t)$、$W^*(t)$ 与 $N^*(t, A)$ 相互独立.

在上述变量变换下可将 (6) 式改写为

$$dS(t) = S(t-)\left[\left(\mu(t) - r(t) + \sigma(Y(t))F(t) + \int^{\infty} x(e^{H(x)} - 1)\upsilon(dx)\right)dt +\right.$$

$$\sigma(Y(t))\mathrm{d}B^*(t)+\int x N^*(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)]. \tag{7}$$

若在作测度变换时所选择的 $F(t)$、$K(t)$ 和 $H(t)$ 既分别满足条件 (C_1) 和 (C_2) 又满足如下等式约束条件

$$\mu(t)-r(t)+\sigma(Y(t))F(t)+\int x(e^{H(x)}-1)\upsilon(\mathrm{d}x)=0, \tag{8}$$

则 $S(t)$ 在 P^* 下是鞅,称 P^* 为等价鞅测度. 由(7)式和(8)式有

$$\mathrm{d}S(t)=S(t-)[r(t)\mathrm{d}t+\sigma(Y(t))\mathrm{d}B^*(t)+\int x N^*(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)]. \tag{9}$$

又由测度变换可将(5)式改写为

$$\mathrm{d}Y(t)=[\alpha(m-Y(t))+\beta\lambda(t)]\mathrm{d}t+\beta\rho\mathrm{d}B^*(t)+\beta\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}W^*(t), \tag{10}$$

其中 $\lambda(t)$ 称为随机波动率的风险补偿,其表示式为

$$\lambda(t)=\rho F(t)+\sqrt{1-\rho^2}K(t). \tag{11}$$

下面以 $f(x)$ 表示契约函数,E^* 表示在等价鞅测度 P^* 下取期望. 欧式期权在 t 时刻的价值定义为

$$V(t,S(t),Y(t))=E^*[e^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}f(S(T))\mid\mathscr{F}_t],$$

其折现值 $\tilde V$ 在测度 P^* 下是鞅,其中

$$\tilde V(t,S(t),Y(t))=E^*[e^{-\int_0^T r(u)\mathrm{d}u}f(S(T))\mid\mathscr{F}_t].$$

由多维 Itô 公式知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V(t,S(t),Y(t))=&[\frac{\partial}{\partial t}V(t,S(t-),Y(t))+\frac{\partial}{\partial s}V(t,S(t-),Y(t))r(t)S(t-)+\\&\frac{\partial}{\partial y}V(t,S(t-),Y(t))(\alpha(m-Y(t))+\beta\lambda(t))+\\&\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}V(t,S(t-),Y(t))\sigma^2(Y(t))S^2(t-)+\frac{\beta^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}V(t,S(t-),Y(t))+\\&\frac{\partial^2}{\partial s\partial y}V(t,S(t-),Y(t))\beta\rho\sigma(Y(t))S(t-)+\int(V(t,(1+x)S(t-),Y(t))-V(t,S(t-),Y(t))-\\&xS(t-)\frac{\partial}{\partial s}V(t,S(t-),Y(t)))\upsilon^*(\mathrm{d}x)]\mathrm{d}t+[\frac{\partial}{\partial s}V(t,S(t-),Y(t))\sigma(Y(t))S(t-)+\\&\frac{\partial}{\partial y}V(t,S(t-),Y(t))\beta\rho]\mathrm{d}B^*(t)+\frac{\partial}{\partial y}V(t,S(t-),Y(t))\beta\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}W^*(t)+\\&\int[V(t,(1+x)S(t-),Y(t))-V(t,S(t-),Y(t))]N^*(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x).\end{aligned} \tag{12}$$

对 $\tilde V(t,S(t),Y(t))$ 应用 Itô 公式可得

$$\mathrm{d}\tilde V(t,S(t),Y(t))=e^{-\int_0^t r(u)\mathrm{d}u}[\mathrm{d}V(t,S(t),Y(t))-r(t)V(t,S(t-),Y(t))\mathrm{d}t].$$

将(12)式代入上式得 $\mathrm{d}\tilde V(t,S(t),Y(t))$ 积分形式为

$$\begin{aligned}&\tilde V(t,S(t),Y(t))-\tilde V(0,S(0),Y(0))=\\&\int_0^t G(u)\mathrm{d}u+\int_0^t F_1(u)\mathrm{d}B^*(u)+\int_0^t F_2(u)\mathrm{d}W^*(u)+\int_0^t\int H(u,x)N^*(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x),\end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}G(t)=&e^{-\int_0^t r(u)\mathrm{d}u}[-r(t)V(t,S(t-),Y(t))+\frac{\partial}{\partial t}V(t,S(t-),Y(t))+\\&r(t)S(t-)\frac{\partial}{\partial s}V(t,S(t-),Y(t))+(\alpha(m-Y(t))+\beta\lambda(t))\frac{\partial}{\partial y}V(t,S(t-),Y(t))+\\&\frac{1}{2}\sigma^2(Y(t))S^2(t-)\frac{\partial^2}{\partial s^2}V(t,S(t-),Y(t))+\frac{1}{2}\beta^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}V(t,S(t-),Y(t))+\\&\beta\rho\sigma(Y(t))S(t-)\frac{\partial^2}{\partial s\partial y}V(t,S(t-),Y(t))+\end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty}(V(t,(1+x)S(t-),Y(t))-V(t,S(t-),Y(t))-xS(t-)\frac{\partial}{\partial s}V(t,S(t-),Y(t)))\upsilon^*(\mathrm{d}x)],$$

$$F_1(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t r(u)\mathrm{d}u}[\sigma(Y(t))S(t-)\frac{\partial}{\partial s}V(t,S(t-),Y(t))+\beta\rho\frac{\partial}{\partial y}V(t,S(t-),Y(t))],$$

$$F_2(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t r(u)\mathrm{d}u}\beta\sqrt{1-\rho^2}\frac{\partial}{\partial y}V(t,S(t-),Y(t)),$$

$$H(t,x)=\mathrm{e}^{-\int_0^t r(u)\mathrm{d}u}[V(t,(1+x)S(t-),Y(t))-V(t,S(t-),Y(t))].$$

引理 1　设 $(G(t),0\leqslant t\leqslant T)$ 是满足条件 $E(\int_0^T|G(u)|\mathrm{d}u)<\infty$ 的适应过程, 则过程 $(\int_0^t G(u)\mathrm{d}u, 0\leqslant t\leqslant T)$ 是鞅的充分条件是 $\forall t\in[0,T], G(t)=0, a.s.$.

证明见文[8].

由于(13)式左边及右边第2, 3, 4项均为鞅, 因此由引理1知 $\forall t\in[0,T], G(t)=0, a.s.$. 于是我们得到下述定理.

定理 1　设欧式期权价值函数 $V(t,s,y)\in C^{1,2,2}$, 则 V 满足下述偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t}V+rs\frac{\partial}{\partial s}V+[\alpha(m-y)+\beta\lambda]\frac{\partial}{\partial y}V+\frac{1}{2}\sigma^2(y)s^2\frac{\partial^2}{\partial s^2}V+\beta\rho\sigma(y)s\frac{\partial^2}{\partial s\partial y}V+$$
$$\frac{1}{2}\beta^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}V+\int_{-1}^{\infty}(V^*-V-xs\frac{\partial}{\partial s}V)\upsilon^*(\mathrm{d}x)=rV,$$
$$\forall(t,s,y)\in[0,T]\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R},\tag{14}$$

其中 $V^*=V(t,(1+x)s,y)$, $\upsilon^*(\mathrm{d}x)=\mathrm{e}^{H(x)}\upsilon(\mathrm{d}x)$, 终值条件是

$$V(T,s,y)=f(s),\ \forall s\geqslant 0.$$

对任意给定的 $u(t,s,y)\in C^{1,2,2}$, 定义二维非齐次跳跃扩散过程(10)和(11)式的无穷小生成算子 A_t 如下:

$$A_tu(t,s,y)\triangleq r(t)s\frac{\partial}{\partial s}u(t,s,y)+[\alpha(m-y)+\beta\lambda(t)]\frac{\partial}{\partial y}u(t,s,y)+$$
$$\frac{1}{2}\sigma^2(y)s^2\frac{\partial^2}{\partial s^2}u(t,s,y)+\beta\rho\sigma(y)\frac{\partial^2}{\partial s\partial y}u(t,s,y)+$$
$$\frac{\beta^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(t,s,y)+\int_{-1}^{\infty}[u(t,(1+x)s,y)-$$
$$u(t,s,y)-xs\frac{\partial}{\partial s}u(t,s,y)]\upsilon^*(\mathrm{d}x),$$

则(14)式可以改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}V+A_tV-r(t)V=0,\ \forall(t,s,y)\in[0,T]\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}.$$

所以, 欧式期权的价格函数满足如下偏微分方程

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}V+A_tV-r(t)V=0,\ \forall(t,s,y)\in[0,T]\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R},\\ V(T,s,y)=f(s),\ \forall s\geqslant 0\end{cases}\tag{15}$$

2　不分红利情况下美式看涨期权的定价

在本节中我们将标的资产看作是某支股票. 以 $V(t,S(t),Y(t))$ 和 $W(t,S(t),Y(t))$ 分别表示欧式看涨期权和美式看涨期权在时刻 t 的值.

定理 2　设契约函数 $f(x)$ 是凸函数且 $f(0)=0$, 则在不分红利的情况下, 美式期权与欧式期权价格相同, 即 $\forall t\in[0,T]$,

$$V(t,S(t),Y(t))=W(t,S(t),Y(t)).\tag{16}$$

证明　因 $f(x)$ 是凸函数且 $f(0)=0$, 故对任意给定的 $\alpha\in[0,1]$, 都有 $f(\alpha x)\leqslant\alpha f(x)$.

对任意给定的停时 $\tau\in\mathcal{T}_{t,T}$, 由 $r(t)\geqslant 0$ 知 $0\leqslant\mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}\leqslant 1$, 因此有

$$f(e^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}S(T)) \leqslant e^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}f(S(T)).$$

又因为 $S(t) = e^{-\int_0^t r(u)\mathrm{d}u}S(t)$ 关于 P^* 是鞅, 于是由条件期望的性质、Jenson不等式和 Doob停止定理有

$$V(t,S(t),Y(t)) = E^*(e^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}f(S(T)) \mid \mathscr{F}_t) \geqslant E^*(e^{-\int_t^\tau r(u)\mathrm{d}u}f(S(\tau)) \mid \mathscr{F}_t).$$

由 τ的任意性有 $V(t,S(t),Y(t)) \geqslant \sup_{\tau\in\mathscr{F}_{tT}} E^*(e^{-\int_t^\tau r(u)\mathrm{d}u}f(S(\tau)) \mid \mathscr{F}_t) = W(t,S(t),Y(t))$, 其中 $\mathscr{F}_{tT}$ 表示 $[t,T]$ 上所有停时组成的集合. 另一方面显然有 $V(t,S(t),Y(t)) \leqslant W(t,S(t),Y(t))$.

从而定理 2得证.

注 **1**　(16)式表明 T 是一个最优停时, 也即是美式期权的最优执行时间, 因此美式期权无须提前执行.

注 **2**　看涨期权的契约函数为 $f(x) = (x-K)^+$, 显然它满足定理 2的条件. 因此对于看涨期权, 在不分红利的情况下, 美式期权和欧式期权同价, 从而美式看涨期权价格也满足偏微分方程(15).

3　有分红并送配股情况下美式看涨期权的定价及最优执行时间

设美式期权的契约函数为 $f(x) = (x-K)^+$, 假定在时刻 $t_1 \in [0,T]$ 有 1次分红并送配股, $\beta \in [0,1]$ 为现金红利率, 送股比例为 $\delta_1 \geqslant 0$, 配股比例为 $\delta_2 \geqslant 0$, 配股价与时刻 t_1 前瞬间的股价 $S(t_1-)$ 的比例为 $r \in (0,1)$. 根据除权除息前后市值相等的原则, 除权除息后股票的报价为

$$S(t_1) = \frac{1-\beta+\delta_2 r}{1+\delta_1+\delta_2}S(t_1-).$$

记

$$\alpha = \frac{1-\beta+\delta_2 r}{1+\delta_1+\delta_2},$$

称 α为分红送配股率. 易证 $0 < \alpha \leqslant 1$.

由(9)式及 Itô公式得

$$S(t) = S(0)\exp\Big(\int_0^t r(u)\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(Y(u))\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(Y(u))\mathrm{d}B^*(u) + \int \ln(1+x)N^*(t,\mathrm{d}x) + t\int [\ln(1+x)-x]\upsilon^*(\mathrm{d}x)\Big),$$

于是在时刻 t_1 有分红并送配股的股价过程满足

$$S(t) = \begin{cases} S(0)\exp\Big(\int_0^t r(u)\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(Y(u))\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(Y(u))\mathrm{d}B^*(u) + \\ \quad \int \ln(1+x)N^*(t,\mathrm{d}x) + t\int^{\infty} [\ln(1+x)-x]\upsilon^*(\mathrm{d}x)\Big), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ \alpha S(t_1-)\exp\Big(\int_{t_1}^t r(u)\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_{t_1}^t \sigma^2(Y(u))\mathrm{d}u + \int_{t_1}^t \sigma(Y(u))\mathrm{d}B^*(u) + \\ \quad \int \ln(1+x)N^*(t,\mathrm{d}x) + t\int^{\infty} [\ln(1+x)-x]\upsilon^*(\mathrm{d}x)\Big), \quad t_1 < t \leqslant T. \end{cases}$$

考虑以上述股票为标的资产的美式看涨期权. 对任意给定的 $t\in[0,T]$, 美式期权在时刻 $t-$ 的值为 $W(t-,S(t-),Y(t-)) = \max\{f(S(t-)), E(W(t,S(t),Y(t)) \mid \mathscr{F}_{t-})\}$, 其中 $\mathscr{F}_{t-} = \bigcap_{\varepsilon>0}\mathscr{F}_{t-\varepsilon}$. 又知 $Y(t)$ 的几乎所有轨道都是 t的连续函数, 而在时刻 t_1, $S(t_1) = \alpha S(t_1-)$, 于是 $E(W(t_1,S(t_1),Y(t_1)) \mid \mathscr{F}_{t_1-}) = W(t_1-,\alpha S(t_1-),Y(t_1-))$. 因此在除权除息前的瞬间, 期权的值为

$$W(t_1-,S(t_1-),Y(t_1-)) = \max\{f(S(t_1-)), W(t_1-,\alpha S(t_1-),Y(t_1-))\}.$$

由于时间区间 $(0,t_1)$ 上股票没有分红及送配股, 因此由定理 2知美式期权与欧式期权价值相同, 从而美式期权值也满足偏微分方程(15). 如果在时刻 t_1 美式期权未被执行, 则在时间区间 $[t_1,T]$ 上, 可设该期权为以 t_1 为起点, 以 T 为到期日的期权. 而在该区间上股票也没有分红及送配股, 因此由定理 2知, 美式期权与欧式期权价值相同, 从而美式期权值也满足方程(15). 因此在时刻 t_1 有分红并送配股的美式看涨期

权的最优执行时间只可能是 t_1- 或 T. 而在 t_1- 时刻执行期权的条件是 $W(t_1, \alpha s, y) < f(s)$.

推论 1 设美式期权在时刻 t_1 有分红并送配股, 其分红送配股率为 α.

对 $0 \leqslant t < t_1$, 美式看涨期权的价值函数满足方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}W(t, s, y) + A_t W(t, s, y) - r(t)W(t, s, y) = 0, \ \forall (t, s, y) \in [0, t_1] \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \\ W(t_1-, s, y) = \max\{f(s), W(t_1-, \alpha s, y)\}, \ \forall (s, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \end{cases}$$

对 $t_1 \leqslant t \leqslant T$, 美式看涨期权的价值函数满足方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}W(t, s, y) + A_t W(t, s, y) - r(t)W(t, s, y) = 0, \ \forall (t, s, y) \in [t_1, T] \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \\ W(T, s, y) = f(s), \ \forall (s, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}. \end{cases}$$

期权的最优执行时间只可能是 t_1- 或 T. 在时刻 t_1- 执行期权的条件是 $W(t_1, \alpha s, y) < f(s)$.

现假设在期权的存续期内有 n次分红及送配股, 时间为 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leqslant T$, 对应的分红送配股率分别为

$$\alpha_i = \frac{1 - \beta(t_i) + \delta_2(t_i)r(t_i)}{1 + \delta_1(t_i) + \delta_2(t_i)}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

类似上述讨论易得以下推论.

推论 2 设美式期权在时刻 t_i 有分红并送配股, 其分红送配股率分别为 α_i, $i = 1, \cdots, n$.

对 $t_{i-1} \leqslant t < t_i (i = 1, \cdots, n)$, 美式看涨期权的价值函数满足方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}W(t, s, y) + A_t W(t, s, y) - r(t)W(t, s, y) = 0, \ \forall (t, s, y) \in [t_{i-1}, t_i) \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \\ W(t_i-, s, y) = \max\{f(s), W(t_i-, \alpha_i s, y)\}, \ \forall (s, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \end{cases}$$

对 $t_n \leqslant t \leqslant T$, 美式看涨期权的价值函数满足方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}W(t, s, y) + A_t W(t, s, y) - r(t)W(t, s, y) = 0, \ \forall (t, s, y) \in [t_n, T] \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \\ W(T, s, y) = f(s), \ \forall (s, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}. \end{cases}$$

期权的最优执行时间只可能在 t_1-, t_2-, $\cdots$, t_n- 或 T. 在时刻 t_i- 执行期权的条件是 $W(t_i, \alpha_i s, y) < f(s)$.

[参考文献]

[1] Wiggins J B. Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates[J]. Journal of Financial Economics, 1987, 19: 351-372.

[2] Hull J, White A. The pricing of options on assets with stochastic volatility[J]. The Journal of Finance, 1987, 42: 281-300.

[3] Hull J, White A. An analysis of the bias in option pricing with stochastic volatility[J]. Adv Futures Opt Res, 1988, 3: 29-61.

[4] Heston S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. The Review of Financial Studies, 1993, 6: 327-343.

[5] Fouque J P, Papanicolaou G, Sircar K R. Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[6] Masaaki Otaka. Study on option pricing in an incomplete market with stochastic volatility based on risk premium analysis[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2003, 38: 1399-1408.

[7] 陈萍, 杨孝平. 有随机波动率及定期分红和配股时美式看涨期权的定价[J]. 应用概率统计, 2005, 21(1): 81-87.

[8] David Applebaum. Lévy Processes and Stochastic Calculus[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[责任编辑: 丁 蓉]