模糊度量空间中的统计收敛

严从华, 田文胜

(南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 在较一般模糊度量空间中,引入了统计收敛和统计柯西列的概念;讨论了统计收敛和统计柯西列的一些重要性质;此外,还介绍了模糊度量空间中序列的稀疏子列、统计极限点、统计聚点的概念,研究了它们之间的相互关系. 统一和推广了 encimen Ç和 Pehlivan S近期的工作.

[关键词] 模糊度量空间, 统计收敛, 稀疏子列, 统计极限点, 统计聚点

[中图分类号] O177. 99 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2008)04-0008-06

Statistical Convergence on Fuzzy Metric Spaces

Yan Conghua, Tian Wensheng

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract The concepts of statistical convergence and statistical Cauchy sequences are introduced in more general fuzzy metric spaces. Some important properties of statistical convergence and statistical Cauchy sequences are discussed. Thin subsequence, statistical limit points, statistical cluster points on fuzzy metric spaces are introduced and the relations among them are also given. This results unify and extend the corresponding results obtained by encimen Ç and Pehlivan S recently.

Key words fuzzy metric space, statistical convergence, thin subsequence, statistical limit point, statistical cluster point

20世纪 50年代,统计收敛的概念首次被引入. 自此以后,统计收敛的理论受到了许多数学工作者的关注. 人们在许多文献中对统计收敛及其性质作了探讨,取得了一些有效成果. 起初,人们在经典度量空间中对统计收敛及其性质作了详细的研究;随着时间的推移,统计收敛及其性质的研究被推广至各种较广泛的空间中,如 Karakus S, Desimmirci K研究了概率赋范空间中序列以及二重序列的统计收敛的问题[1,2],最近, encimen Ç和 Pehlivan S[3]则在模糊赋范线性空间中讨论序列的统计收敛及其性质,遗憾的是该文对模糊赋范线性空间的二元运算 L、R要求条件太强,即要求 $L(x, y) = \min$, $R(x, y) = \max$, 这一要求极大地限制了结果的普遍性. 本文在模糊度量空间中考虑统计收敛的问题,且条件较文献[3]要弱得多,即我们只要求 $\lim_{a\to 0+} R(a, a) = 0$, 显然我们的讨论统一并推广了文献[3]中的结果.

1 预备知识及定义

本文中 $\mathbf{R}$表实数域,映射 $u: \mathbf{R}\to [0, 1]$, $F(\mathbf{R})$为所有这样的映射 u的集合, $\forall u\in F(\mathbf{R})$, 其 α-水平集定义为:

$$[u]_\alpha = \begin{cases} \{t\in \mathbf{R}: u(t)\geqslant \alpha\}, & 0<\alpha\leqslant 1; \\ cl\{t\in \mathbf{R}: u(t)>0\}, & \alpha = 0. \end{cases}$$

定义 1[4] 实数域 $\mathbf{R}$上的模糊集 u, 称为模糊数. 若满足:

(1) u是正规的, 即存在 $t_0\in \mathbf{R}$, 使 $u(t_0) = 1$;

(2) u是模糊凸的, 即 $u(\lambda s+(1-\lambda)t)\geqslant \min\{u(s), u(t)\}$, $\forall s, t\in \mathbf{R}$, $\lambda\in[0, 1]$;

收稿日期: 2008-03-12

基金项目: 国家自然科学基金(10671094)资助项目.

通讯联系人: 严从华, 教授, 研究方向: 模糊分析学. E-mail: chyan@njnu.edu.cn

(3) u是上半连续的;

(4) $[u]_0 = cl\{t \in \mathbf{R}: u(t) > 0\}$是紧集.

由定义1可知,若定义:

$$r(t) = \begin{cases} 1, & t = r; \\ 0, & t \neq r, \end{cases}$$

则实数r可以看作是一个模糊数.

易知,若u是一个模糊数$\Leftrightarrow [u]_\alpha$是一个非空有界集,并且$\forall \alpha \in (0, 1]$,其$\alpha$-水平集:$[u]_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$是闭区间.

若$\forall t < 0, u(t) = 0$,则称u是非负的模糊数.记所有的非负模糊数之集为G.容易知道:$u \in G \Leftrightarrow u_\alpha^- \geqslant 0, \forall \alpha \in [0, 1]$.

定义2[5] 设X是非空集.$d: X \times X \to G$,L、$R: [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$,且关于每个变量是可换的、不减的,满足$L(0, 0) = 0$,$R(1, 1) = 1$.记

$$[d(x, y)]_\alpha = [\lambda_\alpha(x, y), \rho_\alpha(x, y)], \quad \forall x, y \in X, \alpha \in (0, 1].$$

(X, d, L, R)是一个模糊度量空间,若满足:

(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;

(3) $\forall x, y, z \in X$,

(a) 若$s \leqslant \lambda_1(x, z)$, $t \leqslant \lambda_1(z, y)$, $s + t \leqslant \lambda_1(x, y)$,则

$$d(x, y)(s + t) \geqslant L(d(x, z)(s), d(z, y)(t)).$$

(b) 若$s \geqslant \lambda_1(x, z)$, $t \geqslant \lambda_1(z, y)$, $s + t \geqslant \lambda_1(x, y)$,则

$$d(x, y)(s + t) \leqslant R(d(x, z)(s), d(z, y)(t)).$$

注1 由定义2知,若有$d(x, y) = 0$,则$\forall \alpha \in (0, 1]$,有$\rho_\alpha(x, y) = 0$.

定理1[6] 设(X, d, L, R)是一个模糊度量空间,$\lim\limits_{a \to 0^+} R(a, a) = 0$,则

$$U = \{\mathscr{U}(\varepsilon, \alpha): \varepsilon > 0, \alpha \in (0, 1]\}$$

是$X \times X$上的Hausdorff一致基,其中

$$\mathscr{U}(\varepsilon, \alpha) = \{(x, y) \in X \times X: \rho_\alpha(x, y) < \varepsilon\},$$

并且$\mathscr{N}_x(\varepsilon, \alpha) = \{y \in X: \rho_\alpha(x, y) < \varepsilon\}$是$X$中$x$的Hausdorff拓扑邻域.

以下均设模糊度量空间满足条件:$\lim\limits_{a \to 0^+} R(a, a) = 0$.

定义3 设(X, d, L, R)是一个模糊度量空间,$\{x_n\}$是X中的一序列,且$x \in X$.若$\forall \varepsilon > 0$,$\alpha \in (0, 1]$,存在自然数N,当$n \geqslant N$时,$\rho_\alpha(x_n, x) < \varepsilon$,则称$\{x_n\}$依模糊度量$d$收敛于$x$,记之$Fd - \lim x_n = x$或$x_n \xrightarrow{Fd} x\ (n \to +\infty)$.

定义4 设(X, d, L, R)是一个模糊度量空间,$\{x_n\}$是X中的一序列.若$\forall \varepsilon > 0$,$\alpha \in (0, 1]$,存在自然数N,当$n, m \geqslant N$时,有$\rho_\alpha(x_n, x_m) < \varepsilon$,则称$\{x_n\}$是$X$依模糊度量$d$的柯西列.

定义5[7] 设K是自然数集$\mathbf{N}$的子集,若

$$\delta(K) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} |\{k \in K, k \leqslant n\}|$$

存在,则称$\delta(K)$是K的自然密度,其中$|\{k \in K, k \leqslant n\}|$表示集$K$中不超过$n$的元素的个数.

定义6[3] 设K是自然数集$\mathbf{N}$的子集,它的上密度定义为:

$$\bar{\delta}(K) = \lim_{n \to \infty} \sup \frac{1}{n} |k \in K: k \leqslant n|.$$

定义7[3] 设$\{x_n\}$是一列实数,$x \in \mathbf{R}$.若$\forall \varepsilon > 0$,有

$$\delta(\{n \in \mathbf{N}: |x_n - x| \geqslant \varepsilon\}) = 0,$$

则称$\{x_n\}$统计收敛于x,记之$st - \lim x_n = x$或$x_n \xrightarrow{st} x\ (n \to +\infty)$.

定义 8　设(X, d, L, R)是一个模糊度量空间, $\{x_n\}$是X中的一序列, $x\in X$. 若$\forall \varepsilon>0$, $\alpha\in(0,1]$, 有

$$\delta(\{n\in \mathbf{N}: \rho_\alpha(x_n, x)\geqslant \varepsilon\})=0,$$

则称$\{x_n\}$依模糊度量d统计收敛于x. 记之$st_{Fd}-\lim x_n=x$或$x_n\xrightarrow{st_{Fd}} x(n\to+\infty)$.

定义 9　设(X, d, L, R)是一个模糊度量空间, $\{x_n\}$是X中的一序列. 若$\forall \varepsilon>0$, $\alpha\in(0,1]$, 存在$m\in \mathbf{N}$, 使

$$\delta(\{n\in \mathbf{N}: \rho_\alpha(x_n, x_m)\geqslant \varepsilon\})=0,$$

则称$\{x_n\}$是X中依模糊度量d的统计柯西列.

定义 10　设(X, d, L, R)是一个模糊度量空间, $\{x_n\}$是X中的一序列. 若$\{x_n\}$的一个子序列收敛于x, 则称x是$\{x_n\}$的一个依模糊度量d的极限点. 记$\{x_n\}$的所有这样的极限点之集为$L_{Fd}(x_n)$.

定义 11　设(X, d, L, R)是一个模糊度量空间, $\{x_n\}$是X中的一序列, $\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的子列, 记$K=\{n_k: k=1, 2, \cdots\}$. 若$\delta(K)=0$, 则称$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的稀疏子序列; 若$\delta(K)>0$或$\delta(K)$不存在, 即$\delta(K)>0$, 则称$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的非稀疏子序列.

定义 12　设(X, d, L, R)是一个模糊度量空间, $\{x_n\}$是X中的一序列, $x\in X$. 若存在$\{x_n\}$的非稀疏子序列收敛于x, 则称x是$\{x_n\}$的依模糊度量d的统计极限点. 记$\{x_n\}$的所有这样的统计极限点之集为$\Lambda_{Fd}(x_n)$.

定义 13　设(X, d, L, R)是一个模糊度量空间, $\{x_n\}$是X中的一序列, $x\in X$. 若$\forall \varepsilon>0$

$$\delta(\{n\in \mathbf{N}: \rho_\alpha(x_n, x)<\varepsilon\})>0,$$

则称x是$\{x_n\}$的依模糊度量d的统计聚点. 记$\{x_n\}$的所有这样统计聚点之集为$\Gamma_{Fd}(x_n)$.

定义 14　设(X, d, L, R)是一个模糊度量空间, $x\in X$, $\forall r>0$, 以x为中心, r为半径的球定义为:

$$\mathscr{B}(x, r, \alpha)=\{y\in X: \rho_\alpha(x, y)<r\}\quad \forall \alpha\in(0,1].$$

引理 1[8,9]　设(X, d, L, R)是一个模糊度量空间, 则$\forall \alpha\in(0,1]$, 存在$\mu\in(0,1]$, 满足: $\forall x, y, z\in X$有

$$\rho_\alpha(x, y)\leqslant \rho_\mu(x, z)+\rho_\mu(z, y).$$

2　主要结果及证明

引理 2　设(X, d, L, R)是一个模糊度量空间, $\{x_n\}$是X中的一序列, $x\in X$. 若$\forall \varepsilon>0$, $\alpha\in(0,1]$, 则下列等价:

(1) $st_{Fd}-\lim x_n=x$;

(2) $\delta(\{n\in \mathbf{N}: \rho_\alpha(x_n, x)\geqslant \varepsilon\})=0$;

(3) $\delta(\{n\in \mathbf{N}: \rho_\alpha(x_n, x)<\varepsilon\})=1$;

(4) $st-\lim \rho_\alpha(x_n, x)=0$.

证明　此引理的证明很容易.

定理 2　设(X, d, L, R)是一个模糊度量空间, $\{x_n\}$是X中的一序列, 且是依模糊度量d统计收敛的, 则其统计极限是惟一的.

证明　因为$\lim\limits_{a\to 0^+} R(a, a)=0$, 所以$\forall \alpha\in(0,1]$, 存在$\alpha'\in(0,1]$, 使$R(\alpha', \alpha')<\alpha$, 且$\forall x, y, z\in X$, 有

$$\rho_\alpha(x, y)\leqslant \rho_{\alpha'}(x, z)+\rho_{\alpha'}(z, y).$$

若$st_{Fd}-\lim x_n=y_1$, 且$st_{Fd}-\lim x_n=y_2$, 则$\forall \varepsilon>0$, 对上述的$\alpha'\in(0,1]$, 记

$$K_1=\left\{n\in \mathbf{N}: \rho_{\alpha'}(x_n, y_1)\geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\},\quad K_2=\left\{n\in \mathbf{N}: \rho_{\alpha'}(x_n, y_2)\geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

由定义8知: $\delta(K_1)=\delta(K_2)=0$.

令: $K=K_1\cup K_2$, 则有$\delta(K)=0$, 所以$\delta(\mathbf{N}\backslash K)=1$, 从而$\forall n\in \mathbf{N}\backslash K$, 有

$$\rho_\alpha(y_1, y_2)\leqslant \rho_{\alpha'}(x_n, y_1)+\rho_{\alpha'}(x_n, y_2)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

由 ε 的任意性知, $\rho_\alpha(y_1, y_2) = 0$, 从而有 $d(y_1, y_2) = 0$, 所以 $y_1 = y_2$, 即统计极限是惟一的.

定理 3 设 (X, d, L, R) 是一个模糊度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的一序列, 且 $\{x_n\}$ 依模糊度量 d 收敛于 x, 则 $st_{Fd} - \lim x_n = x$.

证明 因为 $\{x_n\}$ 依模糊度量 d 收敛于 x, 由定义 3: $\forall \varepsilon > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, 集合 $K = \{n \in \mathbf{N}: \rho_\alpha(x_n, x) \geqslant \varepsilon\}$ 是有限集, 所以 $\delta(K) = 0$, 即 $st_{Fd} - \lim x_n = x$.

注 2 若 $st_{Fd} - \lim x_n = x$, 则 $\{x_n\}$ 依模糊度量 d 收敛于 x 不一定成立. 例如:

$$x_n = \begin{cases} 0, & n = k^2, k = 1, 2, \cdots \\ 1, & n \neq k^2, k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

由于 $\forall \varepsilon > 0$, $\alpha \in (0, 1]$,

$$|\{k \leqslant n: \rho_\alpha(x_k, 1) \geqslant \varepsilon\}| = |\{k \leqslant n: x_k = 0\}| \leqslant \sqrt{n},$$

所以 $\delta(\{n \in \mathbf{N}, \rho_\alpha(x_n, 1) \geqslant \varepsilon\}) = 0$, $st_{Fd} - \lim x_n = 1$. 但由收敛定义知, $\{x_n\}$ 却不依模糊度量 d 收敛于 1.

定理 4 设 (X, d, L, R) 是一个模糊度量空间, 则 $st_{Fd} - \lim x_n = x$ 当且仅当存在自然数集 $\mathbf{N}$ 的一个递增子列 $K = \{n_k: k = 1, 2, \cdots\}$ 作为指标集的 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足 $\{x_{n_k}\}$ 依模糊度量 d 收敛于 x, 且 $\delta(K) = 1$.

证明 "$\Rightarrow$"(必要性)

设 $st_{Fd} - \lim x_n = x$, 则 $\forall k > 0$, $k = 1, 2, \cdots$, $\alpha \in (0, 1]$, 令:

$$K(\alpha, k) = \left\{n \in \mathbf{N}: \rho_\alpha(x_n, x) < \frac{1}{k}\right\},$$

则知: $\delta(K(\alpha, k)) = 1$, 且 $K(\alpha, k+1) \subseteq K(\alpha, k)$.

任取自然数 $n_1 \in K(\alpha, 1)$, 由 $\delta(K(\alpha, 2)) = 1$ 知, 存在自然数 $n_2 > n_1$, 且 $n_2 \in K(\alpha, 2)$, 当 $n \geqslant n_2$ 时,

$$\frac{1}{n}\left|\left\{j \in \mathbf{N}, j \leqslant n: \rho_\alpha(x_j, x) < \frac{1}{2}\right\}\right| > \frac{1}{2};$$

由 $\delta(K(\alpha, 3)) = 1$ 知, 存在自然数 $n_3 > n_2$, 且 $n_3 \in K(\alpha, 3)$, 当 $n \geqslant n_3$ 时, 有

$$\frac{1}{n}\left|\left\{j \in \mathbf{N}, j \leqslant n: \rho_\alpha(x_j, x) < \frac{1}{3}\right\}\right| > \frac{2}{3};$$

$$\cdots$$

由 $\delta(K(\alpha, k)) = 1$ 知, 存在自然数 $n_k > n_{k-1}$, 且 $n_k \in K(\alpha, k)$, 当 $n \geqslant n_k$ 时, 有

$$\frac{1}{n}\left|\left\{j \in \mathbf{N}, j \leqslant n: \rho_\alpha(x_j, x) < \frac{1}{k}\right\}\right| > \frac{k-1}{k};$$

一直继续下去 $\cdots$

取

$$K = \{1 \leqslant n < n_1\} \cup \{\bigcup_{n \in K(\alpha, k)} n_k \leqslant n < n_{k+1}, k = 1, 2, \cdots\},$$

则对任意的 $k = 1, 2, \cdots$

$$\frac{1}{n}|\{j \in K: j \leqslant n\}| \geqslant \frac{1}{n}\left|\left\{j \leqslant n: \rho_\alpha(x_j, x) < \frac{1}{k}, j \in K(\alpha, k)\right\}\right| > \frac{k-1}{k},$$

所以 $\delta(K) = 1$.

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\frac{1}{k} < \varepsilon$, 当 $n \geqslant n_k$, 且 $n \in K$ 时, 必存在自然数 $m \geqslant k$, 使得 $n_m \leqslant n < n_{m+1}$, 从而有 $\rho_\alpha(x_n, x) < \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{k} < \varepsilon$, 所以 $\{x_{n_k}\}$ 依模糊度量 d 收敛于 x.

"$\Leftarrow$"(充分性)

若存在自然数集 $\mathbf{N}$ 的一个递增子列 $K = \{n_k: k = 1, 2, \cdots\}$ 作为指标集的 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, 且 $\delta(K) = 1$, $\{x_{n_k}\}$ 依模糊度量 d 收敛于 x. 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, 存在自然数 N, 当 $n_k \geqslant N$ 时, 有 $\rho_\alpha(x_{n_k}, x) < \varepsilon$,

所以$\{n_k\in K:\rho_\alpha(x_{n_k},x)\geqslant\varepsilon\}$是有限集,从而$\delta(\{n_k\in K:\rho_\alpha(x_{n_k},x)\geqslant\varepsilon\})=0$,进而有$\delta(\{n_k\in K:\rho_\alpha(x_{n_k},x)<\varepsilon\})=1$. 又因为$\{n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_n,x)\geqslant\varepsilon\}\subseteq N\setminus\{n_k\in K:\rho_\alpha(x_{n_k},x)<\varepsilon\}$,所以$\delta(\{n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_n,x)\geqslant\varepsilon\})=0$,即$st_{Fd}-\lim x_n=x$.

定理5 设(X,d,L,R)是一个模糊度量空间,$\{x_n\}$是X中的一序列,则下列等价:

(1) $\{x_n\}$是X中依模糊度量d的统计柯西列;

(2) 存在自然数集$\mathbf{N}$的递增子列$K=\{n_k:k=1,2,\cdots\}$作为指标集的$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$,且满足$\delta(K)=1$,$\{x_{n_k}\}$是依模糊度量d的柯西列.

证明　此定理的证明可以仿照定理4之证明.

引理3 设(X,d,L,R)是一个模糊度量空间,$\{x_n\}$是X中的一序列,$x\in X$. 若$\{x_n\}$依模糊度量d统计收敛于x,则$\{x_n\}$的任何一个非稀疏子序列,必存在收敛于x的子列.

证明　设$\{x_{n_k}\}$是序列$\{x_n\}$的任意一个非稀疏子列,则由定义11知$\delta(\{n_k\in\mathbf{N}:k\in\mathbf{N}\})>0$. $\forall\varepsilon>0$,由于$\{n_k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_{n_k},x)\geqslant\varepsilon,k\in\mathbf{N}\}\subseteq\{n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_n,x)\geqslant\varepsilon\}$,可得

$$\delta(\{n_k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_{n_k},x)\geqslant\varepsilon,k\in\mathbf{N}\})\leqslant\delta(\{n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_n,x)\geqslant\varepsilon\})=0,$$

所以$\delta(\{n_k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_{n_k},x)\geqslant\varepsilon,k\in\mathbf{N}\})=0$. 又因为

$$\{n_k\in\mathbf{N}:k\in\mathbf{N}\}=\{n_k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_{n_k},x)\geqslant\varepsilon,k\in\mathbf{N}\}\cup\{n_k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_{n_k},x)<\varepsilon,k\in\mathbf{N}\},$$

所以$\delta(\{n_k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_{n_k},x)<\varepsilon,k\in\mathbf{N}\})>0$,从而$\forall\varepsilon>0$,$\{n_k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_{n_k},x)<\varepsilon,k\in\mathbf{N}\}$均是无限集.

当$\varepsilon=1$时,由$\{n_k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_{n_k},x)<1,k\in\mathbf{N}\}$是无限集,任取自然数$n_{k_1}\in\{n_k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_{n_k},x)<1,k\in\mathbf{N}\}$,易知$x_{n_{k_1}}$是$\{x_{n_k}\}$中的点;当$\varepsilon=\frac{1}{2}$时,由$\left\{n_k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_{n_k},x)<\frac{1}{2},k\in\mathbf{N}\right\}$是无限集,可知存在自然数$n_{k_2}>n_{k_1}$,且$x_{n_{k_2}}$是$\{x_{n_k}\}$中的点…;当$\varepsilon=\frac{1}{j}$时,由$\left\{n_k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_{n_k},x)<\frac{1}{j},k\in\mathbf{N}\right\}$是无限集知,存在自然数$n_{k_j}>n_{k_{j-1}}$,且$x_{n_{k_j}}$是$\{x_{n_k}\}$中的点;一直继续下去…,从而得到$\{x_{n_k}\}$的一个子列$\{x_{n_{k_j}}\}$,显然$Fd-\lim x_{n_{k_j}}=x$. 得证.

定理6 设(X,d,L,R)是一个模糊度量空间,$\{x_n\}$是X中的任一序列,则$\Lambda_{Fd}(x_n)\subseteq\Gamma_{Fd}(x_n)\subseteq L_{Fd}(x_n)$.

证明　设$y\in\Lambda_{Fd}(x_n)$,则存在$\{x_n\}$的一个非稀疏子列$\{x_{n_k}\}$收敛于y,所以有$\delta(\{n_k\in\mathbf{N}:k\in\mathbf{N}\})=b>0$. $\forall\varepsilon>0$,易知$\{n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_n,y)<\varepsilon\}\supseteq\{n_k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_{n_k},y)<\varepsilon,k\in\mathbf{N}\}$,从而有

$$\{n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_n,y)<\varepsilon\}\supseteq\{n_k\in\mathbf{N}:k\in\mathbf{N}\}\setminus\{n_k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_{n_k},y)\geqslant\varepsilon,k\in\mathbf{N}\}.$$

又因为$Fd-\lim x_{n_k}=y$,所以集合$\{n_k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_{n_k},y)\geqslant\varepsilon,k\in\mathbf{N}\}$是有限集,从而有

$$\delta(\{n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_n,y)<\varepsilon\})\geqslant$$
$$\delta(\{n_k\in\mathbf{N}:k\in\mathbf{N}\})-\delta(\{n_k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_{n_k},y)\geqslant\varepsilon,k\in\mathbf{N}\})=b-0>0,$$

即$y\in\Gamma_{Fd}(x_n)$.

设$y\in\Gamma_{Fd}(x_n)$,则$\forall\varepsilon>0$,$\alpha\in(0,1]$,$\delta(\{n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_n,y)<\varepsilon\})>0$,所以$X$中$y$点的任意邻域$N_y(\varepsilon,\alpha)$中均含有$\{x_n\}$中的无限多个点,由引理3的后半部分证明可知,$y\in L_{Fd}(x_n)$. 从而有$\Lambda_{Fd}(x_n)\subseteq\Gamma_{Fd}(x_n)\subseteq L_{Fd}(x_n)$.

定理7 设(X,d,L,R)是一个模糊度量空间,$\{x_n\}$是X中的一序列,若$st_{Fd}-\lim x_n=x$,则$\Lambda_{Fd}(x_n)=\Gamma_{Fd}(x_n)=\{x\}$.

证明　设$y\in\Gamma_{Fd}(x_n)$,且$y\neq x$,则$\forall\varepsilon>0$,有$\delta(\{k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_k,y)<\varepsilon\})>0$,其中$\{x_k\}$是$\{x_n\}$的一个非稀疏子列.

下证:

$$\delta\left(\{k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_k,y)<\varepsilon\}\cap\{n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_n,x)<\varepsilon\}\right)=0.$$

否则

$$\delta\left(\{k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_k,y)<\varepsilon\}\cap\{n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_n,x)<\varepsilon\}\right)=b>0,$$

可得 $\delta(\{k=n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_k,y)<\varepsilon;\rho_\alpha(x_n,x)<\varepsilon\})>0$. 所以由引理 3知,存在 $\{x_k\}$ 的子列 (也是 $\{x_n\}$ 的子列) 同时收敛于 x、y, 这与极限的惟一性相矛盾! 所以

$$\delta\left(\{k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_k,y)<\varepsilon\}\cap\{n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_n,x)<\varepsilon\}\right)=0,$$

从而有

$$\{k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_k,y)<\varepsilon\}\subseteq$$
$$(\mathbf{N}\setminus\{n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_n,x)<\varepsilon\})\cup(\{k=n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_k,y)<\varepsilon,\rho_\alpha(x_n,x)<\varepsilon\}),$$

所以

$$\delta(\{k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_k,y)<\varepsilon\})\leqslant$$
$$\delta(\mathbf{N}\setminus\{n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_n,x)<\varepsilon\})+\delta(\{k=n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_k,y)<\varepsilon,\rho_\alpha(x_n,x)<\varepsilon\}),$$

即 $\delta(\{k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_k,y)<\varepsilon\})=0$, 这与 $\delta(\{k\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_k,y)<\varepsilon\})>0$相矛盾! 所以得 $x=y$, 即 $\Gamma_{Fd}(x_n)=\{x\}$.

再证 $\Lambda_{Fd}(x_n)=\{x\}$, 由于 $x\in\Lambda_{Fd}(x_n)$, 且由定理 6知, $\Lambda_{Fd}(x_n)\subseteq\Gamma_{Fd}(x_n)=\{x\}$, 所以 $\Lambda_{Fd}(x_n)=\{x\}$, 即 $\Lambda_{Fd}(x_n)=\Gamma_{Fd}(x_n)=\{x\}$.

引理 4 模糊度量空间中的任一个球都是开集.

证明 因为 $\lim\limits_{a\to0+}R(a,a)=0$, 所以 $\forall\alpha\in(0,1]$, 存在 $\alpha'\in(0,1]$, 使得 $R(\alpha',\alpha')<\alpha$, $\forall x,y,z\in X$ 有

$$\rho_\alpha(x,y)\leqslant\rho_{\alpha'}(x,z)+\rho_{\alpha'}(y,z).$$

设 $\mathscr{B}(x,r,\alpha)$ 为 X 中的任意一个球, $\forall z\in\mathscr{B}(x,r,\alpha)$, 取 $r_0=r-\rho_{\alpha'}(x,z)>0$, 则 $B(z,r_0,\alpha')\subseteq\mathscr{B}(x,r,\alpha)$. 这是因为: $\forall y\in B(z,r_0,\alpha')$,

$$\rho_\alpha(x,y)\leqslant\rho_{\alpha'}(x,z)+\rho_{\alpha'}(y,z)<\rho_{\alpha'}(x,z)+r_0=\rho_{\alpha'}(x,z)+(r-\rho_{\alpha'}(x,z))=r,$$

所以 $y\in B(x,r,\alpha)$. 引理成立.

定理 8 设 (X,d,L,R) 是一个模糊度量空间, $\{x_n\}\subseteq X$, 则 $\Gamma_{Fd}(x_n)$ 是 X 中的闭集.

证明 由于 $\Gamma_{Fd}(x_n)\subseteq\overline{\Gamma_{Fd}(x_n)}$, 故只需要证 $\overline{\Gamma_{Fd}(x_n)}\subseteq\Gamma_{Fd}(x_n)$ 即可.

设 $y\in\overline{\Gamma_{Fd}(x_n)}$, 则 $\forall r>0$, $\alpha\in(0,1]$, 存在 $z\in\Gamma_{Fd}(x_n)\cap B(y,r,\alpha)$. 由引理 4知: 存在 $r_0>0$和 $\alpha'\in(0,1]$, 满足 $B(z,r_0,\alpha')\subseteq B(y,r,\alpha)$, 从而有 $\{n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_n,y)<r\}\supseteq\{n\in\mathbf{N}:\rho_{\alpha'}(x_n,z)<r_0\}$. 又因为 $z\in\Gamma_{Fd}(x_n)$, 所以有 $\delta\{n\in\mathbf{N}:\rho_{\alpha'}(x_n,z)<r_0\}>0$, 从而 $\delta\{n\in\mathbf{N}:\rho_\alpha(x_n,y)<r\}>0$. 即 $y\in\Gamma_{Fd}(x_n)$, 进而有 $\overline{\Gamma_{Fd}(x_n)}\subseteq\Gamma_{Fd}(x_n)$, 所以 $\Gamma_{Fd}(x_n)$ 是 X 中的闭集.

[参考文献]

[1] Karakus S. Statistical convergence on probabilistic normed spaces[J]. Mathematical Communications, 2007, 12: 11-23.

[2] Karakus S, Demirci K. Statistical convergence of double sequences on probabilistic normed spaces[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2007, 37(6): 41-51.

[3] encimen Ç, Pehlivan S. Statistical convergence in fuzzy normed linear spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2008, 159: 361-370.

[4] Fang Jinxuan, Huang Huan. On the level convergence of a sequence of fuzzy numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 147: 417-435.

[5] Osmo Kaleva, Seppo Seikkala. On fuzzy metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12: 215-229.

[6] Fang Jinxuan. A note on fixed point theorems of Hadi[illegible]ic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 48: 391-395.

[7] Mursaleen, Osama H H Edely. Statistical convergence of double sequences[J]. J Math Anal Appl, 2003, 288: 223-231.

[8] Olga Hadi[illegible]ic, Endre Pap. Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

[9] 徐维艳, 方锦暄. φ-辅助序与 F-型拓扑空间中增映射的不动点定理[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2005, 28(2): 19-23.

[责任编辑: 丁 蓉]