哈密尔顿性, 邻域并和部分平方图

徐新萍

(江苏教育学院数学系, 江苏 南京 210013)

[摘要] 利用插点方法, 研究图的 H-性, 给出了 k-连通图是哈密尔顿的充分条件: 设 G 是 k-连通图 $(k\geqslant 2)$, 若对于每个 $Y\in I_{k+1}(G^*)$, 在 G 中, 有

$$\sigma_b(Y)=\sum_{i=0}^{k}|N(Y_i)|>\frac{b+k}{2}(n(Y)-1)+\mu\left(\frac{b(2k-b+1)}{2}-1\right),$$

则 G 是哈密尔顿图.

[关键词] 哈密尔顿性, 邻域并, 插点, 部分平方图

[中图分类号] O157.5 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2008)04-0021-05

Hamiltonicity, Neighborhood Union and Partially Square Graphs

Xu Xinping

(Department of Mathematics, Jiangsu Institute of Education, Nanjing 210013, China)

Abstract The technique of the vertex insertion is used to study the hamiltonicity of graphs. A new sufficient condition that k-connected graphs to be hamiltonian is given as: Let G be a k-connected graph with $k\geqslant 2$. If

$$\sigma_b(Y)=\sum_{i=0}^{k}|N(Y_i)|>\frac{b+k}{2}(n(Y)-1)+\mu\left(\frac{b(2k-b+1)}{2}-1\right)$$

in G for each $Y\in I_{k+1}(G^*)$, then G is hamiltonian.

Key words hamiltonicity, neighborhood union, vertex insertion, partially square graph

本文涉及的图都是有限无向简单图, 基本概念和记号参考 [1, 2]. 一个图 G 称为哈密尔顿的, 如果 G 含哈密尔顿圈; 图 G 中的圈 C 称为极大圈, 如果不存在 G 的圈 C', 使得 $V(C')\supset V(C)$. 在研究图的哈密尔顿问题中, 一些关于顶点度、邻域并的充分条件起了很重要的作用.

定理 1[3] 设 G 是 k-连通 n 阶图 $(n\geqslant 3, k\geqslant 2)$, 若对 G 的任意独立集 $Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_{k+1}\}$, 有 $\sum_{i=1}^{k+1}d(z_i)>\frac{(k+1)(n-1)}{2}$, 则 G 是哈密尔顿图.

定理 2[1] 设 G 是 n 阶 2-连通图 $(n\geqslant 3)$, 如果对任意两个独立顶点 u、v, 有 $|N(u)\cup N(v)|\geqslant\frac{2n-1}{3}$, 则 G 是哈密尔顿图.

为了介绍本文结果, 先给出以下符号.

设 $t>1$ 是整数, 令

$$I_t(G)=\{Y: Y\text{是 } G \text{ 的独立集}, |Y|=t\}.$$

设 G 是连通图, $Y\subseteq V(G)$, $v\in V(G)$. 记 $\mathrm{dist}(v,Y)=\min_{y\in Y}\{\mathrm{dist}(v,y)\}$ (这里 $\mathrm{dist}(v,y)$ 表示 v 与 y 之间的距离),

$$N_i(Y)=\{v\in V(G): \mathrm{dist}(v,Y)=i\}\ (i=0,1,2,\cdots),$$

收稿日期: 2008-03-12
通讯联系人: 徐新萍, 教授, 博士, 研究方向: 图论与组合. E-mail: xxp3268@sina.com

$$n(Y)=|N_0(Y)\cup N_1(Y)\cup N_2(Y)|=|\{v\in V(G): \mathrm{dist}(v, Y)\leqslant 2\}|.$$

显然, $N(Y)=N_1(Y)$, $n(Y)\leqslant|V(G)|$.

对于 $v\in V(G)$, 记 $N[v]=N(v)\cup\{v\}$. 设 $\{u, v\}\subseteq V(G)$, 令

$$J(u, v)=\{w\in N(u)\cap N(v): N(w)\subseteq N[u]\cup N[v]\}.$$

图 G 的部分平方图 G^* 是满足下列条件的图[1]: $V(G^*)=V(G)$, 且 $E(G^*)=E(G)\cup\{uv: uv\notin E(G)$, 且 $J(u, v)\neq\varnothing\}$.

本文将利用插点引理[4], 证明主要结果定理 3. 在定理 3中, 我们总假设 $Y=\{y_0, y_1, \dots, y_k\}\in I_{k+1}(G)$, b是整数, $0<b<k+1$. 对于 $i\in\{0, 1, \dots, k\}$, $Y_i=\{y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-(b-1)}\}\subseteq Y$ (这里 y_j 的下标取模 $k+1$). 当 $1<b<k$时, 令 $\mu=1$; 当 $b\in\{1, k\}$时, 令 $\mu=0$.

定理 3　设 G是 k-连通图 $(k\geqslant 2)$, 若对于每个 $Y\in I_{k+1}(G^*)$, 在 G中, 有

$$\sigma_b(Y)=\sum_{i=0}^{k}|N(Y_i)|>\frac{b+k}{2}(n(Y)-1)+\mu\left(\frac{b(2k-b+)}{2}-1\right),$$

则 G是哈密尔顿图.

注　设 $G_k=K_{k+1,k}(k\geqslant 2)$, 其二部为 (Y, U). 显然 G_k是 k-连通非哈密尔顿图, $|V(G_k)|=2k+1$. 且 $G_k^*=G_k$, $I_{k+1}(G_k^*)=I_{k+1}(G_k)=\{Y\}$, $n(Y)=|V(G_k)|$, 对任意 $y\in Y$, $N(y)=U$. 记 $Y=\{y_0, y_1, \dots, y_k\}$. 当 $b=1$时, 有

$$\sigma_b(Y)=k(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(n(Y)-1)=\frac{b+k}{2}(n(Y)-1).$$

因此, 当 $b=1$时, 图 G_k表明定理 3不能被改进, 因而在此意义下, 定理 3是最好可能的.

显然, 定理 3改进推广了定理 2; 当 $b=1$时, 定理 3改进推广了定理 1.

1　基本引理

在本节, 我们总假设 G 是连通非哈密尔顿图, C 是 G 的极大圈, H 是 $G-V(C)$ 的一个分支. $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}\subseteq N_C(H)$ 且 $v_1, v_2, \dots, v_m$依次排列在 C 上, v_i的下标取模 m. 若 $x\in V(C)$, x^+ 和 x^- 分别表示 x的沿 C 方向的前继点与后继点.

对于每个 $i\in\{1, 2, \dots, m\}$, 顶点 $u\in C(v_i, v_{i+1})$ 被称为可插点[4], 如果存在点 $w\in C[v_{i+1}, v_i)$, 使得 $\{w, w^+\}\subseteq N(u)$. 否则 u被称为不可插点.

引理 1[4]　对于 $i\in\{1, 2, \dots, m\}$, 设 $u\in C(v_i, v_{i+1})$, 如果 $C(v_i, u)$中的所有顶点都是可插点, 则 $u\notin N_C(H)$. 因此, 在 $C(v_i, v_{i+1})$中存在不可插点.

由引理 1, 对于每个 $i\in\{1, 2, \dots, m\}$, 记 x_i是 $C(v_i, v_{i+1})$中的第一个不可插点.

令 $X_m=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $X_M=\{x_0\}\cup X_m$, 这里 x_0是H 内的任意一点. 记 $X'=\{x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_{k'}}\}\subseteq X_m$ (这里 $1\leqslant p_1<p_2<\dots<p_{k'}\leqslant m$, $k'=k$, 或 $k+1$). 为了方便起见, 对于 $t\in\{1, 2, \dots, k'\}$, 我们总假设 $x_{p_t}=x'_t$, $v_{p_t}=v'_t$. 当 $k'=k+1$时, 令 $X=X'$, 且 $x'_{k+1}=x'_0$, 此时 $X\cap V(H)=\varnothing$; 当 $k'=k$时, 令 $X=X'\cup\{x'_0\}$ (这里 $x'_0=x_0$), 此时 $X\cap V(H)=\{x'_0\}$.

记 $J_X=\bigcup_{t=1}^{k'}C[x'_t, v'_{t+1}]$, $K_X=V(G)\setminus J_X$.

引理 2[4]　当 $k'=k$时, $K_X\cap N_0(X)=\{x_0\}$, 当 $k'=k+1$时, $K_X\cap N_0(X)=\varnothing$; $X_M\in I_{m+1}(G)$; $X\in I_{k+1}(G)$; $K_X\subseteq S_0(X)\cup S_1(X)$.

引理 3[1]　$X_M\in I_{m+1}(G^*)$, 因此, $X\in I_{k+1}(G^*)$.

一个区间 $C[z_1, z_2)$ $(\subseteq C[x'_t, v'_{t+1}]$, $t\in\{1, 2, \dots, k'\})$ 称为 CX-区间, 如果

(i) $C(z_1, z_2)\cap S_0(X)=\varnothing$,

(ii) $z_1\in N_2(X)\cup X$, $z_2\in S_0(X)\cup\{v'^{+}_{t+1}\}$.

一个 CX-区间 $C[z_1, z_2)$ 称为简单的, 如果 $C(z_1, z_2)\subseteq S_1(X)$.

引理 4[4]　设 $C[z_1, z_2)$ $(\subseteq C[x'_t, v'_{t+1}]$, $t\in\{1, 2, \dots, k'\})$ 是一个 CX-区间, 令 $L_i=N(x'_i)\cap C(z_1, z_2)$ $(i\in\{0, 1, \dots, k\})$.

若 $X\cap V(H)=\varnothing$ (即 $k'=k+1$), 则

$$L_t, L_{t-1}, \cdots, L_1, L_0=L_{k+1}, L_k, \cdots, L_{t+1}$$

(有的可能是空集)构成 $C(z_1, z_2)$ 的仅在端点相交的相继子路, 且对于 $i\in\{1,2,\cdots,k+1\}\setminus\{t\}$, $|L_i|\leqslant 1$.

若 $X\cap V(H)=\{x'_0\}$(即 $k'=k$), 则

$$L_t, L_{t-1}, \cdots, L_1, L_k, L_{k-1}, \cdots, L_{t+1}, L_0$$

(有的可能是空集)构成 $C(z_1, z_2)$ 的仅在端点相交的相继子路, 且对于 $i\in\{1,2,\cdots,k\}\setminus\{t\}$, $|L_i|\leqslant 1$.

我们总假设 b 是整数 $(0<b<k+1)$,

$$X_i=\{x'_i, x'_{i-1}, \cdots, x'_{i-(b-1)}\}(\subseteq X),$$

$i\in\{0,1,\cdots,k\}$, v_i 的下标取模 $k+1$.

令 $U\subseteq V(G)$. 我们总假设

$$\sigma_b(U,X)=\sum_{i=0}^{k}|N(X_i)\cap U|;$$

$$\sigma_b(X)=\sigma_b(V(G),X)=\sum_{i=0}^{k}|N(X_i)|.$$

由 $\sigma_b(X)$ 的定义, 不难检验下列结论成立.

引理 5 (1) 若 $w\in S_1(X)\cap N(x'_q)$, 则 $\sigma_b(\{w\},X)=b=b-1+|\{q\}|$.

(2) 令 $i_0\geqslant 2$, $w\in S_{i_0}(X)\cap C[x'_t, v'_{t+1}]\cap N(x'_{q_1})\cap N(x'_{q_2})\cap\cdots\cap N(x'_{q_{i_0}})$.

这里当 $b\neq 1$, 且 $x'_0\in N(w)\cap V(H)$)时,

$$(t\geqslant)q_1>q_2>\cdots>q_{i'_0}(>0)(k\geqslant)q_{i'_0+1}>\cdots>q_{i_0-1}(\geqslant t+1)>q_{i_0}(=0).$$

当其它情形时,

$$(t\geqslant)q_1>q_2>\cdots>q_{i'_0}(\geqslant 0)(k\geqslant)q_{i'_0+1}>\cdots>q_{i_0}(\geqslant t+1).$$

则

$$\sigma_b(\{w\},X)\leqslant\begin{cases}|\{q_1, q_2, \cdots, q_{i_0}\}|,\\ \text{若 } b=1;\\ \min\{k+1, b-1+|\{q_1, q_1-1, \cdots, q_{i_0}\}|\},\\ \text{若 } b\neq 1 \text{ 且 } x'_0\notin N(w)\cap V(H);\\ \min\{k+1, b-1+|\{q_1, q_1-1, \cdots, t+1\}|+\min\{t+1, b\}\},\\ \text{若 } b\neq 1 \text{ 且 } x'_0\in N(w)\cap V(H).\end{cases}$$

这里 $q_1, q_1-1, q_1-2, \cdots, q_{i_0}$ 将取模 $k+1$.

若 $X\cap V(H)=\{x'_0\}$ (即 $k'=k$), 记 $\zeta=1$; 若 $X\cap V(H)=\varnothing$ (即 $k'=k+1$), 记 $\zeta=0$.

由引理 4, 5 不难检验下列结论成立.

引理 6 (1) $\sigma_b(K_X,X)=b(|K_X|-\zeta-|K_X\cap N_2(X)|-|\bigcup_{l>2}(N_l(X)\cap K_X)|)$.

(2) 设 $C[z_1, z_2)\subseteq C[x'_t, v'_{t+1}]$ 是 CX-区间, 则

$$\sigma_b(C[z_1,z_2),X)\leqslant\begin{cases}\dfrac{b+k}{2}|C[z_1,z_2)|,\\ \text{若 } b\in\{1,k\}, x'_0\notin N(C[z_1,z_2))\cap V(H), \text{或 } t=k;\\ \dfrac{b+k}{2}|C[z_1,z_2)|+\min\{t+1, b\},\\ \text{若 } b\notin\{1,k\}, x'_0\in N(C[z_1,z_2))\cap V(H), \text{或 } t\neq k.\end{cases}$$

并且当 $C[z_1, z_2)$ 是简单区间时,

$$\sigma_b(C[z_1,z_2),X)=b(|C[z_1,z_2)|-1).$$

(3) 如果在 $C[x'_t, v'_{t+1}]$ 上存在 λ_t 个简单 CX-区间, 则

$$\sigma_b(C[x'_t, v'_{t+1}], X) \leqslant \begin{cases} \frac{b+k}{2}(|C[x'_t, v'_{t+1}]| - \rho_s^{(t)} - |\bigcup_{l>2}(N_l(X)\cap C[x'_t, v'_{t+1}])|) + b(\rho_s^{(t)} - \lambda_t), \\ \text{若 } b\in\{1,k\}, x'_0\notin V(H), \text{或 } t=k; \\ \frac{b+k}{2}(|C[x'_t, v'_{t+1}]| - \rho_s^{(t)} - |\bigcup_{l>2}(N_l(X)\cap C[x'_t, v'_{t+1}])|) + b(\rho_s^{(t)} - \lambda_t) + \\ \min\{t+1, b\}\eta_t, \\ \text{若 } b\notin\{1,k\}, x'_0\in V(H), \text{或 } t\neq k. \end{cases}$$

这里 $\eta_t = |N(x'_0)\cap(C[x'_t, v'_{t+1}]\backslash C_s^{(t)})|$.

引理 7　设有 λ 个简单 CX – 区间, 则

$$\sigma_b(X) \leqslant \frac{b+k}{2}(n(X) - \zeta - |N_2(X)\cap K_X| - \lambda) + \mu(\frac{b(2k-b+1)}{2} - 1).$$

证明　分两步证明.

$$\text{(a)}\ \sigma_b(X) \leqslant \frac{b+k}{2}(|J_X| - \rho_s - |\bigcup_{l>2}(N_l(X)\cap J_X)|) + \zeta\mu\sum_{t=1}^{k-1}\min\{t+1, b\}\eta_t + $$
$$b(\rho_s - \lambda + |K_X| - \zeta - |N_2(X)\cap K_X| - |\bigcup_{l>2}(N_l(X)\cap K_X)|) \leqslant$$
$$\frac{b+k}{2}(n(X) - \zeta - |N_2(X)\cap K_X| - \lambda) + \zeta\mu\sum_{t=1}^{k-1}\min\{t+1, b\}\eta_t.$$

注意到 $J_X = \bigcup_{t=1}^{k'} C[x'_t, v'_{t+1}]x'$ 且 $\lambda = \sum_{t=1}^{k'}\lambda_t$. 若 $x'_0\notin V(H)$ 或 $b\in\{1,k\}$, 则 $\zeta\mu=0$; 若 $x'_0\in V(H)$ 且 $b\notin\{1,k\}$, 则 $\zeta\mu=1$. 这样由引理 6(3), 不难得到

$$\sigma_b(J_X, X) = \sum_{t=1}^{k'}\sigma_b(C[x'_t, v'_{t+1}], X) \leqslant$$
$$\sum_{t=1}^{k'}\left(\frac{b+k}{2}(|C[x'_t, v'_{t+1}]| - \rho_s^{(t)} - |\bigcup_{l>2}(N_l(X))\cap C[x'_t, v'_{t+1}]|)\right) +$$
$$b(\rho_s^{(t)} - \lambda_t) + \zeta\mu\sum_{t=1}^{k-1}\min\{t+1, b\}\eta_t =$$
$$\frac{b+k}{2}(|J_X| - \rho_s - |\bigcup_{l>2}(N_l(X)\cap J_X)|) + b(\rho_s - \lambda) + \zeta\mu\sum_{t=1}^{k-1}\min\{t+1, b\}\eta_t.$$

由 $V(G) = J_X\cup K_X$, $\sigma_b(X) = \sigma_b(J_X, X) + \sigma_b(K_X, X)$. 这样由引理 6(1), 易见(a)成立.

(b) 若 $x'_0\notin V(H)$, 则由(a), 结果显然成立.

若 $x'_0\in V(H)$ 且 $|N_C(x_0)|\leqslant k+1$, 则不失一般性, 我们假设 $\eta_t = |N(x'_0)\cap C[x'_t, v'_{t+1}]\backslash C_s^{(t)}|\leqslant 1$ $(t\in\{1, 2, \dots, k-1\})$. 这样

$$\sum_{t=1}^{k-1}\min\{t+1, b\}\eta_t \leqslant \sum_{t=1}^{b-1}(t+1) + b(k-b) = \frac{(2k-b+1)b}{2} - 1,$$

由(a), 结论成立.

若 $x'_0\in V(H)$ 且 $|N_C(x_0)|\leqslant k-1$, 则不失一般性, 我们假设 $\eta_{k-1}=0$, $\eta_t\leqslant 1$ $(t\in\{1, 2, \dots, k-2, k\})$. 这样

$$\sum_{t=1}^{k-1}\min\{t+1, b\}\eta_t \leqslant \sum_{t=1}^{b-1}(t+1) + b(k-1-b) = \frac{(2k-b-1)b}{2} - 1,$$

由(a), 结论成立.

引理 8　设 $\zeta=0$ 及 $i_0\in\{1, 2, \dots, k'\}$. 若 $v'_{i_0}\in S_0(X)$, 则 $\lambda_{i_0-1}\geqslant 1$ (这里 λ_{i_0-1} 是 $C[x'_{i_0-1}, v'_{i_0}]$ 上的简单 CX – 区间的个数); 若 $v'_{i_0}\notin S_0(X)$, 则 $x\in N_2(X)\cap K_X\cap N(v'_{i_0})$. 因此总有 $\zeta + |N_2(X)\cap K_X| + \lambda_{i_0-1}\geqslant 1$.

证明　注意到 $\zeta=0\left(\text{即 } X\cap V(H)=\varnothing\right)$. 因此由引理 1, $V(H)\cap\left(N_0(X)\cup N_1(X)\right)=\varnothing$. 若 $v'_{i_0}\in S_0(X)$, 则在 $C[x'_{i_0-1}, v'_{i_0}]$ 上存在简单 CX – 区间 $C[z, z^+)$ (这里 $z^-\in C[x'_{i_0-1}, v'_{i_0}]$ 是最后一个不

属于 $S_0(X)$ 的顶点), 因此 $\lambda_{i_0-1}\geqslant 1$; 若 $v'_{i_0}\notin S_0(X)$, 则存在 $x\in N(v'_{i_0})\cap V(H)$, 即 $x\in N_2(X)\cap K_X$. 因此总有 $\zeta+|N_2(X)\cap K_X|+\lambda_{i_0-1}\geqslant 1$.

2 定理 3的证明

用反证法. 假设 G 不是哈密尔顿图, C 是 G 的一个最长圈, H 是 $G-V(C)$ 的一个分支. 由于 G 是 k-连通的且 $k\geqslant 2$, 因此, $|N_C(H)|\geqslant k$. 若 $|N_C(H)|=k$, 记 $k'=k$; 若 $|N_C(H)|\geqslant k+1$, 记 $k'=k+1$. 设 $\{v_1, v_2, \cdots, v_{k'}\}\subseteq N_C(H)$, $v_1, v_2, \cdots, v_{k'}$ 依次排列在 C 上. 由引理 1, 对于每个 $i\in\{1, 2, \cdots, k'\}$, 令 x_i 是 $C(v_i, v_{i+1})$ 的第一个不可插点. 记 $X'=\{x_1, x_2, \cdots, x_{k'}\}$. 若 $k'=k+1$, 则记 $X=X'$ 且 $x_{k+1}=x_0$, 因此, $x_0\notin V(H)$; 若 $k'=k$, 则记 $X=X'\cup\{x_0\}$ (这里 x_0 是 H 中的任一点). 由引理 3, $X=\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}\in I_{k+1}(G^*)$.

另一方面, 由引理 8, $\zeta+|N_2(X)\cap K_X|+\lambda\geqslant 1$. 注意到, 若 $x_0\in V(H)$, $|N_C(x_0)|\leqslant k$. 这样由引理 7, 有

$$\sigma_b(X)=\sum_{i=0}^{k}|N(X_i)|\leqslant\frac{b+k}{2}(n(X)-1)+\mu\left(\frac{(2k-b+1)b}{2}-1\right),$$

与条件矛盾.

致谢　感谢吴正声教授的热情指导.

[参考文献]

[1] Ainouche A, Kouider M. Hamiltonism and partially square graphs[J]. Graphs and Combinatorics, 1999, 15(3): 257-265.

[2] 邦迪 J A, 默蒂 U S R. 图论及其应用[M]. 吴望名, 译. 北京: 科学出版社, 1984.

[3] Bondy J A. Longest paths and cycles in graphs of high degree. Research Report CORR 80—16[R]. Waterloo, Canada Dept of Combinatory and Optimization, Univ of Waterloo, 1980.

[4] Liu Y, Tian F, Wu Z. Sequence concerning Hamiltonicity of graphs[J]. Journal of Nanjing Normal University: Natural Science Edition, 1995, 18(1): 19-28.

[责任编辑: 丁　蓉]