四阶幻方的变换群

徐丹丹, 张学斌

(南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 四阶幻方共有 7 040个不同的形式, 在 8阶变换群的作用下便可得到 880个基础形式. 证明了存在 1个 32阶变换群, 并将 880个基础形式进一步分成 220类.

[关键词] 四阶幻方, 变换, 变换群, 翻转, 旋转

[中图分类号] O175.29 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2008)04-0026-03

Transformation Group of Magic Squares of Order Four

Xu Dandan, Zhang Xuebin

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract It is well known that there are 7 040 different magic squares of order 4, which have 880 basic forms under the transformation group of order 8. It is proved that there is a transformation group of order 32, and under which 880 basic forms can be divided into 220 classes.

Key words magic squares of order four, transformation, transformation group, retroflexion, rotate

幻方在我国称为纵横图与龟背图, 西方称之为魔方或幻方 (Magic Square), 是由数 1, 2, …, n^2 排列而成的 $n\times n$ 方阵, 方阵中每 1行、每 1列以及两对角线上的 n 个数之和均相等, 其值 (称为幻和 Magic Sum) 为 $n(n^2+1)/2$

幻方最早记载于我国公元前 500年的春秋时期《大戴礼》中, 这说明我国人民早在 2 500年前就已经知道幻方的排列规律. 而国外直到公元 130年, 才由希腊人 Alexandria Theon第 1次提到幻方. 欧洲最早幻方是 1514年德国画家 Alberch t Dure在他著名铜版画 Melencolia上所画的 4×4幻方[1], 有趣的是, 他连创作年代 (1514) 也镶嵌在这个方阵中, 而且上下左右 4个小方阵和皆为 34, 是欧洲最古老的幻方.

幻方有许多用途, 特别是计算机的发展赋予了它新的意义. 目前, 它在程序设计、图论、人工智能、组合分析、实验设计 (如正交设计) 以至工艺美术方面都有广泛应用[2-6]. 本文主要是探寻四阶幻方的变换群, 并对四阶幻方的 880个基础形式进行分类.

1 三阶幻方的分类

众所周知, 三阶幻方共有下面 8种不同形式[7]:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

A_1

2	7	6
9	5	1
4	3	8

A_2

6	1	8
7	5	3
2	4	9

A_3

8	3	4
1	5	9
6	7	2

A_4

收稿日期: 2008-03-16
基金项目: 国家自然科学基金 (70571087)资助项目.
通讯联系人: 张学斌, 博士, 教授, 研究方向: 组合与设计理论. E-mail zhangxuebin@njnu.edu.cn

4	3	8
9	5	1
2	7	6

A_5

6	7	2
1	5	9
8	3	4

A_6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

A_7

2	9	4
7	5	3
6	1	8

A_8

其中$A_2, A_3, \cdots, A_8$可以由A_1经旋转 90°或沿主对角线翻转数次得到.

定理 1　三阶幻方共有 8种不同形式, 在 8阶变换群下, 有 1种基本形式.

2　四阶幻方的 8阶变换群

假设$A = (a_{i,j})_{4\times4}$是一个四阶幻方, $S = \{(i, j): 1\leqslant i\leqslant 4, 1\leqslant j\leqslant 4\}$是四阶幻方中元素$a_{i,j}$位置的集合.

定义 1　设 φ是S上的一个一一变换, $A = (a_{ij})_{4\times4}$是任意一个四阶幻方, 并设 $b_{i,j} = a_{\varphi^{-1}(i,j)}$及$B = (b_{ij})_{4\times4}$. 若$B$总是一个四阶幻方, 则称 φ是一个四阶幻方变换, 并记 $\varphi(A) = B$.

引理 1　$a_{1,1} + a_{1,4} + a_{4,1} + a_{4,4} = 34$, $a_{2,2} + a_{2,3} + a_{3,2} + a_{3,3} = 34$

证明　根据四阶幻方定义可证得.

定义 2　(1)以 τ表示绕四阶方阵$A = (a_{i,j})$的中心沿反时针旋转$\frac{2\pi}{4}$所作变换, 则这个方阵的所有旋转都可以表成 $\tau^i (i = 1, 2, 3, 4)$的形式, 即 $\tau(i, j) = ((14)(23)(j), (i))$, $\tau^{-1}(i, j) = ((j), (14)(23)(i))$.

(2)以 σ表示以主对角线为对称轴所作翻转变换, 即 $\sigma(i, j) = (j, i)$.

引理 2　σ和 τ是 2个四阶幻方的变换.

证明　设$A = (a_{ij})_{4\times4}$是任一个四阶幻方, 则有:

$$\sigma(A)=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & a_{4,1}\\\hline a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & a_{4,2}\\\hline a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{4,3}\\\hline a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4}\\\hline\end{array}\ ,\qquad \tau(A)=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4}\\\hline a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{4,3}\\\hline a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & a_{4,2}\\\hline a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & a_{4,1}\\\hline\end{array}\ ,$$

显然 σ和 τ是 2个四阶幻方的变换.

不难看出:

引理 3　假设H是由 σ、τ生成的群. 那么 σ、τ有下面关系式:

$$\sigma^2 = \tau^4 = \tau\sigma\tau\sigma = e$$

从而进一步有H为 8阶群.

下面结果来自于文献[8]:

引理 4　不同形式的四阶幻方共有 7 040个.

引理 5　在变换群H的作用下, 四阶幻方有 880个基本形式.

3　四阶幻方的 32阶变换群

再引进S上的两个一一变换 ϕ和 φ:

假设　$\phi(i, j) = ((14)(i), (14)(j))$, $\varphi(i, j) = ((13)(24)(i), (13)(24)(j))$.

引理 6　ϕ和 φ是四阶幻方的 2个变换.

证明　设$A = (a_{ij})_{4\times4}$是任一个四阶幻方, 则有:

$$\phi(A)=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a_{4,4} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,1}\\ \hline a_{2,4} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1}\\ \hline a_{3,4} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1}\\ \hline a_{1,4} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1}\\ \hline\end{array}\ ,\qquad \varphi(A)=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,1} & a_{3,2}\\ \hline a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,1} & a_{4,2}\\ \hline a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,1} & a_{1,2}\\ \hline a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,1} & a_{2,2}\\ \hline\end{array}\ .$$

可见 $\phi(A)$ 和 $\varphi(A)$ 皆为四阶幻方,因此引理6得证.

下面证明变换 σ, τ, ϕ 和 φ 生成了32阶群.

定理2 假设 N 是由 σ、τ、ϕ 和 φ 生成的群,那么有下面关系式:

$$\sigma^2=\tau^4=\phi^2=\varphi^2=e,$$
$$\sigma\tau=\tau^{-1}\sigma,\quad \sigma\phi=\phi\sigma,\ \sigma\varphi=\varphi\sigma,$$
$$\tau\phi=\phi\tau,\quad \tau\varphi=\varphi\tau,\quad \varphi\phi=\tau^2\phi\varphi.$$

从而进一步有 N 为32阶群.

证明　由引理3知:$H=\langle\sigma,\ \tau\rangle=\{e,\ \sigma,\ \tau,\ \tau^2,\ \tau^3,\ \sigma\tau,\ \sigma\tau^2,\ \sigma\tau^3\}$.

根据上面关系式直接证得 $\phi\varphi H=\varphi\phi H$,且 H、ϕH、φH、$\phi\varphi H$ 两两不相交. 这就是说,$N=H\cup\phi H\cup\varphi H\cup\phi\varphi H$ 为32阶群.

因此我们有:

定理3 在变换群 N 作用下,四阶幻方分成220个不同形式的类.

[参考文献]

[1] Ganter B, Quackenbush R. Droids[J]. Annals of Discrete Mathematics, 1982, 15(2): 179-187.

[2] Boncelet C. Wavelet transform based waterwork for digital images[J]. Optics Express, 1998, 12(1): 497-515.

[3] 邹建成,李国富,齐东旭. 广义Gray码及其在数字图像置乱中的作用[J]. 高校应用数学学报, 2002, 17(3): 365-370.

[4] 丁玮,齐东旭. 数字图像变换及信息伪装技术[J]. 计算机学报, 1998, 21(9): 838-843.

[5] 许芝卉. 用程序实现自然方阵构造奇数阶全对角线幻方[J]. 雁北师范学院学报, 2003, 19(2): 16-18.

[6] 徐承绪,卢准炜. 全对角线幻方的存在性[J]. 南京师大学报:自然科学版, 2004, 27(4): 32-35.

[7] 丁宗智. 幻方[M]. 南京:东南大学出版社, 1992: 55-68.

[8] 张景中. 幻方及其他[M]. 北京:科学教育出版社, 2004: 73-75.

[责任编辑:丁　蓉]