拟无爪泛圈图的一个充分条件

张 洁[1,2], 孙志人[2]

(1. 邢台职业技术学院基础课部,河北 邢台 054000)
(2 南京师范大学数学与计算机科学学院,江苏 南京 210097)

[摘要] 设 G 是一个图. 若对 G 中任意距离为 2的点对 x, y, 总存在 $u\in N(x)\cap N(y)$, 使得 $N[u]\subseteq N[x]\cup N[y]$, 则称 G 是拟无爪图. 本文给出了拟无爪图是泛圈图的一个充分条件: 设 G 是 n 阶 2-连通无 $\{K_4, P_5, A\}$ 的拟无爪图, $G\not\cong C_n$, 则 G 是泛圈图.

[关键词] 拟无爪图, 泛圈图, 充分条件
[中图分类号] O157.7 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009)01-0022-03

A Sufficient Condition for Quasi-Claw-Free Graphs to Be Pancyclic

Zhang Jie[1,2], Sun Zhiren[2]

(1. Department of Basic Courses, Xingtai Polytechnic College, Xingtai 054000, China)
(2 School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract A graph G is quasi claw-free if it satisfies the property: $d(x, y)=2\Rightarrow$ there exists $u\in N(x)\cap N(y)$, such that $N[u]\subseteq N[x]\cup N[y]$. In this paper, we give a sufficient condition for quasi-claw-free graphs to be pancyclic. Let G be a 2-connected quasi-claw-free graph with $|V(G)|=n$, $G\not\cong C_n$, and G is $\{K_4, P_5, A\}$-free, then G is pancyclic.

Key words quasi claw-free graphs, pancyclic graphs, sufficient condition

本文仅讨论有限无向简单图, 文中未说明的记号和术语见[1].

设 G 是一个图, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别为图 G 的顶点集和边集. 若 $v\in V(G)$, 则 $N(v)=\{u\in V(G): uv\in E(G)\}$, $N[v]=N(v)\cup\{v\}$. 图 G 的任意两点 u, v 之间的距离记为 $d(u, v)$. 设 C 是 G 的一个圈, $u, v\in V(C)$. 设 $P[u, v]$ 为 G 中的一条 (u, v)-路, 若 $P(u, v)\cap V(C)=\varnothing$ 则称 $P[u, v]$ 为圈 C 的一个旁路, 简记为 C-旁路. 设 G 是一个 n 阶图, 若对每一个 $k(3\leqslant k\leqslant n)$, G 都含有长为 k 的圈, 则称 G 为泛圈图.

如果图 G 中不含同构于 $K_{1,3}$ 的导出子图, 则称 G 是无爪图.

如果对图 G 中任意一对距离为 2的顶点 x, y, 存在 $u\in N(x)\cap N(y)$, 使得 $N[u]\subseteq N[x]\cup N[y]$, 则称 G 是拟无爪图. 显然, 无爪图一定是拟无爪图. 反之不真. 例如, 设图 $G=(V, E)$, 其中 $V=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E=\{12, 14, 15, 17, 23, 25, 34, 36, 47, 56, 67\}$, 则图 G 是拟无爪图, 但不是无爪图.

如果图 G 中不含同构于 $\{K_4, P_5, A\}$ 的导出子图, 则称 G 是无 $\{K_4, P_5, A\}$ 图. 这里的图 A 与 P_5 如图 1所示.

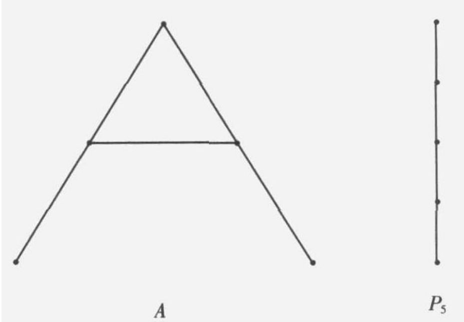

图 1 A-图与 P_5-图
Fig.1 A-graph and P_5-graph

关于拟性及泛圈性的讨论见[2]-[7].

1 引理

引理 1 设 G 是拟无爪图, G 包含长为 r 的圈 C, 但不含长为 $r+1$ 的圈, 这里 $3\leqslant r<n$. 且设 $x\notin V(C)$, $u\in V(C)$, $xu\in E(G)$. 则

收稿日期: 2008-03-12
基金项目: 国家自然科学基金(10671095)资助项目.
通讯联系人: 孙志人, 教授, 研究方向: 图论. E-mail: zrsun@njnu.edu.cn

(1) $u^- u^+ \in E(G)$;

(2) $xu^-, xu^+ \notin E(G)$; $xu^{-2}, xu^{+2} \notin E(G)$;

(3) 若图 G 是无 K_4 图, 则 $uu^{+2}, uu^{-2} \notin E(G)$;

(4) 若图 G 是无 $\{A, K_4\}$ 图, 则 $u^- u^{+2}, u^+ u^{-2} \in E(G)$.

证明　(1) 见参考文献[2].

(2) 圈 C 是图 G 中长为 r 的圈, 而图 G 不含长为 $r+1$ 的圈, 故 $xu^-, xu^+ \notin E(G)$. 若 $xu^{-2} \in E(G)$, 则可得 G 的长为 $r+1$ 的圈, 矛盾. 故 $xu^{-2} \notin E(G)$. 同理 $xu^{+2} \notin E(G)$.

(3) 若 $uu^{+2} \in E(G)$, 则 $d(x, u^{+2}) = 2$ 由拟无爪图定义, 存在 $y \in N(x) \cap N(u^{+2})$, 使得 $N[y] \subseteq N[x] \cup N[u^{+2}]$. 若 $y \in V(G) \setminus V(C)$, 且 $y \neq x$, 则可得长为 $r+1$ 的圈 $uxyu^{+2}Cu$, 矛盾. 故 $y \notin V(G) \setminus V(C)$. 显然 $y \neq u^{+2}$. 若 $y = u$, 则 $u^- \in N[y] \subseteq N[x] \cup N[u^{+2}]$, 因为 $xu^- \notin E(G)$, 故 $u^- u^{+2} \in E(G)$, 则 $G[u^{+2}u^+ uu^-] \cong K_4$, 矛盾. 故 $y \neq u$. 若 $y = u^+$, 则 $xu^+ \in E(G)$, 与 (1) 矛盾. 故 $y \neq u^+$. 同理 $y \neq u^-$, u^{-2}. 若 $y \in V(C) \setminus \{u^{-2}, u^-, u, u^+, u^{+2}, \}$, 则 $y^+ \in N[y] \subseteq N[x] \cup N[u^{+2}]$, 又 $xy^+ \notin E(G)$, 则 $y^+ u^{+2} \in E(G)$, 于是可得 $r+1$ 圈 $uxy\overline{C}u^{+2}y^+ Cu^- u^+ u$, 矛盾. 故 $y \notin V(C)$.

综上可知 $uu^{+2} \notin E(G)$. 同理 $uu^{-2} \notin E(G)$.

(4) 若 $u^- u^{+2} \notin E(G)$, 则 $G[xuu^- u^+ u^{+2}] \cong A$, 矛盾. 故 $u^- u^{+2} \in E(G)$. 同理 $u^+ u^{-2} \in E(G)$.

引理 2　设 G 是 n 阶 2-连通图, C 是 G 的圈, $v_1, v_2 \in V(C)$, $P = v_1x_1x_2\cdots x_rv_2$ 是圈 C 的一条非弦的最短旁路, 则当 $r \geqslant 2$ 时, 对任意 $v \in V(C) \setminus \{v_1, v_2\}$, 有 $vx_i \notin E(G)$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

我们称这样的路为圈 C 的最短旁路.

2　定理的证明

定理　设 G 是 n 阶 2-连通无 $\{K_4, P_5, A\}$ 的拟无爪图, 且 $G \ncong C_n$, 则 G 是泛圈图.

证明　首先证明 G 含 3-圈.

因为 G 是 2-连通图, 故 G 中含圈, 取 G 的最长圈 C.

情形 1　$|V(C)| = 3$, 则图 G 包含 3-圈.

情形 2　$3 < |V(C)| < n$, 则存在 $x \notin V(C)$, $u \in V(C)$, 使得 $xu \in E(G)$, 由引理 1 知, $u^- u^+ \in E(G)$. 于是, 图 G 包含 3-圈.

情形 3　$|V(C)| = n$, 因为 $G \ncong C_n$, 所以存在 $u, v \in V(C)$, 使得 $uv \in E(G) \setminus E(C)$. 若 $|C[u, v]| = 3$ 或 $|C[v, u]| = 3$, 则图 G 包含 3-圈. 故 $|C[u, v]| \geqslant 4$ 且 $|C[v, u]| \geqslant 4$ 若 $u^- u^+ \in E(G)$, 则 $uu^+ u^- u$ 是图 G 的 3-圈. 若 $u^- u^+ \notin E(G)$, 则 $d(u^-, u^+) = 2$, 由拟无爪图的定义, 存在 $y \in N(u^-) \cap N(u^+)$, 使得 $N[y] \subseteq N[u^-] \cup N[u^+]$. 显然 $y \neq u^-, u^+$, 若 $y = u$, 则 $v \in N[y] \subseteq N[u^-] \cup N[u^+]$, 于是, vu^-, vu^+ 中至少一条边存在, 即存在 3-圈. 若 $y = v$, 则 $vu^-, vu^+ \in E(G)$, 即图 G 包含 3-圈. 若 $y \in C(u^+, v)$, 则存在 $y^+ \in N[y] \subseteq N[u^-] \cup N[u^+]$, 有 $y^+ u^-, y^+ u^+$ 中至少一条边存在, 即存在 3-圈. 若 $y \in C(v, u^-)$, 则存在 $y^- \in N[y] \subseteq N[u^-] \cup N[u^+]$, 有 $y^- u^-, y^- u^+$ 中至少一条边存在, 即存在 3-圈.

综上可知, 图 G 包含 3-圈.

其次证明图 G 含 4-圈.

由上面讨论可知, 图 G 含有 3-圈, 设 3-圈为 $C_3 = v_0v_1v_2v_0$. 因为 G 是 2-连通图, 设 C_3 的最短旁路为 $P = v_0x_1x_2\cdots x_rv_1$, 因为 G 是无 P_5 图, 故 $1 \leqslant r \leqslant 3$ $r = 1$ 时, 存在 4-圈 $v_0x_1v_1v_2v_0$, $r = 2$ 时, 存在 4-圈 $v_0x_1x_2v_1v_0$, $r = 3$ 时, 依引理 2 有 $G[x_1v_0v_2v_1x_3] \cong A$, 矛盾. 故 $r \neq 3$

综上可知, 图 G 包含 4-圈.

最后证明 G 有任意 k 圈, $4 < k \leqslant n$.

设 r 是满足 $4 \leqslant r < n$ 的最小整数, 使得图 G 包含 r 圈, 但不含有 $r+1$ 圈. 设 $C = v_0v_1\cdots v_{r-1}$ 是 G 的一长为 r 的圈, $4 \leqslant r < n$. 且 G 不含 $r+1$ 圈, 因为 G 是 2-连通图, 设 $P = v_0x_1x_2\cdots x_rv_j$ 是 C 的最短旁路. 因为 G 是无 P_5 图, 故 $1 \leqslant r \leqslant 3$

① $r = 1$ 时

a. $j=1$时,可得图G的$r+1$圈$v_0x_1v_1Cv_0$,矛盾.同理当$j=r-1$时,也可得图G的$r+1$圈$v_0Cv_{r-1}x_1v_0$,矛盾.

b. $j=2$时,可得图G的$r+1$圈$v_0x_1v_2Cv_{r-1}v_1v_0$,矛盾.同理当$j=r-2$时,也可得图G的$r+1$圈$v_1Cv_{r-2}x_1v_0v_{r-1}v_1$,矛盾.

c. $3\leqslant j\leqslant r-3$时,显然$v_{r-1}x_1$, $v_{j-1}x_1\notin E(G)$,又$v_{r-1}v_j\notin E(G)$(否则G有$r+1$圈$v_0Cv_{j-1}v_{j+1}Cv_{r-1}v_jx_1v_0$), $v_{r-1}v_{j-1}\notin E(G)$(否则$G$有$r+1$圈$v_0Cv_{j-1}v_{r-1}\overline{C}v_jx_1v_0$), $v_0v_{j-1}\notin E(G)$(否则G有$r+1$圈$v_1Cv_{j-1}v_0x_1v_jCv_{r-1}v_1$);若$v_0v_j\notin E(G)$,则$G[v_{r-1}v_0x_1v_jv_{j-1}]\cong P_5$,矛盾;若$v_0v_j\in E(G)$,则$G[v_{r-1}v_0x_1v_jv_{j-1}]\cong A$,矛盾.

②$r=2$时

a. $j=1$时,可得图G有$r+1$圈$v_{r-2}v_1x_2x_1v_0v_2Cv_{r-2}$,矛盾.同理当$j=r-1$时,也可得图$G$有$r+1$圈$v_2v_{r-1}x_2x_1v_0v_{r-2}\overline{C}v_2$,矛盾.

b. $j=2$时,可得图G有$r+1$圈$v_0x_1x_2v_2Cv_0$,矛盾.同理当$j=r-2$时,也可得图G有$r+1$圈$v_oCv_{r-2}x_2x_1v_0$,矛盾.

c. $3\leqslant j\leqslant r-3$时,显然$G[v_{r-2}v_{r-1}v_0x_1x_2]\cong P_5$,矛盾.

③$r=3$时

a. $j=1$时,由引理 2可知$G[v_{r-1}v_0x_1x_2x_3]\cong P_5$,矛盾.

b. $2\leqslant j\leqslant r-1$时,$G[v_1v_0x_1x_2x_3]\cong P_5$,矛盾.

故假设不成立,定理证毕.

[参考文献]

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory With its Applications[M]. London Macmillan: The Macmillan Press Ltd, 1976.

[2] Ainouche A. Quasi-claw-free graphs[J]. Discrete Mathematics, 1998(179): 13-26.

[3] 桂预风,李刚,王彬. 泛圈图的一个充分条件[J]. 武汉理工大学学报:交通科学与工程版, 2004, 28(4): 583-584.

[4] 伍伟,戚志如,袁秀华,等. 泛圈图的一个充分条件[J]. 南京师大学报:自然科学版, 2006, 29(2): 31-34.

[5] Sun Zhiren, Miao Xiaoyan. Disjoint quasi-kernels in digraphs[J]. 南京师大学报:自然科学版, 2005, 28(3): 11-14.

[6] 王玉丽,王江鲁. 2-连通半无爪图的可迹性[J]. 山东师范大学学报:自然科学版, 2005, 20(4): 6-8.

[7] 周小跃. 泛圈图的一个新的充分条件[J]. 东南大学学报:自然科学版, 2000, 30(6): 114-118.

[责任编辑:丁 蓉]