常利力下双复合泊松风险模型破产概率的上界

魏广华[1], 高启兵[2,3]

(1. 金陵科技学院基础课部, 江苏 南京 210001)
(2. 南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)
(3. 东南大学数学系, 江苏 南京 210096)

[摘要] 对经典的 Lundberg-Cramer风险模型和 Fang and Luo's风险模型进行了推广. 考虑了常利力下双复合泊松风险模型. 模型中保费和理赔到达计数过程均为齐次 Poisson过程. 借助鞅和递归技巧, 获得该风险模型的最终破产概率的指数型上界.

[关键词] 双复合泊松风险模型, 常利力, 鞅, 递归, 破产概率

[中图分类号] O221.6 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009)01-0030-05

Upper Bounds for Ruin Probability in the Double Compound Poisson Risk Model Under Constant Interest Force

Wei Guanghua[1], Gao Qibing[2,3]

(1. Department of Basic Courses, Jinling Institute of Technology, Nanjing 210001, China)
(2. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)
(3. Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: Classical Lundberg-Cramer risk model and Fung and Luo's risk model are extended. The double compound Poisson risk model under constant interest force is considered. The claim number processes and insures premium income number processes are different humogenecus Poisson processes. Exponential type upper bounds are obtained for the ultimate ruin probability of this risk model by martingale and recursive techniques.

Key words: double compound Poisson risk model, constant interest force, martingale, recursive, ruin probability

经典的 Lundberg-Cramer风险模型假定保险公司的保费收取过程是时间 t的线性函数, 保费率是一个常数. Fang和 Luo's风险模型[1]中保费收取过程也是一复合 Poisson过程. 考虑下列双复合 Poisson风险模型:

$$S_t = u + U_t,\ t \geqslant 0, X_0 = u,$$

其中

$$U_t = \sum_{i=1}^{M(t)} X(i) - \sum_{i=1}^{N(t)} Y(i) = H(t) - Z(t),\ t \geqslant 0$$

此处:

(1) $\{X, X_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 是一独立同分布的非负随机变量序列, X 表示保费额;

(2) $\{M(t), t \geqslant 0\}$ 是参数为 α的 Poisson过程, 表示到时刻 t为止所收到的保单数;

(3) $\{Y, Y_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 是一独立同分布的非负随机变量序列, Y表示索赔额且 $Y \sim F$;

(4) $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是参数为 β的 Poisson过程, 表示到时刻 t为止索赔发生的次数;

(5) $\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$, $\{Y_i, i = 1, 2, \cdots\}$, $\{M(t), t \geqslant 0\}$ 以及 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是相互独立的;

收稿日期: 2008-03-10
基金项目: 国家自然科学基金 (10671032, 10871001, 60873176)、江苏省自然科学基金 (BK2008006) 及东南大学博士后基金 (1107010100) 资助项目.
通讯联系人: 魏广华, 助教, 研究方向: 金融数学. E-mail: skywgh@126.com

(6) $H(t)=\sum_{i=1}^{M(t)}X(i)$, $Z(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y(i)$ 都是复合 Poisson过程;

(7) 考虑到保险公司的安全性, 假设 $EU_t=EM(t)EX(i)-EN(t)EY(i)=(\alpha E(X)-\beta E(Y))t>0$;

(8) $Z, Z_1, Z_2\cdots$ 是一独立同分布的非负随机变量序列, Z 表示索赔时间间隔, $Z\sim G$, 令 $T_n=\sum_{k=1}^{n}Z_k$ 表示第 n 次索赔时刻, 且 $T_0=0$.

近年来, 大量的文献讨论带利力的风险模型的破产问题, 如 Asmussen[2], Cai and Dickson[3], Paulsen and Gjessing[4], Cai[5], Sundt and Teugels[6] 等研究了常利力下复合 Poisson风险模型的破产问题. 本文考虑带常利力的双复合 Poisson风险模型, 即

$$X(t)=e^{\delta t}\left(u+\int_0^t e^{-\delta s}\mathrm{d}U_s\right),\quad t\geqslant 0,\ X_0=u,\quad \delta\geqslant 0, \tag{1}$$

其中 δ 表示常利力且 $\delta\geqslant 0$.

设 τ_δ 表示风险模型 (1) 的破产时刻, $\tau_\delta=\inf\{t: X(t)<0\}$ 且约定 $\inf\phi=\infty$; $\varphi_\delta(u)$ 表示初始资本为 u 风险模型 (1) 的无限时破产概率, 即

$$\varphi_\delta(u)=\Pr\{\tau_\delta<\infty\mid X_0=u\}=\Pr\{\bigcup_{t\geqslant 0}(X(t)<0)\}.$$

因为破产只可能发生在索赔时刻, 因此有

$$\varphi_\delta(u)=\Pr\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(X(T_n)<0)\}=\Pr\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(V(T_n)<0)\}.$$

其中 $V(T_n)=X(T_n)e^{-\delta T_n}$ 为 $X(T_n)$ 在零时刻的折现值.

首先, 研究一下 $X(T_n)$ 和 $V(T_n)$ 的表达式:

$$X(T_1)=ue^{\delta Z_1}+\int_0^{Z_1}e^{\delta(Z_1-s)}\mathrm{d}H(s)-Y_1,$$

$$X(T_2)=X(T_1)e^{\delta Z_2}+\int_0^{Z_2}e^{\delta(Z_2-s)}\mathrm{d}H(s)-Y_2=$$

$$ue^{\delta(Z_1+Z_2)}+\int_0^{Z_1}e^{\delta(Z_1+Z_2-s)}\mathrm{d}H(s)+\int_0^{Z_2}e^{\delta(Z_2-s)}\mathrm{d}H(s)-Y_1e^{\delta Z_2}-Y_2=\cdots,$$

$$X(T_n)=X(T_{n-1})e^{\delta Z_n}+\int_0^{Z_n}e^{\delta(Z_n-s)}\mathrm{d}H(s)-Y_n=$$

$$ue^{\delta T_n}+\sum_{i=1}^{n}\int_0^{Z_i}e^{\delta(T_n-T_{i-1}-s)}\mathrm{d}H(s)-\sum_{i=1}^{n}Y_ie^{\delta(T_n-T_i)},$$

且

$$V(T_n)=X_{T_n}e^{-\delta T_n}=u+\sum_{i=1}^{n}\int_0^{Z_i}e^{-\delta(T_{i-1}+s)}\mathrm{d}H(s)-\sum_{i=1}^{n}Y_ie^{-\delta T_i}.$$

进一步, 定义

$$\varphi_\delta(u;n)=\Pr\{\bigcup_{k=1}^{n}(X(T_k)<0)\}=\Pr\{\bigcup_{k=1}^{n}(V(T_k)<0)\},$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_\delta(u;n)=\varphi_\delta(u). \tag{2}$$

破产概率的精确解很难获得, 本文中, 当盈余过程 (1) 存在适当的调节系数时, 通过鞅和递归两种方法得到破产概率 $\varphi_\delta(u)$ 的上界.

1 鞅方法估计上界

在本文中, 对于 $E(e^{tY})$ 假设存在 $0<t<\xi$, 使得 $\lim_{t\to\xi}E(e^{tY})=\infty$.

引理 **1** 存在惟一正实数 R, 使得下式成立

$$E\left\{\exp\left[-R\left(\int_0^{Z}e^{-\delta s}\mathrm{d}H(s)-Ye^{-\delta Z}\right)\right]\right\}=1.$$

证明 令 $h(r)=E\left\{\exp\left[-r\left(\int_0^{Z}e^{-\delta s}\mathrm{d}H(s)-Ye^{-\delta Z}\right)\right]\right\}-1$, 则 $h(0)=0$.

$$h'(r)\mid_{r=0}=E\left\{-\left(\int_0^{Z}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}H(s)-Y\mathrm{e}^{-\delta Z}\right)\exp\left[-r\left(\int_0^{Z}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}H(s)-Y\mathrm{e}^{-\delta Z}\right)\right]\right\}=$$

$$E\left[-\left(\int_0^{Z}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}H(s)-Y\mathrm{e}^{-\delta Z}\right)\right]<0$$

从而在 $r=0$处,曲线 $h(r)$的切线斜率小于 0.又因

$$h''(r)=E\left\{\left(\int_0^{Z}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}H(s)-Y\mathrm{e}^{-\delta Z}\right)^2\exp\left[-r\left(\int_0^{Z}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}H(s)-Y\mathrm{e}^{-\delta Z}\right)\right]\right\}>0,$$

故曲线 $h(r)$是严格下凹的,所以 $h(r)=0$有两解,除去平凡解 $r=0$,另存在惟一正解,记为 R.

定理 1　在引理 1下,对任意的 $u\geqslant 0$, $\varphi_\delta(u)\leqslant \mathrm{e}^{-Ru}$.

证明　$V_\delta(T_{n+1})=V_\delta(T_n)+\int_0^{Z_{n+1}}\mathrm{e}^{-\delta(T_n+s)}\mathrm{d}H(s)-Y_{n+1}\mathrm{e}^{-\delta T_{n+1}}=$

$$V_\delta(T_n)+\mathrm{e}^{-\delta T_n}\left(\int_0^{Z_{n+1}}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}H(s)-Y_{n+1}\mathrm{e}^{-\delta Z_{n+1}}\right).$$

令 $F_n=\sigma(T_1\cdots T_n)$.则对任何 $n\geqslant 0$,

$$E[\mathrm{e}^{-RV_\delta(T_{n+1})}\mid F_n]=\mathrm{e}^{-RV_\delta(T_n)}E\left[\mathrm{e}^{-R\mathrm{e}^{-\delta T_n}\left(\int_0^{Z_{n+1}}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}H(s)-Y_{n+1}\mathrm{e}^{-\delta Z_{n+1}}\right)}\mid F_n\right]=$$

$$\mathrm{e}^{-RV_\delta(T_n)}E\left\{\left[\mathrm{e}^{-R\left(\int_0^{Z_{n+1}}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}H(s)-Y_{n+1}\mathrm{e}^{-\delta Z_{n+1}}\right)}\right]^{\mathrm{e}^{-\delta T_n}}\mid F_n\right\}\leqslant$$

$$\mathrm{e}^{-RV_\delta(T_n)}\left\{E\left[\left(\mathrm{e}^{-R\left(\int_0^{Z_{n+1}}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}H(s)-Y_{n+1}\mathrm{e}^{-\delta Z_{n+1}}\right)}\right)\mid F_n\right]\right\}^{\mathrm{e}^{-\delta T_n}}=$$

$$\mathrm{e}^{-RV_\delta(T_n)}\left\{E\left[\mathrm{e}^{-R\left(\int_0^{Z_{n+1}}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}H(s)-Y_{n+1}\mathrm{e}^{-\delta Z_{n+1}}\right)}\right]\right\}^{\mathrm{e}^{-\delta T_n}}=$$

$$\mathrm{e}^{-RV_\delta(T_n)}.$$

所以,$\{\mathrm{e}^{-RV_\delta(T_n)},\ >0\}$是上鞅,$\tau_\delta$是一停时,$\tau_\delta\wedge n$为有界停时.据最优停时定理得:

$$E[\mathrm{e}^{-RV_\delta(T_{\tau_\delta\wedge n})}]\leqslant E[\mathrm{e}^{-RV_\delta(T_0)}]=\exp\{-Ru\}. \tag{3}$$

又

$$E[\mathrm{e}^{-RV_\delta(T_{\tau_\delta\wedge n})}]\geqslant E[\mathrm{e}^{-RV_\delta(T_{\tau_\delta\wedge n})}I(\tau_\delta\leqslant n)]=E[\mathrm{e}^{-RV_\delta(T_{\tau_\delta})}I(\tau_\delta\leqslant n)]\geqslant$$

$$EI(\tau_\delta\leqslant n)=\varphi_\delta(u;n), \tag{4}$$

由(3)式和(4)式得:

$$\varphi_\delta(u;n)\leqslant \mathrm{e}^{-Ru}. \tag{5}$$

由(2)式和(5)式知定理 1成立.

2　递归方法估计上界

引理 2　设X和Y是两个独立的随机变量.对任何非负波雷尔函数或非负有界函数f,则有$E[f(X,Y)\mid\sigma(X)]=g(X)$, a.s.其中$g(x)=E[f(x,Y)]$.

证明　可参看文献[7]附录中推论 2.5.

引理 3　存在惟一正实数 R_1,使得下式成立

$$E\left\{\exp\left[-R_1\left(\int_0^{Z}\mathrm{e}^{-\delta(Z-s)}\mathrm{d}H(s)-Y\right)\right]\right\}=1.$$

证明　类似于引理 1.

定理 2　在引理 3下,对任意的 $u\geqslant 0$,

$$\varphi_\delta(u)\leqslant\beta E\{\exp[R_1Y]\}E\left\{\exp\left[-R_1(u\mathrm{e}^{\delta Z}+\int_0^{Z}\mathrm{e}^{\delta(Z-s)}\mathrm{d}H(s))\right]\right\}. \tag{6}$$

其中 $\beta^{-1}=\inf_{t\geqslant 0}\dfrac{\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{R_1y}\mathrm{d}F(y)}{\mathrm{e}^{R_1t}\cdot\bar F(t)}$.

特别,如果 F是 NWUC(new worse than used in convex ording),对任意的 $u\geqslant 0$,

$$\varphi_\delta(u) \leqslant E\left\{\exp\left[-R_1\left(u e^{\delta Z} + \int_0^Z e^{\delta(Z-s)} dH(s)\right)\right]\right\}. \tag{7}$$

证明 $\varphi_\delta(u; n+1) = E\left[\varphi_\delta\left(u e^{\delta Z_1} + \int_0^{Z_1} e^{\delta(Z_1 - s)} dH(s) - Y_1; n\right)\right] =$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_\delta\left(u e^{\delta z} + \int_0^z e^{\delta(z-s)} dH(s) - y; n\right) dF(y) dG(z) =$$

$$\int_0^\infty \left[\begin{array}{l} F\left(u e^{\delta z} + \int_0^z e^{\delta(z-s)} dH(s)\right) + \int_0^{u e^{\delta z} + \int_0^z e^{\delta(z-s)} dH(s)} \\ \varphi_\delta\left(u e^{\delta z} + \int_0^z e^{\delta(z-s)} dH(s) - y; n\right) dF(y) \end{array}\right] dG(z). \tag{8}$$

由 β的定义知, 任何 $x \geqslant 0$,

$$F(x) \leqslant \beta e^{-R_1 x} \int_x^\infty e^{R_1 y} dF(y), \tag{9}$$

$$F(x) \leqslant \beta e^{-R_1 x} E(e^{R_1 Y}). \tag{10}$$

下面用数学归纳法证明: $\varphi_\delta(u; n) \leqslant \beta E(e^{R_1 Y}) E\left\{\exp\left[-R_1\left(u e^{\delta Z} + \int_0^Z e^{\delta(Z-s)} dH(s)\right)\right]\right\}$.

由(10)式知:

$$\varphi_\delta(u; 1) = \Pr\left\{Y_1 > u e^{\delta Z_1} + \int_0^{Z_1} e^{\delta(Z_1 - s)} dH(s)\right\} =$$

$$\int_0^\infty F\left(u e^{\delta z} + \int_0^z e^{\delta(z-s)} dH(s)\right) dG(z) \leqslant$$

$$\beta E(e^{R_1 Y}) \int_0^\infty \exp\left\{-R_1\left(u e^{\delta z} + \int_0^z e^{\delta(z-s)} dH(s)\right)\right\} dG(z) =$$

$$\beta E(e^{R_1 Y}) E\left\{\exp\left[-R_1\left(u e^{\delta Z} + \int_0^Z e^{\delta(Z-s)} dH(s)\right)\right]\right\}.$$

假设对任意 $n > 1$, 有 $\varphi_\delta(u; n) \leqslant \beta E(e^{R_1 Y}) E\left\{\exp\left[-R_1\left(u e^{\delta Z} + \int_0^Z e^{\delta(Z-s)} dH(s)\right)\right]\right\}$成立.

因为 $e^{\delta Z} \geqslant 1$, 所以

$$\varphi_\delta(u; n) \leqslant \beta E(e^{R_1 Y}) E\left\{\exp\left[-R_1\left(u + \int_0^Z e^{\delta(Z-s)} dH(s)\right)\right]\right\} = \beta e^{-R_1 u}.$$

由(8)式和(9)式,

$$\varphi_\delta(u; n+1) \leqslant \int_0^\infty \beta \exp\left[-R_1\left(u e^{\delta z} + \int_0^z e^{\delta(z-s)} dH(s)\right)\right] \int_{u e^{\delta z} + \int_0^z e^{\delta(z-s)} dH(s)}^\infty e^{R_1 y} dF(y) dG(z) +$$

$$\int_0^\infty \int_0^{u e^{\delta z} + \int_0^z e^{\delta(z-s)} dH(s)} \beta \exp\left[-R_1\left(u e^{\delta z} + \int_0^z e^{\delta(z-s)} dH(s) - y\right)\right] dF(y) dG(z) =$$

$$\beta \int_0^\infty \exp\left[-R_1\left(u e^{\delta z} + \int_0^z e^{\delta(z-s)} dH(s)\right)\right] \int_0^\infty e^{R_1 y} dF(y) dG(z) =$$

$$\beta E(e^{R_1 Y}) E\left\{\exp\left[-R_1\left(u e^{\delta Z} + \int_0^Z e^{\delta(z-s)} dH(s)\right)\right]\right\}.$$

综上所述, 对任意的 n, 有 $\varphi_\delta(u; n) \leqslant \beta E(e^{R_1 Y}) E\left\{\exp\left[-R_1\left(u e^{\delta Z} + \int_0^Z e^{\delta(Z-s)} dH(s)\right)\right]\right\}$成立.

在上式中令 $n \to \infty$, 可得证(6)式.

当 F 是 NWUC时, 则 $\beta = [E(e^{R_1 Y})]^{-1}$. 由(6)式可得(7)式.

推论 1 在定理 2条件下, 对任何 $u \geqslant 0$, 有 $\varphi_\delta(u) \leqslant e^{-R_1 u}$.

证明 由引理 3和 $e^{\delta Z} \geqslant 1$知:

$$\varphi_\delta(u) \leqslant \beta E\{\exp[R_1 Y]\} E\left\{\exp\left[-R_1\left(u + \int_0^Z e^{\delta(Z-s)} dH(s)\right)\right]\right\} =$$

$$\beta e^{-R_1 u} E\{\exp[R_1 Y]\} E\left\{\exp\left[-R_1 \int_0^Z e^{\delta(Z-s)} dH(s)\right]\right\} = \beta e^{-R_1 u} \leqslant e^{-R_1 u}.$$

[参考文献]

[1] Fang S Z, Luo J H. The double compound Poisson risk model[J]. Pure and Applied Mathematics, 2006, 22(2): 271-278.

[2] Asmussen S. Ruin Probabilities[M]. Singapore: World Scientific, 2000.

[3] Cai J, Dickson D C M. On the expected discounted penalty function at ruin of a surplus process with interest[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2002, 30(3): 389-404.

[4] Palsen J, Gjessing H K. Ruin theory with stochastic economic environment[J]. Advances in Applied Probability, 1997, 29: 965-985.

[5] Cai J, Yang H L. Ruin in the perturbed compounded Poisson[J]. Advances in Applied Probability, 2005, 37(3): 819-835.

[6] Sundt B, Teugels J L. Ruin estimates under interest force[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1995, 16(1): 7-22.

[7] Damien Lamberton, Bernard Lapeyre. Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance[M]. New York: CRC Press, 2000.

[责任编辑: 丁　蓉]