R^3 的射丛上方程 $u_{xx} + u_{yy} + \quad u^p = 0$ 的不变群和不变解

何　梅

(淮阴师范学院数学系, 江苏 淮安 223300)

[摘要] 利用 PDE在 Lie群下的不变性理论研究了方程 $u_{xx} + u_{yy} + \quad u^p = 0$在不变群下的不变解, 得到相应的一些几何不变群, 并给出方程在不变群下的不变形式和不变解.

[关键词] 射流空间, 对称群, 群不变解, 无穷小生成元

[中图分类号] O175 4　[文献标识码] A　[文章编号] 1001-4616(2009)01-0035-04

Invariant Groups and Invariant Solutions of Equation $u_{xx} + u_{yy} + \quad u^p = 0$ on Jet Bundle R^3

He Mei

(Department of Mathematics, Huaiyin Teachers College, Huaian 223300, China)

Abstract By using the invariance of a PDE, the invariant groups admitted by equation $u_{xx} + u_{yy} + \quad u^p = 0$ on jet bundle are studied. Infinitesimal generators of the corresponding geometric invariant groups are obtained. And the invariant forms and a family of group-invariant solutions are also given.

Key words jet space, symmetry group, group-invariant solution, infinitesimal generator

众所周知, Lie群理论的一个重要应用就是微分方程的不变解. 对于许多来自几何和物理领域的微分方程, 求它们的精确解是非常困难的, 能反映方程通解的近似特点及其奇点分布结构的群不变解则为研究这些有重要背景的微分方程提供了有力的工具[1-4]. 局部变换群理论无论在线性 PDE还是非线性 PDE中的应用起源于 Sophus Lie的研究. 他研究了给定 PDE的所有向量场的 Lie代数保持系统不变性可以由一种称为 定义方程 的一种基本形式的辅助 PDE的大量的解直接发现. 在 19世纪 60年代初期, Ovsjannikov L V在群不变解上的工作从根本上论证了 Lie群对复杂偏微分方程组显解的重构方法的影响与一般性. 这项工作相继有 Ovsjannikov, Bluman[5], Cole, Ames和 Holm等人在做, 并且对一些重要的方程给出了许多新的显解. 另一方面, 1979年前后 Goldschmidt和 Spencer[6]在进一步的研究中发现了对称群的定义方程可解性的一般条件.

对对称群及对称解的研究, 人们已经做了大量的工作, 并且得到了许多结果, 例如: Olver P J[7]、Bila N[8]、Giacomo Caviglia[9]和 Sukeyuki Kumei, Bluman George W[10]利用不变群的理论来研究关于 PDE的一些解; 它还在孤立子理论中有广泛的应用[11]. 在应用方面, Lie群理论在物理、化学、生物等领域也有许多独特的作用[12].

本文将由在点变换 Lie群下 PDE的不变性来构造方程 $u_{xx} + u_{yy} + \quad u^p = 0$的不变群及在某些不变群下方程 $u_{xx} + u_{yy} + \quad u^p = 0$的不变解. 首先考虑射流空间 $(x, u, \quad u, \ ^2u, \quad , \ ^ku) -$ space上的 PDE:

$$F(x, u, \quad u, \ ^2u, \quad , \ ^ku) = 0, \tag{1}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \quad , x_n)$表示对应于 n个独立变量的坐标, u为非独立变量, ^ju表示 u关于 x的直到 j阶的偏导数, 此时关于坐标 $x, u, \quad u, \ ^2u, \quad , \ ^ku$的方程(1)称为代数方程.

收稿日期: 2008-06-12
基金项目: 江苏省普通高校自然科学研究计划(08KJB110002)、淮阴师范学院青年教师基金(06HSQN080)资助项目.
通讯联系人: 何　梅, 讲师, 研究方向: 几何分析. E-mail: hemei94@126.com

1　预备知识

我们先介绍一些本文需要的主要定义, 其它未涉及的有关 Lie群的基本术语与记号均可参见文献[13, 14].

定义 1　设M是光滑流形, 在经典意义下M是 Euclid空间 R^p　R^q的一个开子集, 其坐标为 $(x, u) = (x^1, \quad, x^p, u^1, \quad, u^q)$, 其中 x 是独立变量, u 是非独立变量. 我们构造一个纤维丛: $J_k^*(Z, p)$　Z, 称为延拓 k-阶射丛, 其相应为 u 的关于 x 的阶数不超过 k的所有不同偏导数. 在特殊情况下, M 是一个向量丛, 就像投射空间是仿射空间的完备一样, 延拓 k-阶射丛是一般射丛 J_kZ 的完备.

定义 2　单参数 Lie变换群 $x^* = X(x; \quad)$ 的无穷小生成元是算子

$$X = \quad(x) \quad = \sum_{i=1}^{n} {}_i(x)\frac{}{x_i}, \tag{2}$$

其中　是梯度算子　$= \left(\frac{}{x_1}, \frac{}{x_2}, \quad, \frac{}{x_n}\right)$.

定义 3　曲面 $F(x) = 0$是单参数 Lie变换群 $x^* = X(x; \quad)$的不变曲面当且仅当只要 $F(x) = 0$时, 总有 $F(x^*) = 0$.

定义 4　方程 $F(x, y, u^{(2)}) = 0$称为极大秩的, 如果当 $F(x, y, u^{(2)}) = 0$时, 总有 Jacobi矩阵 $\boldsymbol{J}_F(x, y, u^{(2)}) = (F_x, F_y; F_u; F_{u_x}, F_{u_y}; F_{u_{xx}}, F_{u_{xy}}, F_{u_{yy}})$ 的秩为 1.

定义 5　单参数点变换 Lie群

$$\begin{aligned} x_i^* &= X_i(x, u; \quad) = x_i + \quad {}_i(x, u) + O(\ ^2), \\ u^* &= U(x, u; \quad) = u + \quad (x, u) + O(\ ^2) \end{aligned} \tag{3}$$

作用在(x, u)空间上, 有无穷小生成元:

$$X = \ {}_i(x, u)\frac{}{x_i} + \quad (x, u)\frac{}{u},$$

群(3)的 k阶延拓无穷小生成元为:

$$X^{(k)} = \ {}_i\frac{}{x_i} + \quad \frac{}{u} + \ {}_i^{(1)}\frac{}{u_i} + \quad + \ {}_{i_1 \quad i_k}^{(k)}\frac{}{u_{i_1 \quad i_k}}.$$

引理 1　曲面 $F(x) = 0$是单参数 Lie变换群 $x^* = X(x; \quad)$ 的不变曲面当且仅当只要 $F(x) = 0$时, 总有 $XF(x) = 0$, 其中 X 是由 (2) 给出的无穷小生成元.

引理 2　曲线 $F(x, y) = 0$是单参数 Lie变换群

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, y; \quad) = x + \quad (x, y) + O(\ ^2), \\ y^* &= Y(x, y; \quad) = y + \quad (x, y) + O(\ ^2) \end{aligned} \tag{4}$$

的不变曲线当且仅当只要 $F(x, y) = 0$时, 总有 $XF(x, y) = 0$, 其中无穷小生成元 $X = \quad (x, y)\frac{}{x} + \quad (x, y)\frac{}{y}$.

定理 1　(PDE不变性的无穷小准则)设

$$X = \ {}_i(x, u)\frac{}{x_i} + \quad (x, u)\frac{}{u} \tag{5}$$

是点变换 Lie群

$$x^* = X(x, u; \quad), \quad u^* = U(x, u; \quad) \tag{6}$$

的无穷小生成元, 设

$$\begin{aligned} X^{(k)} = \ &{}_i(x, u)\frac{}{x_i} + \quad (x, u)\frac{}{u} + \ {}_i^{(1)}(x, u, \quad u)\frac{}{u_i} + \quad + \\ &{}_{i_1 i_2 \quad i_k}^{(k)}(x, u, \quad u, \quad, \ ^k u)\frac{}{u_{i_1 \quad i_k}} \end{aligned} \tag{7}$$

是(6)的延拓无穷小生成元, 其中

$$ {}_i^{(1)} = D_i \quad - (D_{i \ j})u_j,\ i = 1, 2, \quad , n, $$
$$ {}_{i_1 i_2 \quad i_j}^{(j)} = D_{i_j} \ {}_{i_1 \quad i_{j-1}}^{(j-1)} - (D_{i_j \ k})u_{i_1 \quad i_{j-1} k},\ i_l = 1, 2, \quad , n,\ l = 1, 2, \quad , k, $$

且 $(x, u) = (\ _1(x, u), \ _2(x, u), \quad , \ _n(x, u))$, 则单参数点变换 Lie群(6)是偏微分方程 $F(x, u, \ u, \quad , {}^k u) = 0$的容许群, 即: 群(6)是偏微分方程 $F(x, u, \ u, \quad , {}^k u) = 0$的点对称群当且仅当 $F(x, u, \ u, \quad , {}^k u) = 0$时, 总有 $X^k F(x, u, \ u, \quad , {}^k u) = 0$

2　主要结果

文献[12]利用 Rabinowitz s Global Bifurcation Theorem研究了带初边值条件的方程 $- \quad u = f(u)$的解的正则性, 文献[3]研究了方程 $- \quad u + b(x)u = f(x, u)$的解的正则性. 下面我们考虑方程

$$ u_{xx} + u_{yy} + \quad u^p = 0 \tag{8} $$

令

$$ F(x, y, u^{(2)}) = u_{xx} + u_{yy} + \quad u^p, \tag{9} $$

由方程(9)我们有: $F_x = F_y = 0, F_u = \ p u^{p-1}, F_{u_x} = F_{u_y} = 0, F_{u_{xx}} = F_{u_{yy}} = 1, F_{u_{xy}} = 0$, 从而 $\boldsymbol{J}_F(x, y, u^{(2)}) = (0, 0, \ p u^{p-1}; 0, 0, 1, 0, 1)$. 即: 当 $F(x, y, u^{(2)}) = 0$时, $\mathrm{rank} \boldsymbol{J}_F = 1$

设方程(8)容许群的无穷小生成元为

$$ X = \quad (x, y, u)\frac{}{x} + \quad (x, y, u)\frac{}{y} + \quad (x, y, u)\frac{}{u}, \tag{10} $$

其二阶延拓为

$$ X^{(2)} = X + \ {}^x \frac{}{u_x} + \ {}^y \frac{}{u_y} + \ {}^{xx} \frac{}{u_{xx}} + \ {}^{xy} \frac{}{u_{xy}} + \ {}^{yy} \frac{}{u_{yy}}, \tag{11} $$

其中

$$ {}^x = \ _x + (\ _u - \ _x)u_x - \ _x u_y - \ _u u_x^2 - \ _u u_x u_y, $$
$$ {}^y = \ _y - \ _y u_x + (\ _u - \ _y)u_y - \ _u u_x u_y - \ _u u_y^2, $$
$$ {}^{xx} = \ _{xx} + (2 \ _{xu} - \ _{xx})u_x - \ _{xx} u_y + (\ _{uu} - 2 \ _{xu})u_x^2 - 2 \ _{xu} u_x u_y - \ _{uu} u_x^3 - \ _{uu} u_x^2 u_y + $$
$$ (\ _u - 2 \ _x)u_{xx} - 2 \ _x u_{xy} - 3 \ _u u_x u_{xx} - \ _u u_y u_{xx} - 2 \ _u u_x u_{xy}, $$
$$ {}^{yy} = \ _{yy} + (2 \ _{uy} - \ _{yy})u_y - \ _{yy} u_x + (\ _{uu} - 2 \ _{uy})u_y^2 - 2 \ _{uy} u_x u_y - \ _{uu} u_y^3 - \ _{uu} u_x u_y^2 + $$
$$ (\ _u - 2 \ _y)u_{yy} - 2 \ _y u_{xy} - 3 \ _u u_y u_{yy} - \ _u u_x u_{yy} - 2 \ _u u_y u_{xy}. $$

由方程(8)及 Th1得

$$ p \quad u^{p-1} + \ {}^{xx} + \ {}^{yy} = 0, \tag{12} $$

将 ^{xx}, ^{yy}代入方程(12)得

$$ p \quad u^{p-1} + \ _{xx} + (2 \ _{xu} - \ _{xx})u_x - \ _{xx} u_y + (\ _{uu} - 2 \ _{xu})u_x^2 - $$
$$ 2 \ _{xu} u_x u_y - \ _{uu} u_x^3 - \ _{uu} u_x^2 u_y + (\ _u - 2 \ _x)u_{xx} - 2 \ _x u_{xy} - 3 \ _u u_x u_{xx} - \ _u u_y u_{xx} - 2 \ _u u_x u_{xy} + $$
$$ \ _{yy} + (2 \ _{uy} - \ _{yy})u_y - \ _{yy} u_x + (\ _{uu} - 2 \ _{uy})u_y^2 - 2 \ _{uy} u_x u_y - \ _{uu} u_y^3 - \ _{uu} u_x u_y^2 + (\ _u - 2 \ _y)u_{yy} - $$
$$ 2 \ _y u_{xy} - 3 \ _u u_y u_{yy} - \ _u u_x u_{yy} - 2 \ _u u_y u_{xy} = 0 $$

上式整理后得到关于 $u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \quad$ 的多项式, 令各项系数全为 0得到关于 , , 的决定方程组

$$ \ _u - 2 \ _x = 0, \tag{13a} $$
$$ \ _u - 2 \ _y = 0, \tag{13b} $$
$$ - 2 \ _x - 2 \ _y = 0, \tag{13c} $$
$$ \ _u = 0, \tag{13d} $$
$$ \ _u = 0, \tag{13e} $$
$$ 2 \ _{xu} - \ _{xx} - \ _{yy} = 0, \tag{13f} $$
$$ 2 \ _{uy} - \ _{xx} - \ _{yy} = 0, \tag{13g} $$
$$ \ _{uu} - 2 \ _{xu} = 0, \tag{13h} $$
$$ \ _{uu} - 2 \ _{uy} = 0, \tag{13i} $$

$$-2\ _{xu} - 2\ _{uy} = 0, \tag{13j}$$

$$_{uu} = 0, \tag{13k}$$

$$_{uu} = 0, \tag{13l}$$

$$_{xx} + \ _{yy} = 0, \tag{13m}$$

$$p\ u^{p-1} = 0, \tag{13n}$$

由(13)式我们得到了方程(8)容许的Lie点对称群的无穷小元 , , :

$$(x, y, u) = -c_1 y + c_2,$$
$$(x, y, u) = c_1 x + c_3,$$
$$(x, y, u) = 0,$$

其中 c_1, c_2, c_3 是任意常数,这样我们得到了微分方程(8)容许群的无穷小生成元:

$$X = c_1\left(x\frac{}{y} - y\frac{}{x}\right) + c_2\frac{}{x} + c_3\frac{}{y}.$$

由此我们得到:

命题 **1**　方程(8)的无穷小对称Lie代数由以下3个向量场组成:

$$X_1 = \frac{}{x}, X_2 = \frac{}{y}, X_3 = x\frac{}{y} - y\frac{}{x}.$$

结论　由 $X_i(i = 1, 2, 3)$ 生成的每一个单参数子群 $G_i(i = 1, 2, 3)$ 都是方程(8)的容许对称群.从几何直观来讲,这是沿 x, y 方向的平移不变群.若 $u = f(x, y)$ 是方程(8)的解,则下列 $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ 也是方程(8)的解,其中

$$u^{(1)} = f(x - \ , y),$$
$$u^{(2)} = f(x, y - \ ),$$
$$u^{(3)} = f(x\cos\ - y\sin\ , x\sin\ + y\cos\ ), (\quad \mathbf{R}).$$

[参考文献]

[1] Barenblatt G I. Similarity and Intermediate Asymptotics [M]. New York: Consultants Bureau, 1979.

[2] Hill J M. Solution of Differential Equations by Means of One-Parameter Groups [M]. Boston: Pitman, 1982.

[3] Ovsiannikov L V. Group Properties of Differential Equation [M]. Moscow: Novosibirsk, 1962.

[4] Stephani H. Differential Equation Their Solution Using Symmetries [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[5] Bluman George W, Sukeyuki K. Symmetries and Differential Equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[6] Goldschmidt H, Spencer D. On the nonlinear cohomology of Lie equations III [J]. Acta Math, 1976, 136: 103-239.

[7] Olver P J. Symmetry groups and group invariant solutions of partial differential equations [J]. J Diff Geom, 1979, 14: 497-542.

[8] Bila N. Lie groups applications to minimal surfaces PDE [J]. Differential Geometry-Dynamical Systems, 1999, 1(1): 1-9.

[9] Giacomo C. Symmetry transformations, isovectors, and conservation laws [J]. J Math Phys, 1986, 27(4): 972-978.

[10] Sukeyuki K, Bluman G W. When nonlinear differential equations are equivalent to linear differential equations [J]. SIAM, J Appl Math, 1982, 42(5): 1157-1173.

[11] 谷超豪,郭柏灵,李翔坤,等.孤立子理论与应用[M].杭州:浙江科学技术出版社,1990: 216-267.

[12] Fan E G. Some new reductions from a lax integrable system [J]. Acta Math Appl Sinica, 2002, 18(3): 405-410.

[13] 田畴.李群及其在微分方程中的应用[M].北京:科学出版社,2001.

[14] Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1986.

[责任编辑:丁　蓉]