

# Lorenz 系统的混沌同步

王铁邦<sup>1</sup>, 曹天德<sup>1</sup>, 雷 勇<sup>1</sup>, 宋 标<sup>1</sup>, 宋爱粉<sup>1</sup>, 陈光旨<sup>2</sup>

(1. 南京信息工程大学数理学院, 江苏 南京 210044)

(2. 广西大学物理系, 广西 南宁 530004)

[摘要] 利用相互耦合同步法实现了 Lorenz 系统的混沌同步, 该方法在参数不匹配的情况下失去了同步. 用相互耦合法和自适应控制同步法在 Lorenz 混沌系统中实现了参数不匹配情况下的混沌同步. 在一个参数不匹配, 甚至参数相差很大的情况下, 均能使 Lorenz 系统达到同步.

[关键词] Lorenz 系统, 参数不匹配, 混沌同步

[中图分类号] O 545 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009) 01-0057-05

## Chaotic Synchronization of Lorenz Systems

Wang Tiebang<sup>1</sup>, Cao Tiande<sup>1</sup>, Lei Yong<sup>1</sup>, Song Biao<sup>1</sup>, Song Aifen<sup>1</sup>, Chen Guangzhi<sup>2</sup>

(1. College of Mathematics and Physics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China)

(2. Department of Physics, Guangxi University, Nanning 530004, China)

**Abstract** The chaotic synchronization was achieved in Lorenz system via the mutual coupling method. This method has lost synchronization in the mismatched parameters circumstance. The chaotic synchronization was achieved in Lorenz system via combining the mutual coupling method and adaptive method in the mismatched parameter circumstance. When one parameter was mismatched and the difference of the two corresponding mismatched parameters were very large, the combining mutual coupling method and adaptive method could realize complete synchronization of Lorenz system.

**Key words** Lorenz system, mismatched parameter, chaotic synchronization

驱动-响应同步方案 (简称 PC) 由 Pecora 和 Carroll 在 1990 年<sup>[1]</sup> 首先提出. 随后其它的混沌同步方法如主动-被动分拆同步法 (简称 APD)<sup>[2]</sup>, 参数调节法和自适应控制调节法<sup>[3]</sup> 等也相继出现. 特别是混沌同步在通讯系统中的一系列成果<sup>[2, 4, 5, 6]</sup>, 使该领域的研究更见高涨.

驱动-响应同步法在混沌系统中实现了混沌同步<sup>[7, 8]</sup>. 但这些方法首先要分解出混沌系统中的稳定部分, 然后才能实现同步. 但是自然界中的大多数混沌, 如激光混沌系统、生化混沌系统等等, 是不能分解出稳定部分的. 相互耦合同步法就能克服这些困难, 并且实现了时空混沌系统 CODES 的混沌同步<sup>[9]</sup> 和超混沌 LC 系统的混沌同步<sup>[10]</sup>, 不过该方法在参数不匹配情况下却失去了同步. 但是在实际应用中, 由于混沌系统的特性和外界各种因素的干扰, 2 个系统的参数完全匹配是相当困难的, 所以参数不匹配情况是常见的. 利用相互耦合同步法实现了 Lorenz 混沌系统的同步; 用相互耦合同步法和自适应控制同步法施于参数不匹配的 Lorenz 混沌系统, 实现了混沌同步.

## 1 相互耦合同步法对 Lorenz 混沌系统的讨论

Lorenz 系统为:

收稿日期: 2008-04-18

基金项目: 江苏省教育厅“青蓝工程”(0717)、南京信息工程大学科研基金资助项目.

通讯联系人: 王铁邦, 博士, 副教授, 研究方向: 非平衡统计. E-mail: twang@nuist.edu.cn

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xy, \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy. \end{cases} \tag{1}$$

当系统参数取:  $\sigma = 10$   $r = 28$   $b = 8/3$ 时, Lorenz系统处于混沌状态. 复制一个和 (1) 一样的系统, 以  $x'$ 、 $y'$ 、 $z'$  表示其系统变量. 在系统 (1) 和复制的系统上加上相互耦合, 则原系统为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y + c(x' - x), \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xy + c(y' - y), \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy + c(z' - z). \end{cases} \tag{2}$$

复制的系统为:

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = -\sigma' x' + \sigma' y' + c(x - x'), \\ \frac{dy'}{dt} = r' x' - y' - x' y' + c(y - y'), \\ \frac{dz'}{dt} = -b' z' + x' y' + c(z - z'). \end{cases} \tag{3}$$

其中  $c$  为相互耦合系数,  $\sigma'$ 、 $r'$ 、 $b'$  为复制系统 (3) 的系统参数.

考虑对应变量的差

$$e_1 = x - x'; \quad e_2 = y - y'; \quad e_3 = z - z'. \tag{4}$$

随时间的变化来反映 2 个系统的同步情况.

最大 Lyapunov 指数反映了混沌系统的运动行为<sup>[11]</sup>. 在一定的耦合下, 当 2 个系统的最大相对 Lyapunov 指数小于零时, 2 个系统就达到了同步, 否则就没有达到同步<sup>[12]</sup>. 因此, 可以由 2 个混沌系统的最大相对 Lyapunov 指数来判断这 2 个混沌系统是否达到同步. 系统 (6) 和系统 (7) 的最大相对 Lyapunov 指数为:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \delta_{x_t}^2(i)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \delta_{x_0}^2(i)}} \tag{5}$$

其中  $\delta_x(i) = e_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 为系统 (2) 与系统 (3) 各对应变量的差,  $\delta_{x_0}(i)$  是  $\delta_x(i)$  在  $t = 0$  时刻的值,

$\delta_{x_t}(i)$  是  $\delta_x(i)$  在  $t$  时刻的值,  $\sqrt{\sum_{i=1}^N \delta_{x_0}^2(i)}$  是  $t = 0$  时刻系统 (2) 与系统 (3) 间的距离,  $\sqrt{\sum_{i=1}^N \delta_{x_t}^2(i)}$  是  $t$  时刻两系统间的距离<sup>[12]</sup>,  $N$  为系统的维数.

图 1 所示为参数匹配时 (也即:  $\sigma' = \sigma = 10$   $r' = r = 28$   $b' = b = 8/3$ ), 最大 Lyapunov 指数和耦合系数  $c$  的变化关系. 由图 1 可知当耦合系数  $c$  取大于 0.5 时, 所有的最大 Lyapunov 指数  $\lambda$  均小于零. 也就是说在参数匹配情况下, 当耦合系数  $c$  取大于 0.5 时, 经一定时间的演化后, 系统 (2) 和系统 (3) 最终都能达到混沌同步.

以下所用的数值模拟计算, 系统初值在 0 到 1 之间的均匀分布随机数序列中随机选取. 取耦合系数  $c = 0.8$  在系统

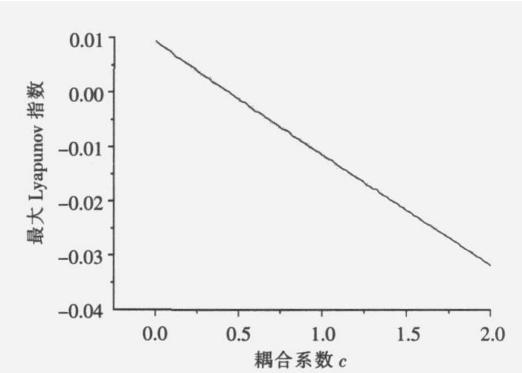


图 1 最大 Layapunov 指数和耦合系数  $c$  的变化关系  
Fig. 1 Variety connection of the largest Layapunov exponent and the coupling parameter  $c$

参数完全匹配的情况下, 即:  $r' = r = 28$   $b' = b = 8/3$   $\sigma' = \sigma = 10$ 时, 数值模拟混沌系统 (2) 和系统 (3). 系统 (2) 和系统 (3) 对应变量的差  $e_i (i = 1, 2, 3)$  随时间演化如图 2 (a)、(b)、(c) 所示, 从图 2 可以明显看出, 随着时间的演化  $e_i$  迅速地趋于零. 也即当耦合  $c = 0.8$  时, 系统 (2) 和系统 (3) 达到了同步. 在参数匹配情况下, 利用相互耦合同步法能实现 Lorenz 系统的混沌同步.

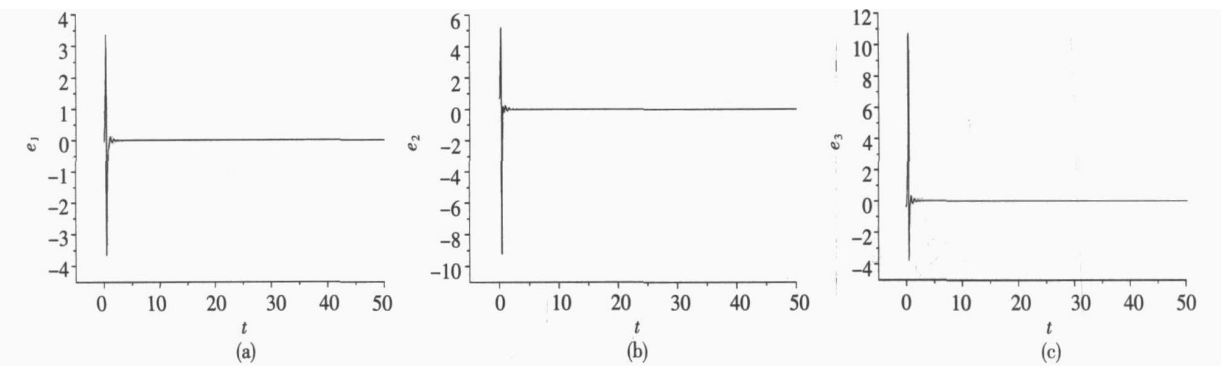


图 2 (a) (b) (c) 耦合系数  $c = 0.8$ , 系统 (2) 和系统 (3) 对应变量  $e_i = x_i - y_i (i = 1, 2, 3)$  随时间的变化

Fig. 2 When the coupling parameter  $c = 0.8$ , (a) (b) (c) respectively is the evolution of the error  $e_i = x_i - y_i (i = 1, 2, 3)$  of system (2) and system (3) with time

若取耦合系数  $c = 0.8$  在系统参数微小不匹配的情况下, 即:  $r' = r = 28$   $b' = b = 8/3$   $\sigma' = 10.09$   $\sigma = 10$  数值模拟混沌系统 (2) 和系统 (3). 图 3 (a)、(b)、(c) 所示分别为系统 (2) 和系统 (3) 各对应变量的差  $e_i (i = 1, 2, 3)$  随时间的变化情况. 由图 3 (a)、(b)、(c) 可以明显地看出, 在参数不匹配下, (2) 和系统 (3) 系统失去了同步. 相互耦合同步法在参数不匹配情况下失去了同步.

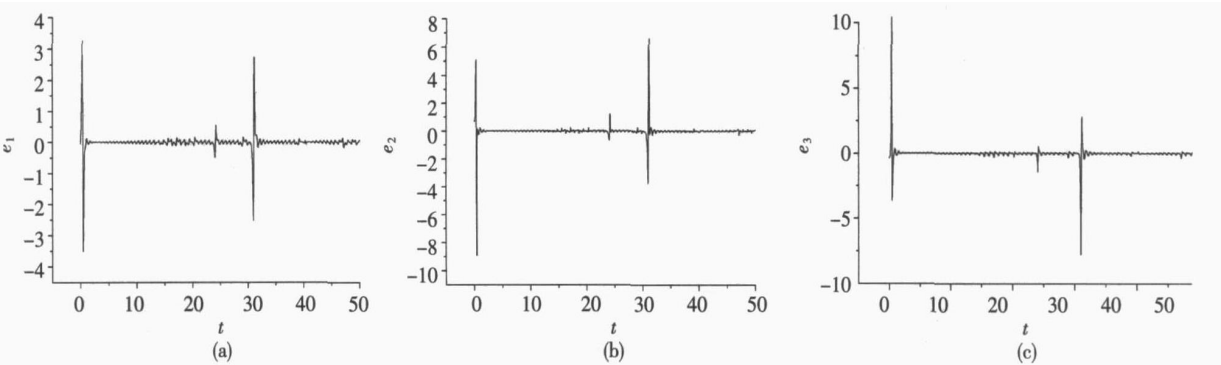


图 3 (a) (b) (c) 耦合系数  $c = 0.8$ , 系统 (2) 和系统 (3) 一个参数不匹配 ( $r' = r = 28, b' = b = 8/3, \sigma' = 10.09, \sigma = 10$ ) 的情况下,  $e_i = x_i - y_i (i = 1, 2, 3)$  随时间的变化

Fig. 3 When the coupling parameter  $c = 0.8$  and there have a mismatched parameter ( $r' = r = 28, b' = b = 8/3, \sigma' = 10.09, \sigma = 10$ ), (a) (b) (c) respectively is the evolution of the error  $e_i = x_i - y_i (i = 1, 2, 3)$  with time

2 相互耦合同步法和自适应控制同步法对 Lorenz 系统的讨论

2.1 一个参数不匹配下的混沌同步

应用自适应控制同步法<sup>[13 14]</sup>, 在系统 (3) 中对参数  $\sigma'$  进行自适应控制:

$$\frac{d\sigma'}{dt} = - \varepsilon (x' - x) \operatorname{sgn} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) \right] - \delta (\sigma' - \sigma), \tag{6}$$

其中  $x$  为期望混沌轨道的  $x$  分量, 也就是系统 (2) 中的  $x$  分量,  $\sigma$  为相应于  $\sigma'$  的参数值, 也即在系统 (2) 中的  $\sigma (\sigma = 10)$ .  $\varepsilon$  为刚性常数, 取为  $\varepsilon = 5$   $\delta$  为衰减参数, 取为  $\delta = 10$   $\operatorname{sgn}$  为符号函数,  $\operatorname{sgn}(x)$  表示  $x$  的符号.

取耦合  $c = 0.8$  系统参数不匹配下  $r' = r = 28$   $b' = b = 8/3$   $\sigma' = 10.09$   $\sigma = 10$  加上自适应控制

(6), 数值模拟混沌系统 (2) 和系统 (3). 系统 (2) 和系统 (3) 的对应变量的差  $e_i (i = 1, 2, 3)$  随时间演化的变化情况如图 4 (a)、(b)、(c). 由图 4 可知, 随着时间的演化,  $e_i$  趋于零, 也就是系统 (2) 和系统 (3) 达到同步.

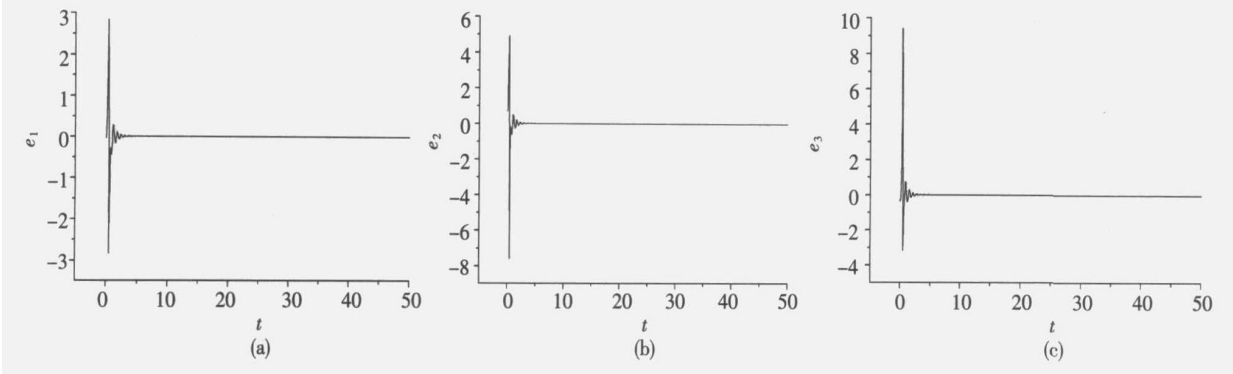


图 4 (a) (b) (c) 加上自适应控制后, 耦合系数  $c = 0.8$ , 系统 (2) 和系统 (3) 一个参数不匹配 ( $r' = r = 28, b' = b = 8/3, \sigma' = 10.09, \sigma = 10$ ) 的情况下,  $e_i = x_i - y_i (i = 1, 2, 3)$  随时间的变化

Fig. 4 Adding the self-adaptive control, when the coupling parameter  $c = 0.8$  and there have a mismatched parameter ( $r' = r = 28, b' = b = 8/3, \sigma' = 10.09, \sigma = 10$ ), (a) (b) (c) respectively is the evolution of the error  $e_i = x_i - y_i (i = 1, 2, 3)$  with time

由上可知: 应用相互耦合同步法和自适应控制同步法, 在系统参数不匹配情况下, 也能使系统达到同步. 这就增强了混沌同步的稳定性.

2.2 参数相差很大情况下的混沌同步

上面讨论的是系统参数微小不匹配的情况,  $\sigma' = 10.05, \sigma = 10$  参数差为千分之几. 下面讨论参数相差很大, 百分之几、甚至百分之几十的情况.

取系统参数为:  $r' = r = 28, b' = b = 8/3, \sigma' = 15, \sigma = 10$  相互耦合系数仍取为:  $c = 0.8$  系统 (2) 和系统 (3) 的参数  $\sigma'$  和  $\sigma$  差很大, 为  $\sigma$  的 50%. 图 5 (a)、(b)、(c) 所示为系统参数  $\sigma'$  和  $\sigma$  差很大的情况下, 数值模拟系统 (2) 和系统 (3) 的对应变量的差  $e_i (i = 1, 2, 3)$  随时间的变化情况. 由图 5 可知  $e_i$  随时间的演化并没有趋于零, 系统 (2) 和系统 (3) 没有达到同步.

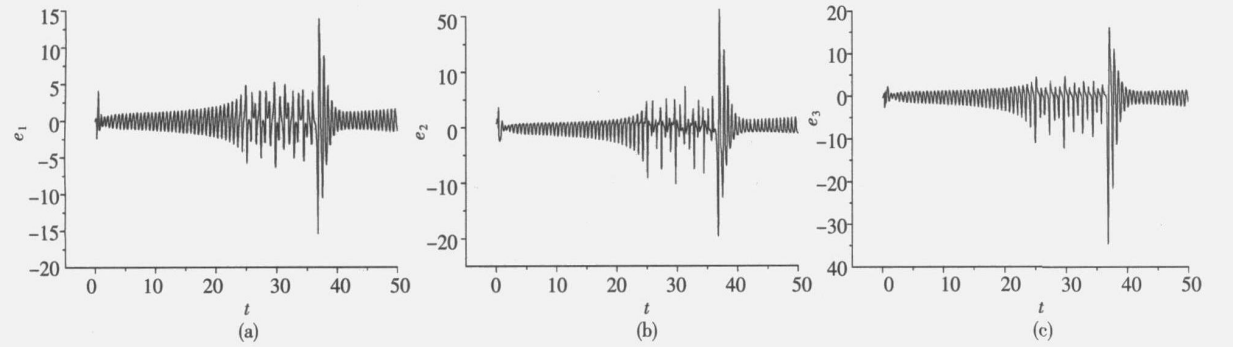


图 5 (a) (b) (c) 耦合系数  $c = 0.8$ , 系统 (2) 和系统 (3) 参数相差很大 ( $r' = r = 28, b' = b = 8/3, \sigma' = 15, \sigma = 10$ ), 的情况下,  $e_i = x_i - y_i (i = 1, 2, 3)$  随时间的变化

Fig. 5 When the coupling parameter  $c = 0.8$  and the difference of corresponding mismatched parameter of system (2) and system (3) were very large ( $r' = r = 28, b' = b = 8/3, \sigma' = 15, \sigma = 10$ ), (a) (b) (c) respectively is the evolution of the error  $e_i = x_i - y_i (i = 1, 2, 3)$  with time

如果再对系统 (3) 中的  $\sigma'$  进行自适应控制 (6). 图 6 (a)、(b)、(c) 所示数值模拟系统 (2) 和系统 (3) 的对应变量的差  $e_i (i = 1, 2, 3)$  随时间的变化情况. 由图 6 可知  $e_i$  随时间的演化而趋于零, 系统 (2) 和系统 (3) 达到同步.

可见相互耦合同步法和自适应控制同步法同时使用在 2 个混沌系统的系统参数相差很大的情况下, 仍能使这 2 个混沌系统达到同步.

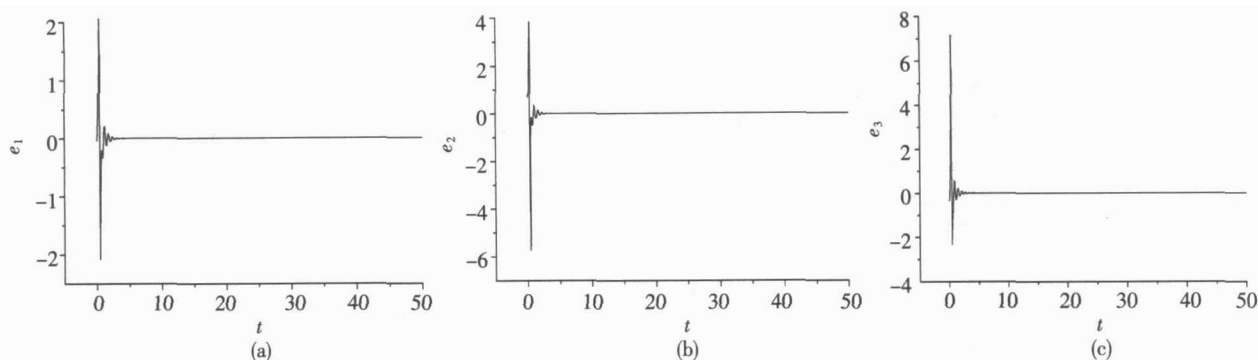


图6 (a) (b) (c) 加上自适应控制后,耦合系数  $c = 0.8$ , 系统(2) 和系统(3) 参数相差很大( $r' = r = 28, b' = b = 8/3, \sigma' = 15, \sigma = 10$ ) 的情况下,  $e_i = x_i - y_i (i = 1, 2, 3)$  随时间的变化

Fig.6 Adding the self-adaptive control, when the coupling parameter  $c = 0.8$  and the difference of corresponding mismatched parameter of system (2) and system (3) were very large ( $r' = r = 28, b' = b = 8/3, \sigma' = 15, \sigma = 10$ ), (a) (b) (c) respectively is the evolution of the error  $e_i = x_i - y_i (i = 1, 2, 3)$  with time

### 3 结 论

以 Lorenz混沌系统为例,用相互耦合同步法实现了 Lorenz混沌系统的混沌同步,该方法在参数不匹配情况失去了同步.用相互耦合同步法和自适应控制同步法实现了 Lorenz混沌系统在参数不匹配情况的同步.并且在系统参数相差很大的情况下,也能使 Lorenz混沌系统达到同步.拓宽了混沌系统同步的应用范围,增强了混沌同步的稳定性,具有很强的实际意义.相互耦合同步法和自适应控制同步法的共同应用有其特有的优点,可望在保密通讯中大显身手.

### [参考文献]

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic system[s]. Phys Rev Lett 1990, 64(8): 821-824.
- [2] Kocarev L, Parlitz U. General approach for chaotic synchronization with applications to communication[J]. Phys Rev Lett 1995, 74(25): 5 028-5 031.
- [3] John J K, Amrikar R E. Synchronization of unstable orbits using adaptive control[J]. Phys Rev E, 1994, 49(6): 4 843-4 848.
- [4] Hayes S, Grebogi C, Ott E. Communicating with chaos[J]. Phys Rev Lett 1993, 70(20): 3 031-3 034.
- [5] Perez G, Cerdeira H A. Extracting messages masked by chaos[J]. Phys Rev Lett 1995, 74(11): 1 970-1 973.
- [6] 王金兰, 陈光旨. 时空混沌系统的主动-间隙耦合同步[J]. 物理学报, 1999, 48(9): 1 605-1 610.
- [7] Fang J Q. Synchronizing hyperchaos and controlling hyperchaos[J]. Chinese Science Bulletin, 1995, 40(12): 988-993.
- [8] 方锦清. 非线性系统中混沌控制方法、同步原理及其应用前景[J]. 物理学进展, 1996, 16(2): 1-60.
- [9] 王铁邦, 陈光旨, 覃团发. 时空混沌的相互耦合同步[J]. 广西科学, 2001, 8(1): 19-21.
- [10] 王铁邦, 覃团发, 陈光旨. 超混沌系统的耦合同步[J]. 物理学报, 2001, 50(10): 1 851-1 855.
- [11] 石朋亮, 胡岗, 徐莉梅. 耦合影像系统的最大 Lyapunov 指数[J]. 物理学报, 2000, 49(1): 24-29.
- [12] Liu Z H, Chen S G, Hu B. Coupled synchronization of spatiotemporal chaos[J]. Phys Rev E, 1999, 59(3): 2 817-2 821.
- [13] Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators[J]. Phys Rev Lett 1997, 78(12): 4 193-4 196.
- [14] Fujisaka H, Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems[J]. Progress of Theoretical Physics 1983, 69(1): 32-47.

[责任编辑: 顾晓天]