

椭圆外无穷扇形区域边值问题的自然边界元法

陈亚军, 杜其奎

(南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 研究了椭圆外无穷扇形区域上调和方程边值问题的自然边界元法. 利用自然边界归化原理, 获得该问题的 Poisson 积分公式和自然积分方程, 给出了自然积分方程的数值方法, 以及逼近解的收敛性和误差估计, 最后给出了数值例子, 以示方法的可行性和有效性.

[关键词] 椭圆外无穷扇形区域, 调和问题, 自然边界元法

[中图分类号] O 242. 21 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009) 02-0006-07

Natural Boundary Element Method for Boundary Value Problem in an Exterior Elliptic Infinite Sector Domain

Chen Yajun, Du Qikui

(School of Mathematical Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract In this paper we investigate the natural boundary element method for the boundary value problem of harmonic equation in an exterior elliptic infinite sector domain. By the principle of the natural boundary reduction, we obtain the Poisson integral formula and the natural integral equation of this problem, and give the numerical method of the natural integral equation. Moreover, the convergence of the approximate solutions and their error estimates are obtained. Finally, some numerical examples are presented to show that our methods are effective.

Key words exterior elliptic infinite sector domain, harmonic problem, natural boundary element method

科学与工程计算中常常遇到无界区域问题, 数值求解这类问题一直是人们关注的热点. 由于区域的无界性, 这给数值计算带来了一定的困难. 虽然经典的边界元方法可用于求解无界区域问题, 但在实际处理时, 涉及到大量奇异积分的数值计算, 计算量较大. 20 世纪 70 年代末由冯康教授和余德浩教授首创并发展起来的自然边界元方法^[1-7], 与经典的边界元方法相比具有独特的优点: 易实现, 数值稳定性好, 与有限元基于同一变分原理, 可与有限元自然地耦合. 用有限元与自然边界元耦合法求解无穷扇形外问题时, 人们通常选取圆弧作人工边界, 但对具有“凹角长条型”内边界的外问题, 以圆弧作人工边界显然并非最佳选择, 它将导致一些不必要的计算, 甚至不能获得令人满意的数值结果. 可以预测, 用一个接近凹角长条型区域边界形状的人工边界(如椭圆弧)可能会更好. 因此, 研究椭圆外无穷扇形区域上边值问题的自然边界元法, 既可直接拓广自然边界元方法的应用范围, 也可数值求解某些具有凹角长条型内边界的外问题提供一种新的有效途径.

本文以调和方程两类边值问题为例, 研究椭圆外无穷扇形区域上边值问题的自然边界元法. 设 Ω 为椭圆外无穷扇形区域(如图 1 所示). 区域的边界为互不重叠的三部分 Γ 、 Γ_0 和 Γ_α , Γ 为椭圆弧, 而 Γ_0 和 Γ_α 为两条射线, Γ_0 逆时针转到 Γ_α 的角度为 α , $0 < \alpha \leq 2\pi$. 在 Γ 上给定 Neumann 边值条件, Γ_0 和 Γ_α 上给定 Dirichlet 边值条件或 Neumann 边值条件. 问题的描述如下:

$$\Delta u = 0 \quad \Omega \text{ 内}, \quad (1)$$

收稿日期: 2008-07-01

基金项目: 国家自然科学基金(10871100)资助项目.

通讯联系人: 杜其奎, 教授, 研究方向: 微分方程数值解. E-mail: duqkui@njnu.edu.cn

$$u(\mu, 0) = 0 \quad \Gamma_0 \text{ 上}, \quad (2)$$

$$u(\mu, \alpha) = 0 \quad \Gamma_\alpha \text{ 上}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mu_0, \varphi) = g_0(\mu_0, \varphi), \quad \Gamma \text{ 上}, \quad (4)$$

无穷远处恰当的边界条件,

$$\Delta u = 0 \quad \Omega \text{ 内}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mu, 0) = 0 \quad \Gamma_0 \text{ 上}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mu, \alpha) = 0 \quad \Gamma_\alpha \text{ 上}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mu_0, \varphi) = g_n(\mu_0, \varphi), \quad \Gamma \text{ 上}, \quad (8)$$

无穷远处恰当的边界条件,

其中 $g_n(\mu_0, \varphi)$ 满足相容性条件 $\int_0^\alpha g_n(\mu_0, \varphi) d\varphi = 0$

本文主要研究上述问题的自然边界归化及其自然边界元法. 首先给出自然积分方程和 Poisson 积分公式, 其次考虑自然积分方程的数值解法, 同时也给出了近似解的误差估计, 最后给出了一些数值例子, 以示方法的可行性与有效性.

1 自然边界归化

为研究问题的需要, 引入椭圆坐标 (μ, φ) , 它与直角坐标 (x, y) 有如下关系:

$$x = f_0 \cosh \mu \cos \varphi, \quad y = f_0 \sinh \mu \sin \varphi, \quad (9)$$

其中 f_0 为正常数. 当 μ 取不同的正常数时, (9) 描述了平面上的一族共焦椭圆, 它们的公共焦点是 $(\pm f_0, 0)$.

定理 1^[8] 变换 (9) 有下列性质:

① 变换 (9) 的 Jacobian 行列式为

$$J(\mu, \varphi) = f_0^2 \cosh^2 \mu \sin^2 \varphi + f_0^2 \sinh^2 \mu \cos^2 \varphi = f_0^2 (\cosh^2 \mu - \cos^2 \varphi), \quad (10)$$

$J(\mu, \varphi) = 0$ 当且仅当 $(x, y) = (\pm f_0, 0)$;

② 对 $u \in C^2(\mathbf{R}^2)$, 成立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = J(\mu, \varphi) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]; \quad (11)$$

③ 设 $\Gamma_{\mu_0} = \{(\mu, \varphi) \mid \mu = \mu_0\}$ 为椭圆外区域 $\Omega_{\mu_0} = \{(\mu, \varphi) \mid \mu > \mu_0\}$ 的内边界, \mathbf{n} 为 Γ_{μ_0} 上的单位外法向量, 则

$$\frac{\partial u}{\partial n} = - \frac{1}{\sqrt{J(\mu_0, \varphi)}} \frac{\partial u}{\partial \mu} \quad (12)$$

1.1 问题 (1) ~ (4) 的自然边界归化

区域 Ω 边界 Γ , Γ_0 和 Γ_α 描述如下: $\Omega = \{(\mu, \varphi) \mid \mu > \mu_0, 0 < \varphi < \alpha\}$, $\Gamma = \{(\mu_0, \varphi) \mid 0 < \varphi < \alpha\}$, $\Gamma_0 = \{(\mu, 0) \mid \mu > \mu_0\}$, $\Gamma_\alpha = \{(\mu, \alpha) \mid \mu > \mu_0\}$. 易知问题 (1) ~ (4) 的解具有如下形式:

$$u(\mu, \varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-\frac{n\pi\mu}{\alpha}} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha}, \quad \mu > \mu_0. \quad (13)$$

由

$$u_0(\mu_0, \varphi) = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0^+} u(\mu, \varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-\frac{n\pi\mu_0}{\alpha}} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha}, \quad (14)$$

可得

$$A_n = \frac{2}{\alpha} e^{\frac{n\pi\mu_0}{\alpha}} \int_0^\alpha u_0(\mu_0, \varphi) \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

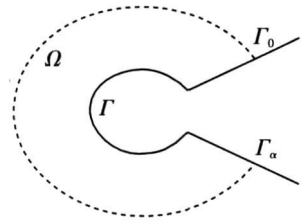


图 1 区域的描述

Fig.1 Illustration of region

所以

$$u(\mu, \varphi) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{n\pi(\mu_0 - \mu)}{\alpha}} \int_{\mu_0}^{\mu} u_0(\mu_0, \varphi') \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \sin \frac{n\pi\varphi'}{\alpha} d\varphi' \equiv Pu_0(\mu_0, \varphi), \quad \mu > \mu_0.$$

(16)

将上式两端对 μ 求导数, 并取 $\mu \rightarrow \mu_0^+$ 极限可得:

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} = -\frac{2\pi}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \int_{\mu_0}^{\mu} u_0(\mu_0, \varphi') \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \sin \frac{n\pi\varphi'}{\alpha} d\varphi'.$$

(17)

利用 (12) 即得

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{2\pi}{\alpha^2 \sqrt{J(\mu_0, \varphi)}} \sum_{n=1}^{+\infty} n \int_{\mu_0}^{\mu} u_0(\mu_0, \varphi') \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \sin \frac{n\pi\varphi'}{\alpha} d\varphi' \equiv Ku_0(\mu_0, \varphi).$$

(18)

(16) 通常称为 Poisson 积分公式, 而 (18) 则称为自然积分方程

记

$$D(u_0, v_0) = \langle Ku_0(\mu_0, \varphi), v_0 \rangle_{\Gamma} \equiv \int_{\Gamma} u_0(\mu_0, \varphi) v_0 ds =$$
$$\frac{2\pi}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \int \int_{\Gamma} u_0(\mu_0, \varphi') v_0(\mu_0, \varphi) \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \sin \frac{n\pi\varphi'}{\alpha} d\varphi' d\varphi,$$

(19)

$$F(v_0) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v_0(\mu_0, \varphi) ds \equiv \int_{\Gamma} \sqrt{J(\mu_0, \varphi)} g_0(\mu_0, \varphi) v_0(\mu_0, \varphi) d\varphi,$$

(20)

所以, 由 (18) 可得相应的变分问题: 求 $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, 使得

$$D(u_0, v_0) = F(v_0), \quad \forall v_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

(21)

参照 [9], 我们有如下引理.

引理 1 如果 $u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \cdot \left(e^{\frac{n\pi\varphi}{\alpha}} - e^{-\frac{n\pi\varphi}{\alpha}} \right), v = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n \cdot \left(e^{\frac{n\pi\varphi}{\alpha}} - e^{-\frac{n\pi\varphi}{\alpha}} \right)$, 则

$$u^* v = \int_{\Gamma} u(\mu_0, \varphi - \varphi') v(\mu_0, \varphi') d\varphi' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (2\alpha u_n v_n) \cdot \left(e^{\frac{n\pi\varphi}{\alpha}} - e^{-\frac{n\pi\varphi}{\alpha}} \right).$$

由引理 1 我们可以得到

$$Ku_0(\mu_0, \varphi) = \frac{\pi}{\alpha \sqrt{J(\mu_0, \varphi)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| u_n \cdot \left(e^{\frac{n\pi\varphi}{\alpha}} - e^{-\frac{n\pi\varphi}{\alpha}} \right),$$

(22)

$$\text{其中 } u_n = -\frac{1}{2\alpha} \int_{\Gamma} u_0(\mu_0, \varphi) \cdot \left(e^{\frac{n\pi\varphi}{\alpha}} - e^{-\frac{n\pi\varphi}{\alpha}} \right) d\varphi$$

引理 2 对 $x \in [1, +\infty)$ 及正常数 μ , 成立不等式: $\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \leq \frac{x}{\sqrt{1+\mu^2 x^2}} \leq \frac{1}{\mu}.$

证明 令 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+\mu^2 x^2}}$, 由于 $f'(x) = \frac{1}{(1+\mu^2 x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$ 即 $f(x)$ 为递增函数, 所以当 $x \geq 1$ 时,

有 $f(x) \geq f(1)$, 这就证明了结论.

定理 2 设 s 为非负实数, 自然积分算子 K 是 $H^{s+\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 上的连续线性算子, 即存在一个正常数 M_1 成立下列不等式

$$\|Kf\|_{s-\frac{1}{2}, \Gamma} \leq M_1 \|f\|_{s+\frac{1}{2}, \Gamma}, \quad \forall f \in H^{s+\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

(23)

证明 由 (22) 及上述模的定义, 我们可得对任意的 $f \in H^{s+\frac{1}{2}}(\Gamma)$, 有

$$\|Kf\|_{s-\frac{1}{2}, \Gamma}^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[1 + \left(\frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 \right]^{s-\frac{1}{2}} \left| \frac{\pi}{\alpha \sqrt{J(\mu_0, \varphi)}} |n| f_n \right|^2 =$$
$$\left(\frac{\pi}{\alpha \sqrt{J(\mu_0, \varphi)}} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[1 + \left(\frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 \right]^{s+\frac{1}{2}} |f_n|^2 \frac{n^2}{1 + \left(\frac{n\pi}{\alpha} \right)^2} \leq$$
$$\frac{1}{J(\mu_0, \varphi)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[1 + \left(\frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 \right]^{s+\frac{1}{2}} |f_n|^2 \leq M_1 \|f_n\|_{s+\frac{1}{2}, \Gamma}^2.$$

定理 3 $D(\cdot, \cdot)$ 为 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 对称、连续的双线性形式, 且为 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 正定的, 即存在正常数 M_2 和 M_3 满足

$$D(u, v) = D(v, u), \quad \forall u, v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (24)$$

$$D(u, v) \leq M_2 \|u\|_{\frac{1}{2}\Gamma} \|v\|_{\frac{1}{2}\Gamma}, \quad \forall u, v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (25)$$

$$D(u, u) \geq M_3 \|u\|_{\frac{1}{2}\Gamma}^2, \quad \forall u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (26)$$

证明 由于对任意的 $u, v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, 有

$$\begin{aligned} D(u, v) &= \langle Ku, v \rangle \equiv \int_{\Gamma} Ku v \, ds = \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha} \frac{\pi}{\alpha \sqrt{J(\mu_0, \varphi)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| u_n \left(e^{\frac{n\pi\varphi}{\alpha}} - e^{-\frac{n\pi\varphi}{\alpha}} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} v_m \left(e^{\frac{m\pi\varphi}{\alpha}} - e^{-\frac{m\pi\varphi}{\alpha}} \right) \right) \sqrt{J(\mu_0, \varphi)} \, d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{\alpha} \int_{\alpha}^{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| u_n \left(e^{\frac{n\pi\varphi}{\alpha}} - e^{-\frac{n\pi\varphi}{\alpha}} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} v_m \left(e^{\frac{m\pi\varphi}{\alpha}} - e^{-\frac{m\pi\varphi}{\alpha}} \right) \right) d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (2\alpha |n| u_n v_n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| u_n v_n, \end{aligned}$$

所以, 由上式及引理 2 和定理 2 有

$$\begin{aligned} D(u, v) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n u_n v_n = D(v, u), \\ D(u, v) &= \langle Ku, v \rangle \leq \|Ku\|_{-\frac{1}{2}\Gamma} \|v\|_{\frac{1}{2}\Gamma} \leq M_2 \|u\|_{\frac{1}{2}\Gamma} \|v\|_{\frac{1}{2}\Gamma}, \\ D(u, u) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[1 + \left(\frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} |u_n|^2 \frac{|n|}{\sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{\alpha} \right)^2}} \geq \\ &= \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \pi^2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[1 + \left(\frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} |u_n|^2 = M_3 \|u\|_{\frac{1}{2}\Gamma}^2. \end{aligned}$$

推论 1 变分问题 (21) 在 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) / P_0$ 中存在惟一解 (其中 P_0 为零次多项式).

1.2 问题 (5) ~ (8) 的自然边界归化

区域 Ω 边界 Γ 、 Γ_0 和 Γ_α 同上述 1.1 中描述, 易知问题 (5) ~ (8) 的解具有如下形式

$$u(\mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n e^{-\frac{n\pi\mu}{\alpha}} \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha}, \quad \mu > \mu_0. \quad (27)$$

由此表达式, 类似于问题 (1) ~ (4) 的方法, 对问题 (5) ~ (8) 我们很容易得到相应的 Poisson 积分公式

$$u(\mu, \varphi) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n e^{\frac{n\pi(\mu_0 - \mu)}{\alpha}} \int_{\alpha}^{\alpha} u_0(\mu_0, \varphi') \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \cos \frac{n\pi\varphi'}{\alpha} d\varphi' \equiv Pu_0(\mu_0, \varphi), \quad \mu > \mu_0, \quad (28)$$

和自然积分方程

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\pi}{\alpha^2 \sqrt{J(\mu_0, \varphi)}} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n n \int_{\alpha}^{\alpha} u_0(\mu_0, \varphi') \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \cos \frac{n\pi\varphi'}{\alpha} d\varphi' \equiv Ku_0(\mu_0, \varphi). \quad (29)$$

ε_n 的取值如下: 当 $n = 0$ 时, $\varepsilon_n = 1$; 当 $n \geq 1$ 时, $\varepsilon_n = 2$ 以下 ε_n 的取值与此相同. 记

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon_n}(u_0, v_0) &= \langle Ku_0(\mu_0, \varphi), v_0 \rangle_{\Gamma} \equiv \int_{\Gamma} u_0(\mu_0, \varphi) v_0 \, ds = \\ &= \frac{\pi}{\alpha^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \int_{\alpha}^{\alpha} \int_{\alpha}^{\alpha} u_0(\mu_0, \varphi') v_0(\mu_0, \varphi) \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \cos \frac{n\pi\varphi'}{\alpha} d\varphi' d\varphi, \end{aligned} \quad (30)$$

$$F_n(v_0) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v_0(\mu_0, \varphi) \, ds \equiv \int_{\alpha}^{\alpha} \sqrt{J(\mu_0, \varphi)} g_n(\mu_0, \varphi) v_0(\mu_0, \varphi) \, d\varphi. \quad (31)$$

所以, 由 (29) 可得相应的变分问题: 求 $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, 使得

$$D_{\varepsilon_n}(u_0, v_0) = F_n(v_0), \quad \forall v_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (32)$$

对由 (29) 确定的自然积分算子, 由 (30) 确定的双线性形式 $D_{\varepsilon_n}(u_0, v_0)$ 及变分问题 (32), 有类似于

前述定理 2 定理 3 及推论 1 的结果, 所不同的是此时 $D_{\varepsilon_n}(u, u) \geq 0$ 在此就不再赘述.

2 有限元离散化

设 S^h 为 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 的有限元子空间, 则 (21) 对应的离散化问题为: 求 $u_0^h \in S^h$, 使得

$$D(u_0^h, v_0^h) = F(v_0^h), \quad \forall v_0^h \in S^h. \tag{33}$$

(32) 对应的离散化问题为: 求 $u_0^h \in S^h$, 使得

$$D_{\varepsilon_n}(u_0^h, v_0^h) = F_n(v_0^h), \quad \forall v_0^h \in S^h. \tag{34}$$

我们仅考虑线性边界元情形. 现将边界 Γ 均匀剖分为 N 份, 记 $h = \frac{\alpha}{N}$, 则分点为 $\varphi_i = ih \equiv i\frac{\alpha}{N}, i = 0, 1, 2, \dots, N$, 取 $L_i(\varphi)$ 为边界 Γ 上的分段线性基函数系. 易知 $S^h = \{L_i(\varphi)\}_{i=0}^N \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. 对问题 (33), 令

$$u_0^h(\mu_0, \varphi) = \sum_{i=1}^{N-1} U_i \cdot L_i(\varphi), \tag{35}$$

将其代入 (33) 中, 易得 (33) 的离散化线性代数方程组

$$QU = b, \tag{36}$$

其中

$$\begin{aligned} Q &= (q_{ij})_{(N-1) \times (N-1)}, \quad q_{ij} = D(L_i(\varphi), L_j(\varphi)), \\ U &= (U_1, U_2, \dots, U_{N-1})^T, \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_{N-1})^T, \\ b_i &= \int_0^\alpha \sqrt{J(\mu_0, \varphi)} g_0(\mu_0, \varphi) L_i(\varphi) d\varphi, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ q_{ij} &= q_{ji} = a_{|i-j|} - a_{i+j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1, \\ a_k &= \frac{16V^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \sin^4\left(\frac{n\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{n}{N}k\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, 2N-2 \end{aligned} \tag{37}$$
$$\tag{38}$$

对问题 (34), 令

$$u_0^h(\mu_0, \varphi) = \sum_{i=0}^N U_i \cdot L_i(\varphi), \tag{39}$$

将其代入 (34) 中, 易得 (34) 的离散化的线性代数方程组

$$QU = b, \tag{40}$$

其中

$$\begin{aligned} Q &= (q_{ij})_{(N+1) \times (N+1)}, \quad q_{ij} = D_{\varepsilon_n}(L_i(\varphi), L_j(\varphi)), \\ U &= (U_0, U_1, \dots, U_N)^T, \quad b = (b_0, b_1, \dots, b_N)^T, \\ b_i &= \int_0^\alpha \sqrt{J(\mu_0, \varphi)} g_n(\mu_0, \varphi) L_i(\varphi) d\varphi, \quad i = 0, 1, \dots, N, \\ q_{00} &= q_{NN} = \frac{1}{2}a_0, \quad q_{0N} = q_{N0} = \frac{1}{2}a_N, \\ q_{01} &= q_{0i} = a_1, \quad q_{N1} = q_{Ni} = a_{N-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ q_{ij} &= q_{ji} = a_{|i-j|} + a_{i+j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \tag{41}$$
$$\tag{42}$$
$$\tag{43}$$

这里 $a_k, k = 0, 1, \dots, 2N-2$ 仍由 (38) 给出. 为保证解的惟一性, 还应附加条件, 例如在后面的算例中, 取 $U_{\frac{N}{2}} = 0$

需要特别指出的是, 自然边界元的刚度矩阵计算公式 (37), (38), (41) ~ (43) 与凹角扇形外区域上调和方程问题的相应计算公式完全相同^[2,9], 这表明用自然边界元法求解椭圆外无穷扇形区域上调和方程问题的自然积分方程, 其计算量与用自然边界元法求解凹角扇形外区域上调和方程问题的自然积分方程的计算量是一样的.

3 收敛性及解的先验误差估计

设 u_0 为自然积分方程 (18) 或 (29) 的解, u_0^h 为相应的自然边界元解, h 如第 2 节中所述含义.

$\|\cdot\|_D = \sqrt{D(\cdot, \cdot)}$, Γ 为 Ω 的边界的椭圆弧部分. 本节将给出关于自然边界元解的收敛性及在边界上的先验误差估计.

对于椭圆边值问题的自然边界元, 文献 [2] 已在统一的数学框架下给出了关于自然边界元解的收敛性及其在边界上的误差估计的若干结果, 由于这些结果的得出是不依赖于自然积分算子的具体形式, 所以在此可直接给出本文中的一些相应的结论.

定理 4 自然边界元解 u_0^h 按能量模收敛于准确解 u_0 , 即

$$\lim_h \|u_0 - u_0^h\|_D = 0 \tag{44}$$

定理 5 若 $u_0 \in H^2(\Gamma)$, 则自然积分方程 (18) 或 (29) 的分段线性边界元解 u_0^h 有如下先验误差估计

$$\|u_0 - u_0^h\|_D \leq Ch^{\frac{3}{2}} \|u_0\|_{2,\Gamma}, \quad (\text{能量模估计}) \tag{45}$$

$$\|u_0 - u_0^h\|_{L^2(\Gamma)} \leq Ch^2 \|u_0\|_{2,\Gamma}, \quad (L^2 - \text{模估计}) \tag{46}$$

$$\|u_0 - u_0^h\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq Ch^{\frac{3}{2}} \|u_0\|_{2,\Gamma}, \quad (\text{连续模估计}) \tag{47}$$

其中 C 为与 u_0, h, α 及 μ_0 均无关的常数, (46) 与 (47) 两式仅对满足 $\int_{\Gamma} [u_0(\mu_0, \varphi) - u_0^h(\mu_0, \varphi)] d\varphi = 0$ 的 u_0 成立.

4 数值例子

本节仅用前述的自然边界元法求 $u_0(\mu_0, \varphi)$ 的近似值 $u_0^h(\mu_0, \varphi)$. 实际上, 在求得 $u_0^h(\mu_0, \varphi)$ 后, 可以直接利用相应的 Poisson 积分公式求出区域 Ω 内部的解函数值 $u^h(\mu, \varphi)$, 在此从略. 在实际计算刚度矩阵时, 由于其元素是由无穷级数形式给出, 故用 $\sum_{n=1}^M$ 替代公式中的 $\sum_{n=1}^{+\infty}$, 即用有限项来截断取值. 对问题 (5) ~ (8), 为保证解的惟一性, 应附加条件. 在例 2 中取 $U_{\frac{N}{2}} = 0$

例 1 求解问题 (1) ~ (4), 其中 $f_0 = 2, \mu_0 = 1, \alpha = 2\pi$ 取

$$g_0(\mu_0, \varphi) = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2f_0 \left(\cosh \frac{\mu_0}{2} + \sinh \frac{\mu_0}{2} \right) \sqrt{\cosh 2\mu_0 - \cos 2\varphi}}}$$

则对应问题的精确解为 $u(\mu, \varphi) = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cosh \frac{\mu}{2} + \sinh \frac{\mu}{2}}$. 计算结果见表 1 所示.

表 1 不同剖分时数值结果的两种范数下的误差比较

Table 1 Comparison of errors using two norms for difference partitions

N	M	$\ u_0 - u_0^h\ _{L^2(\Gamma)}$	Ratio(L^2)	$\ u_0 - u_0^h\ _{L^\infty(\Gamma)}$	Ratio(L^∞)
8	10	1.392 27E- 2		7.855 02E- 3	
16	20	3.460 54E- 3	4.023	1.952 40E- 3	4.023
32	40	8.638 84E- 4	4.006	4.873 94E- 4	4.006
64	80	2.158 93E- 4	4.001	1.218 05E- 4	4.001
128	160	5.396 84E- 5	4.000	3.044 84E- 5	4.000
256	320	1.349 18E- 5	4.000	7.611 93E- 6	4.000
512	640	3.372 93E- 6	4.000	1.902 97E- 6	4.000
1 024	1 280	8.432 55E- 7	4.000	4.757 56E- 7	4.000

例 2 求解问题 (5) ~ (8), 其中 $f_0 = 2, \mu_0 = 1, \alpha = \frac{5\pi}{4}$. 取

$$g_n(\mu_0, \varphi) = \frac{4\sqrt{2} \cos \frac{4\varphi}{5}}{5f_0 \left(\cosh \frac{4\mu_0}{5} + \sinh \frac{4\mu_0}{5} \right) \sqrt{\cosh 2\mu_0 - \cos 2\varphi}}$$

则对应问题的精确解为 $u(\frac{4\mu}{5}, \varphi) = \frac{\cos \frac{4\varphi}{5}}{\cosh \frac{4\mu}{5} + \sinh \frac{4\mu}{5}}$, 计算结果见表 2 所示.

表 2 不同剖分时数值结果的两种范数下的误差比较

Table 2 Comparison of errors using two norms for difference partitions

<i>N</i>	<i>M</i>	$\ u_0 - u_0^h\ _{L^2(\Gamma)}$	Ratio(L^2)	$\ u_0 - u_0^h\ _{L^\infty(\Gamma)}$	Ratio(L^∞)
8	10	9.116 52E- 3		5.819 14E- 3	
16	20	2.149 67E- 3	4.241	1.446 37E- 3	4.023
32	40	5.215 21E- 4	4.122	3.610 71E- 4	4.006
64	80	1.284 02E- 4	4.062	9.023 51E- 5	4.001
128	160	3.185 35E- 5	4.031	2.255 67E- 5	4.000
256	320	7.932 52E- 6	4.016	5.639 06E- 6	4.000
512	640	1.979 27E- 6	4.009	1.409 76E- 6	4.000
1 024	1 280	4.943 45E- 7	4.004	3.524 62E- 7	4.000

从上述两例的数值结果可以看出, L^2 和 L^∞ 误差均为 $O(h^2)$ 阶, L^2 误差与理论结果相吻合, 而 L^∞ 误差优于理论估计.

[参考文献]

[1] 杜其奎, 余德浩. 凹角型区域椭圆边值问题的自然边界归化 [J]. 计算数学, 2003, 25(1): 85-98
[2] 冯康. 论微分与积分方程及有限元与无限元 [J]. 计算数学, 1980, 2(1): 100-105
[3] 邬吉明, 余德浩. 椭圆外区域上的自然边界元法 [J]. 计算数学, 2000, 22(3): 355-368
[4] 余德浩. 断裂及凹角扇型域上调和正则积分方程及数值解法 [J]. 数值计算与计算机应用, 1983, 4(3): 188-193
[5] 余德浩. 自然边界元方法的数学理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1993
[6] 余德浩, 贾祖朋. 椭圆边界上的自然积分算子及各向异性外问题的耦合算法 [J]. 计算数学, 2002, 24(3): 375-384
[7] Feng Kang. Finite element method and natural boundary reduction [C] // Proceedings of International Congress of Mathematicians. Warszawa: Polish Academy Press, 1983. 1 439-1 453.
[8] 张敏, 杜其奎. 椭圆外区域上 Helmholtz 问题的自然边界元法 [J]. 计算数学, 2008, 30(1): 75-88
[9] Ben-Poart G, Givoli D. Solution of unbounded domain problems using elliptic artificial boundaries [J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1995, 11(9): 735-741.

[责任编辑: 丁 蓉]