第 32卷第 2期 2009年 6月
南京师大学报(自然科学版)
JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition)
Vol. 32 No. 2 Jun, 2009

# 带有不定阻尼的一维非线性波动方程的指数衰减性

杨 芳, 高洪俊

(南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 研究了在有界区间 $(0,L)$ 上一维非线性波动方程的渐进性, 当阻尼函数 $a(x)$ 在有界区间 $(0,L)\subset \mathbf{R}^1$ 上可以变号并且满足 $\bar{a}=\frac{1}{L}\int_0^L a(x)\,dx>0$时, 证明了方程在以下两种情况下能够指数衰减: (i) $a\in L^\infty$ 并且非线性函数 $f$ 满足整体 Lipschitz连续; (ii) $\|a-\bar{a}\|_{L^\infty}$充分小, 以及函数 $f$ 满足增长性条件.

[关键词] 波动方程, 不定阻尼, 指数衰减
[中图分类号] O175.29 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009)02-0017-05

## Exponential Decay of 1D Nonlinear Wave Equation With Indefinite Damping

Yang Fang, Gao Hongjun

(School of Mathematical Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

**Abstract**: Asymptotic behavior for one dimensional nonlinear wave equation in $(0, L)$ is studied, when damping function $a(x)$ which is defined in $(0,L)\subset \mathbf{R}^1$, could change sign and satisfy $\bar{a}=\frac{1}{L}\int_0^L a(x)\,dx>0$, we prove the exponential decay for the solution in the following two cases: (i) $a\in L^\infty$ and $f$ satisfy global Lipschitz condition; (ii) $\|a-\bar{a}\|_{L^\infty}$ is small enough and $f$ satisfy some growth condition.

**Key words**: wave equation, indefinite damping, exponential decay

本文研究带有不定阻尼的一维非线性波动方程的指数衰减性:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+a(x)u_t+f(u)=0, & \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\ u(t=0)=u_0,\ u_t(t=0)=u_1, & \text{in } \Omega,\\ u(\cdot,0)=u(\cdot,L)=0, & \text{in } (0,\infty). \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega=(0,L)\in\mathbf{R}^1$, 固定 $L>0$ 并且 $u$是关于变量为 $t, x$的函数, 即 $u=u(t,x)$. 假设 $a\in L^\infty(0,L)$且 $a(x)$ 在 $(0,L)$处可以任意变号, 但是必须满足

$$\bar{a}=\frac{1}{L}\int_0^L a(x)\,dx>0, \tag{2}$$

并且 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$是 一个 $C^1$函数.

对于方程(1)相关的线性系统:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+a(x)u_t=0, & \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\ u(t=0)=u_0,\ u_t(t=0)=u_1, & \text{in } \Omega,\\ u(\cdot,0)=u(\cdot,L)=0, & \text{in } (0,\infty). \end{cases} \tag{3}$$

我们的主要目的是证明方程(1)具有指数衰减性. 近几年, 对于系统(3)中的阻尼函数 $a(x)$是正常数($a>0$)的情况已有许多结论[1-4]. 但是, 现在我们主要研究阻尼函数 $a(x)$在某一区间上可以任意变号的并且满足 $a(x)$的平均数是正数的条件下, 方程是否依然存在指数衰减这一性质? 众所周知, 对于这样的问

收稿日期: 2008-09-02
基金项目: 国家自然科学基金(10871097)资助项目.
通讯联系人: 高洪俊, 教授, 研究方向: 偏微分方程. E-mail: gaohj@njnu.edu.cn

题,早在文献[5]中作者就已经涉及到了.

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+d(x)u_t=0, & \text{in } (0,1)\times(0,\infty),\\ u(t=0)=u_0,\ u_t(t=0)=u_1, & \text{in } (0,1),\\ u(\cdot,0)=u(\cdot,1)=0, & \text{in } (0,\infty). \end{cases} \tag{4}$$

在文献[4]中,作者猜想出系统(4)的能量

$$E(t)=\int_0^1 (u_t^2+u_x^2)(t,x)\,dx \tag{5}$$

如果满足

$$\exists\,\gamma,\quad \int_0^1 d(x)\sin^2(n\pi x)\,dx\geqslant\gamma>0,\quad n=1,2,\cdots, \tag{6}$$

就能够指数衰减. 但是在文献[6]中作者指出当 $\|d\|_{L^\infty}$ 足够大时,(6)就不能够保证(4)指数衰减. 因此,Freitas and Zuazua[7] 研究了带有小参数 $\varepsilon$ 的方程:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+\varepsilon d(x)u_t=0, & \text{in } (0,1)\times(0,\infty),\\ u(t=0)=u_0,\ u_t(t=0)=u_1, & \text{in } (0,1),\\ u(\cdot,0)=u(\cdot,1)=0, & \text{in } (0,\infty). \end{cases} \tag{7}$$

在文献[7]中,当 $d\in BV(0,1)$ 且(6)成立,存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(d)$ 使得对所有 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$,都有系统(7)的能量指数衰减. 这一结果在文献[8]中得到了推广,并且(7)的第一个方程被换成了

$$u_{tt}-u_{xx}+\varepsilon d(x)u_t+c(x)u=0 \tag{8}$$

在文献[9]中,当不定耗散阻尼的范数充分小并且阻尼算子在特征向量的某一集合都有意义时,根据这一条件,作者又给出了抽象的处理方法. 在文献[10]中,作者研究了如下的方程:

$$\begin{cases} u_{tt}-\sigma(u_x)_x+a(x)u_t=0, & \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\ u(t=0)=u_0,\ u_t(t=0)=u_1, & \text{in } \Omega,\\ u(\cdot,0)=u(\cdot,L)=0, & \text{in } (0,\infty). \end{cases} \tag{9}$$

其中 $\Omega=(0,L)\in\mathbf{R}^1$,固定 $L>0$ 并且 $u$ 是关于变量 $t,x$ 的函数,即 $u=u(t,x)$. 假设 $a\in L^\infty(0,L)$ 且 $a(x)$ 在 $(0,L)$ 处可以任意变号,而且也要满足(2). 且假设非线性函数 $\sigma$ 满足

$$\sigma\in C^3(R),\ d_0=\sigma'(0),\ \sigma''(0)=0 \tag{10}$$

在此文献中作者主要是先将非线性系统换成线性系统来处理,通过刻画线性系统谱的性质来过渡到非线性系统,并研究了非线性系统的小解的整体存在性,通过这两个问题的处理证明了方程(9)的指数衰减性.

本文主要研究了方程(1)在下面两种情况下都能够指数衰减.

(i) $\|a\|_{L^\infty}$ 可以充分大但 $\|a-\bar{a}\|_{L^2}$ 需要充分小且非线性函数 $f$ 满足整体 Lipschitz 连续;

(ii) $\|a-\bar{a}\|_{L^\infty}$ 充分小且非线性函数 $f$ 满足一定的增长条件.

对于(i)的处理,我们利用了文献[10]中的一些结论,通过常数变易法刻画解的具体形式,通过一些估计,来证明指数衰减性. 对于(ii)的处理,要稍微复杂一些,我们通过定义李雅谱诺夫函数来证明指数衰减.

## 1 主要结论

现在我们将由方程(1)定义的初-边值问题转换为 Hilbert 空间 $X=H_0^1\times L^2$ 上的抽象问题,并赋予范数

$$\|u\|_{H_0^1(0,L)}=\|\nabla u\|_{L^2(0,L)},\ u\in H_0^1(0,L). \tag{11}$$

显然方程(1)在 Hilbert 空间 $X$ 上定义了一个 $C^0$-半群 $\{S(t),\ t>0\}$. 且 $S(t)(u_0,u_1)=(u(t),u_t(t))$,其中 $(u(t),u_t(t))$ 是以 $(u_0,u_1)\in X$ 为初值的解. 从文献[10]中,我们已经知道

$$V=(u,u_t)' \tag{12}$$

是线性系统(3)的解,且满足

$$V(t)=e^{tA}V(t=0),\ V(t=0)=V_0,\tag{13}$$

而且 $C^0-$半群 $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$满足

$$\|V(t)\|_{H^s}\leqslant M e^{-\alpha_0 t}\|V_{t=0}\|_{H^s},\tag{14}$$

其中 $s=0,1,2$且 $\alpha_0>0$代表线性方程(3)的衰减速度.

对于非线性方程(1), 令

$$V=(u,u_t)',\tag{15}$$

可以将方程(1)写成

$$V_t+\underbrace{\begin{pmatrix}0 & I\\ -\partial_{xx} & a(x)\end{pmatrix}}_{-A}V=\begin{pmatrix}0\\ -f(u)\end{pmatrix}=F(V),\tag{16}$$

$$V(t=0)=(u_0,u_1)'=V_0.\tag{17}$$

那么算子 $-A$ 生成了一个 $C^0-$半群.

下面是我们的主要结论.

**定理 1**　如果非线性函数 $f$ 满足整体 Lipschitz连续, $f(0)=0$, 即

$$\|f(u)-f(v)\|_{L^2}\leqslant L\|u-v\|_{H_0^1},\ \forall\ u,v\in H_0^1,\ L\in\left(0,\frac{\alpha_0}{M}\right),\tag{18}$$

其中 $M$ 是正常数. 那么

$$\|V(t)\|_X\leqslant e^{-(\alpha_0-LM)t}\|V_0\|_X,\ t\geqslant 0$$

证明　因为方程(1)的解的表达式

$$V(t)=e^{tA}V_0+\int_0^t e^{(t-r)A}F(V(r))\,dr,\tag{19}$$

根据文献[10], 可得到

$$\|V(t)\|_X\leqslant M e^{-\alpha_0 t}\|V_0\|_X+M\int_0^t e^{-\alpha_0(t-r)}\|F(V)\|_X\,dr\leqslant$$

$$M e^{-\alpha_0 t}\|V_0\|_X+LM\int_0^t e^{-\alpha_0(t-r)}\|V(r)\|_X\,dr.$$

利用 Gronwall—Bellmen不等式, 可得到

$$\|V(t)\|_X\leqslant e^{-(\alpha_0-LM)t}\|V_0\|_X,\quad t\geqslant 0\tag{20}$$

要使方程(1)能够指数衰减, 我们必须限制 $L$ 的范围, 即 $L\in\left(0,\frac{\alpha_0}{M}\right)$. 因此, 定理的结论成立.

## 2　f满足增长条件时的衰减估计

现在我们定义函数 $F(s)=\int_0^s f(r)\,dr$, 并且对于 $f$满足如下条件:

$$\text{(i)}\ \|f'(s)\|\leqslant C_2(1+|s|^r),\quad 0\leqslant r<\infty,\tag{21}$$

$$\text{(ii)}\ f(s)s\geqslant kF(s)>0,\quad k>0\tag{22}$$

注　通过(22), 我们可以推出算子 $f:H_0^1\to L^2$满足局部 Lipschitz连续. 因此, 我们可以推出方程(1)存在强解并且惟一.

**定理 2**　如果 $f\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$并且满足(21)～(22), 以及存在 $\varepsilon>0$, 使得 $\|a-\bar{a}\|_{L^\infty}<\varepsilon$ 那么存在两个连续函数 $M$, $\alpha:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, 使得

$$\|(u,u_t)\|_X\leqslant M(\delta)e^{-\alpha(\delta)t},\qquad \|(u_0,u_1)\|_X\leqslant\delta,\quad t\geqslant 0$$

证明　令

$$V(u,u_t)=\frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2+2\varepsilon(u,u_t)_{L^2}+\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2}^2+\int_0^L F(u)\,dx,\tag{23}$$

其中

$$0<\varepsilon<\varepsilon_0=\min\left\{\frac{\bar{a}}{12},\frac{\lambda_1}{4\bar{a}},\frac{\lambda_1^{\frac{1}{2}}}{4}\right\}.\tag{24}$$

根据 $\varepsilon$的范围,不难得出以下估计:

$$\frac{1}{4}[\|u\|_{H_0^1}^2+\|u_t\|_{L^2}^2]\leqslant\frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2+2\varepsilon(u,u_t)_{L2}+\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2}^2\leqslant\frac{3}{4}[\|u\|_{H_0^1}^2+\|u_t\|_{L^2}^2].$$

同时我们还有:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(u,u_t)=(u,u_t)_{H_0}^1+2\varepsilon(u_t,u_t)_{L2}+2\varepsilon(u,u_{tt})_{L2}+(u_t,u_{tt})_{L2}+(f(u),u_t)_{L2}. \tag{25}$$

根据(22)、(23)、(24),不难得出:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(u(t),u_t(t))=-\int^L u_{xx}u_t\,\mathrm{d}x+2\varepsilon\int^L u_t^2\,\mathrm{d}x+2\varepsilon\int^L uu_{tt}\,\mathrm{d}x+\int^L u_t u_{tt}\,\mathrm{d}x+\int^L f(u)u_t\,\mathrm{d}x=$$

$$2\varepsilon\int^L u_t^2\,\mathrm{d}x+2\varepsilon\int^L uu_{xx}\,\mathrm{d}x-2\varepsilon\int^L a(x)uu_t\,\mathrm{d}x-2\varepsilon\int^L uf(u)\,\mathrm{d}x-\int^L a(x)u_t^2\,\mathrm{d}x.$$

根据零边界条件,$\lambda_1$是算子$-\partial_{xx}$的第一个特征值.由于$f(u)u>0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(u,u_t)\leqslant-2\varepsilon\int^L u_x^2\,\mathrm{d}x-2\varepsilon\int^L a(x)uu_t\,\mathrm{d}x-\int^L a(x)u_t^2\,\mathrm{d}x+2\varepsilon\int^L u_t^2\,\mathrm{d}x\leqslant$$

$$-2\varepsilon\int^L u_x^2\,\mathrm{d}x+(2\varepsilon+\|a-\bar{a}\|_\infty)\int^L u_t^2\,\mathrm{d}x-\bar{a}\int^L u_t^2\,\mathrm{d}x\leqslant$$

$$-\frac{\bar{a}}{2}\|u_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}x-\varepsilon\|u\|_{H_0^1}^2\,\mathrm{d}x<0 \tag{26}$$

对任意 $\delta\in\mathbf{R}^+$,考虑集合

$$B=\{(u_0,u_1)\in X;\|(u_0,u_1)\|_X\leqslant\delta\},$$

存在一个连续函数 $\rho:[0,\infty)\rightarrow[0,\infty)$使得

$$\|(u,u_t)\|_X\leqslant\rho(\delta),\quad (u_0,u_1)\in B. \tag{27}$$

根据(21)~(22),我们可以得出

$$|f(u)|\leqslant c(|u|+|u|^{1+r}),\quad 0\leqslant r\leqslant\infty.$$

因此,对任意 $u\in H_0^1(0,L)$,都有

$$0\leqslant\int^L F(u)\,\mathrm{d}x\leqslant c(\|u\|_{L2}^2+\|u\|_{L2+r}^{2+r})\leqslant K\|u\|_{H_0^1}^2(1+\|u\|_{H_0^1}^r). \tag{28}$$

根据(28),又可以得到

$$\int^L F(u)\,\mathrm{d}x\leqslant K(\delta)\|u\|_{H_0^1}^2, \tag{29}$$

其中$K:[0,\infty)\rightarrow[0,\infty)$是一个连续函数.因此,

$$-\frac{\varepsilon}{2}\|u\|_{H_0^1}^2\leqslant-\frac{\varepsilon}{2K(\delta)}\int^L F(u)\,\mathrm{d}x. \tag{30}$$

将(30)代入(26)中,可推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(u(t),u_t(t))\leqslant-\frac{\bar{a}}{2}\|u_t\|_{L^2}^2-\frac{\varepsilon}{2}\|u\|_{H_0^1}^2-\frac{\varepsilon}{2K(\delta)}\int^L F(u)\,\mathrm{d}x \tag{31}$$

因此,存在一个连续函数 $\alpha:[0,\infty)\rightarrow[0,\infty)$,使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(u(t),u_t(t))\leqslant-\alpha(\delta)V(u(t),u_t(t)),\quad (u(0),u_t(0))=(u_0,u_1). \tag{32}$$

从而得出

$$V(u(t),u_t(t))\leqslant V(u_0,u_1)\mathrm{e}^{-\alpha(\delta)t},\quad \|(u_0,u_1)\|_X\leqslant\delta \tag{33}$$

根据(23)、(25)、(29)、(33),存在两个连续正函数$M$,$\alpha$,使得

$$\|(u,u_t)\|_X\leqslant M(\delta)\mathrm{e}^{-\alpha(\delta)t},\quad t\geqslant 0 \tag{34}$$

因此,定理结论成立.

## [参考文献]


[1] Cox S J, Overton M L. Perturbing the critically damped wave equation[J]. SIAM J Appl Math, 1996, 56(5): 1353-1362.

[2] Nakao M. Global existence of smooth solutions to the initial-boundary value problem for the quasi-linear wave equation with a localized degenerate dissipation[J]. Nonlinear Anal-TMA, 2000, 39(2): 187-205.

[3] Zuazua E. Energy decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping[J]. Communication PDE, 1990(15): 205-235.

[4] Ferreira J D S. Exponential decay of the energy of a nonlinear system of Klein Gordon equations with localized dampings in bounded and unbounded domains[J]. Asymptotic Anal, 1994, 8(1): 73-92.

[5] Chen G, Fulling A, Narcowich F J, et al. Exponential decay of energy of evolution equations with locally distributed damping[J]. SIAM J Appl Math, 1991, 51(1): 266-301.

[6] Freitas P. On some eigenvalues problems related to the wave equations with indefinite damping[J]. J Differential Equations, 1996, 127(1): 320-335.

[7] Freitas P, Zuazua E. Stability results for the wave equation with indefinite damping[J]. J Differential Equations, 1996, 132(2): 338-352.

[8] Benaddi A, Rao B. Energy decay rate of wave equations with indefinite damping[J]. J Differential Equations, 2000, 161(2): 337-357.

[9] Liu K, Liu Z, Rao B. Exponential stability of an abstract non-dissipative damping[J]. SIAM J Control Optim, 2001, 40(1): 149-165.

[10] Racke J E, Muñoz Rivera. Exponential stability for wave equations with non-dissipative damping[J]. Nonlinear Analysis-TMA, 2008, 68(9): 2531-2551.


[责任编辑: 丁　蓉]