正规变化尾分布下破产概率的二阶展开式

苏慧琳[1], 王晓谦[2], 何　雷[3]

(1.解放军理工大学理学院, 江苏 南京 211101)
(2.南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210097)
(3.解放军理工大学工程兵工程学院, 江苏 南京 210007)

[摘要]　考虑在经典风险模型中, 假设索赔分布函数尾部是正规变化函数, 首先求出正规变化函数 n重卷积尾部的二阶展开式, 再利用著名的 Beekman卷积公式, 得到破产概率的二阶展开式. 从而使保险公司更清楚地了解自己的偿付能力.

[关键词]　经典风险模型, 破产概率, 平衡分布函数, 正规变化函数, n重卷积
[中图分类号] O211.6　[文献标识码] A　[文章编号] 1001-4616(2009)02-0036-05

Second-Expansion of Ruin Probability With Regular Function Tails

Su Huilin[1], Wang Xiaoqian[2], He Lei[3]

(1. Institute of Science, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China)
(2. School of Mathematical Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)
(3. Engineering Institute of Corps of Engineers, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, China)

Abstract: In this paper, we consider the classical risk model. Assuming that the tail of claim-size is regular variation. First we get second-expansion of the n-fold convolution tails of regularly varying function, then using famous Beekman's formula, we get the second-expansion of ruin probabilities, so the insurance company can know own compensation ability well.

Key words: classical risk model, ruin probability, integrated distribution function, regularly varying function, n-fold convolution

本文考虑的经典风险模型具有如下结构:

(1) 索赔过程 $\{X_i, i \geqslant 1\}$, 其中 $X_i > 0$, 且具有共同的非格点分布函数 F, 均值 $\mu = EX < \infty$, 方差 $\sigma^2 = \mathrm{var}(X) < \infty$.

(2) 在时间区间 $[0, t]$ 中的索赔次数 $N(t)$ 是一个与 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 独立的强度为 λ的齐次 Poisson过程.

(3) 设保费率为 $c > 0$, 风险过程定义为 $\{U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, t \geqslant 0\}$, 其中 u 为保险公司的初始资金.

记 $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, 表示至时刻 t为止的索赔总额.

由模型的独立性假定知:

$$E[S(t)] = E[N(t)] \cdot E[X_1] = \lambda\mu t,$$

所以

$$E[U(t)] = u + ct - \lambda\mu t$$

收稿日期: 2008-09-22
基金项目: 江苏省普通高校自然科学研究计划(2007101TSJ0084)资助项目.
通讯联系人: 苏慧琳, 助教, 研究方向: 风险理论和极值理论. E-mail: txhlsu@163.com

保险公司为运作上的安全, 要求 $c > \lambda\mu$, 一般取 $c = (1+\rho)\lambda\mu$, 即要求相对安全负荷条件 $\rho = \frac{c-\lambda\mu}{\lambda\mu} > 0$.

破产概率可以通过风险过程 $U(t)$ 定义为:

$$\Psi(u) = P(u + ct - S(t) < 0, \exists\, t \geqslant 0).$$

与这一领域的许多研究文献一样, 我们的兴趣主要集中在重尾索赔上, 假设 $F(x)$ 是正规变化函数.

定义　若定义在 $(0, \infty)$ 上的正值函数 F 对任给的 $x > 0$ 有,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{F(tx)}{F(t)} = x^{-\gamma},\ \forall x > 0, \tag{1}$$

则称 F 为正规变化函数, 记 $F \in Rv(-\gamma)$.

从 (1) 式知[1], $P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > x\right) \sim P(\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i > x),\ x \to \infty$.

由文献 [2] 知:

$$\Psi(u) = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n} F_I^{n*}(u),$$

其中 $F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x F(y)\,\mathrm{d}y\ (x \geqslant 0)$ 称为分布 F 的平衡分布函数.

$$\Psi(u) = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\,\overline{F_I^{n*}}(u). \tag{2}$$

定理　若 F_I 是正规变化函数, 则 $\Psi(u) \sim \frac{1}{\rho}\overline{F_I}(u),\ u \to \infty$.

证明　见文献 [3].

1　相关引理

引理 1　假设一非负随机变量 X 具有正规变化尾部 $F \in Rv(-\gamma),\ \gamma > 0$, 则

$$\begin{cases} EX^{\beta} < \infty, & \beta < \gamma; \\ EX^{\beta} = \infty, & \beta > \gamma. \end{cases}$$

引理 2　若 $F \in Rv(-\gamma),\ \gamma > 0$ 且 $\lim_{x\to\infty}\frac{G(x)}{F(x)} = \alpha > 0$, 则 $G \in Rv(-\gamma)$.

记 $m_\varepsilon = \min_{0<u\leqslant\varepsilon}\frac{(1-u)^{-\gamma}-1}{\gamma u},\ M_\varepsilon = \max_{0<u\leqslant\varepsilon}\frac{(1-u)^{-\gamma}-1}{\gamma u}$.

因为当 $u \to 0$ 时, $(1-u)^{-\gamma} - 1 \sim \gamma u$, 所以有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} m_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon = 1.$$

设 $F(x), G(x)$ 是两个非负随机变量 X, Y 的分布函数, 记尾部

$$F(x) = 1 - F(x),\ G(x) = 1 - G(x),$$

所以

$$\overline{F * G}(x) = \iint_{u+v>x} F(\mathrm{d}u)G(\mathrm{d}v) = \int_0^x G(x-u)\,\mathrm{d}F(u) + F(x),$$

故

$$\overline{F * G}(x) - F(x) - G(x) = \int_0^x G(x-u)\,\mathrm{d}F(u) - G(x).$$

令上式中 $u = vx$, 再给定任意的 $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

$$\overline{F * G}(x) - F(x) - G(x) = \int_0^1 G(x(1-v))F(x\,\mathrm{d}v) - G(x) =$$

$$\left(\int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^{1}\right) G(x(1-u))F(x\,\mathrm{d}u) - G(x)F(x\varepsilon) -$$

$$G(x)[F(x(1-\varepsilon)) - F(x\varepsilon)] - G(x)[F(x\varepsilon) - F(x(1-\varepsilon))] - F(x)G(x) =$$

$$: I_1(x) + I_2(x) + I_3(x).$$

其中

$$I_1(x) = \int_0^{\varepsilon}[G(x(1-u)) - G(x)]F(x\mathrm{d}u), \tag{3}$$

$$I_2(x) = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}[G(x(1-u)) - G(x)]F(x\mathrm{d}u) - F(x)G(x), \tag{4}$$

$$I_3(x) = \int_{1-\varepsilon}^{1}[G(x(1-u)) - G(x)]F(x\mathrm{d}u). \tag{5}$$

又

$$I_3(x) = \int_{1-\varepsilon}^{1}[G(x(1-u)) - G(x)]F(x\mathrm{d}u) =$$

$$\iint_{0\leqslant 1-u<v\leqslant\varepsilon} F(x\mathrm{d}u)G(x\mathrm{d}v) + [F(x) - F(x(1-\varepsilon))][G(x) - G(x\varepsilon)] =$$

$$\int_0^{\varepsilon}G(x\mathrm{d}v)\int_{1-v}^{1}F(x\mathrm{d}u) + [F(x) - F(x(1-\varepsilon))][G(x) - G(x\varepsilon)] =$$

$$\int_0^{\varepsilon}[F(x(1-v)) - F(x)]G(x\mathrm{d}v) + [F(x(1-\varepsilon)) - F(x)][G(x\varepsilon) - G(x)].$$

引理 3　若 $F, G\in Rv(-\gamma)$, $\gamma>0$, 则有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{I_2(x)}{F(x)G(x)} = \gamma\cdot\left\{\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}[(1-u)^{-\gamma} - 1]u^{-\gamma-1}\mathrm{d}u\right\} - 1. \tag{6}$$

证明　$\forall\eta>0$, $\exists x_0>0$, 使得

$$\left|\frac{1}{F(x)}\cdot\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left[\frac{G(x(1-u))}{G(x)} - (1-u)^{-\gamma}\right]F(x\mathrm{d}u)\right| \leqslant \eta\cdot\frac{F(x(1-u)) - F(x\varepsilon)}{F(x)},\ \forall x\geqslant x_0.$$

因此

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{1}{F(x)}\left|\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left[\frac{G(x(1-u))}{G(x)} - (1-u)^{-\gamma}\right]F(x\mathrm{d}u)\right| \leqslant \eta\cdot[\varepsilon^{-\gamma} - (1-\varepsilon)^{-\gamma}].$$

令 $\eta\to 0$, 则有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{F(x)}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left[\frac{G(x(1-u))}{G(x)} - (1-u)^{-\gamma}\right]F(x\mathrm{d}u) = 0,\ \forall\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right).$$

由分布积分得:

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}(1-u)^{-\gamma}F(x\mathrm{d}u) = (1-u)^{-\gamma}F(xu)\Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}F(xu)\,\mathrm{d}(1-u)^{-\gamma} =$$

$$(1-\varepsilon)^{-\gamma}F(x\varepsilon) - \varepsilon^{-\gamma}F(x(1-\varepsilon)) + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}F(xu)\,\mathrm{d}(1-u)^{-\gamma}.$$

从而

$$\frac{1}{F(x)}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}[(1-u)^{-\gamma} - 1]F(x\mathrm{d}u) =$$

$$[(1-\varepsilon)^{-\gamma} - 1]\cdot\frac{F(x\varepsilon)}{F(x)} + (1-\varepsilon^{-\gamma})\cdot\frac{F(x(1-\varepsilon))}{F(x)} + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{F(xu)}{F(x)}\mathrm{d}(1-u)^{-\gamma}\to$$

$$[(1-\varepsilon)^{-\gamma} - 1]\varepsilon^{-\gamma} + (1-\varepsilon^{-\gamma})(1-\varepsilon)^{-\gamma} + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}u^{-\gamma}\mathrm{d}(1-u)^{-\gamma} =$$

$$(1-\varepsilon)^{-\gamma} - \varepsilon^{-\gamma} + \gamma\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}(1-u)^{-\gamma}u^{-\gamma-1}\mathrm{d}u =$$

$$\gamma\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}[(1-u)^{-\gamma} - 1]u^{-\gamma-1}\mathrm{d}u\quad(x\to\infty).$$

由(4)式知

$$\frac{I_2(x)}{F(x)G(x)} = \frac{1}{F(x)}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left[\frac{G(x(1-u))}{G(x)} - 1\right]F(x\mathrm{d}u) - 1 =$$

$$\frac{1}{F(x)}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left[\frac{G(x(1-u))}{G(x)} - (1-u)^{-\gamma}\right]F(x\mathrm{d}u) + \frac{1}{F(x)}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}[(1-u)^{-\gamma} - 1]F(x\mathrm{d}u) - 1\to$$

$$\gamma\int^{1-\varepsilon}[(1-u)^{-\gamma}-1]u^{-\gamma-1}\mathrm{d}u-1\quad(x\to\infty),$$

所以 (6) 式成立.

2 主要结论

定理 1 若 $F\in Rv(-\gamma)$, $\gamma>1$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{G(x)}{F(x)}=\alpha>0$, 则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F*G}(x)-F(x)-G(x)}{x^{-1}F(x)}=\gamma(\alpha EX+EY).\tag{7}$$

证明 假设有两个非负随机变量 X, Y, 且 $X\sim F$, $Y\sim G$.

因为 $F\in Rv(-\gamma)$, 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{G(x)}{F(x)}=\alpha>0$

由引理 2 知: $G\in Rv(-\gamma)$. 又 $\gamma>0$, 易知 $EX<\infty$, $EY<\infty$, $\lim xF(x)=0$, $\lim xG(x)=0$ 所以

$$[1+o(1)]m_\varepsilon\gamma\int_0^\varepsilon uF(x\mathrm{d}u)\leqslant\frac{I_1(x)}{G(x)}=\int_0^\varepsilon\left[\frac{G(x(1-u))}{G(x)}-1\right]F(x\mathrm{d}u)=$$

$$[1+o(1)]\int_0^\varepsilon[(1-u)^{-\gamma}-1]F(x\mathrm{d}u)\leqslant[1+o(1)]M_\varepsilon\gamma\int_0^\varepsilon uF(x\mathrm{d}u).$$

令 $v=xu$, 则

$$[1+o(1)]m_\varepsilon\gamma\int_0^\varepsilon vF(\mathrm{d}v)\leqslant\frac{xI_1(x)}{G(x)}\leqslant[1+o(1)]M_\varepsilon\gamma\int_0^\varepsilon vF(\mathrm{d}v).$$

令 $x\to\infty$, 则

$$m_\varepsilon\gamma EX\leqslant\lim_{x\to\infty}\inf\frac{xI_1(x)}{G(x)}\leqslant\lim_{x\to\infty}\sup\frac{xI_1(x)}{G(x)}\leqslant M_\varepsilon\gamma EX.$$

同理可知

$$m_\varepsilon\gamma EY\leqslant\lim_{x\to\infty}\inf\int_0^\varepsilon\left[\frac{F(x(1-u))}{F(x)}-1\right]G(x\mathrm{d}u)\leqslant$$

$$\lim_{x\to\infty}\sup\int_0^\varepsilon\left[\frac{F(x(1-u))}{F(x)}-1\right]G(x\mathrm{d}u)\leqslant M_\varepsilon\gamma EY,$$

因此

$$m_\varepsilon\gamma EY\leqslant\lim_{x\to\infty}\inf\frac{xI_3(x)}{F(x)}\leqslant\lim_{x\to\infty}\sup\frac{xI_3(x)}{F(x)}\leqslant M_\varepsilon\gamma EY.$$

而且由引理 3 知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xI_2(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{xI_2(x)}{F(x)G(x)}G(x)=0$$

所以

$$m_\varepsilon\gamma(\alpha EX+EY)\leqslant\lim_{x\to\infty}\inf\frac{\overline{F*G}(x)-F(x)-G(x)}{x^{-1}F(x)}\leqslant\lim_{x\to\infty}\sup\frac{\overline{F*G}(x)-F(x)-G(x)}{x^{-1}F(x)}\leqslant$$

$$M_\varepsilon\gamma(\alpha EX+EY).$$

令 $\varepsilon\to0$ 则得到 (7) 式.

推论 1 若 $F\in Rv(-\gamma)$, $\gamma>1$, 则

$$\overline{F^{n*}}(x)=nF(x)+[n(n-1)\gamma EX+o(1)]x^{-1}F(x).\tag{8}$$

证明 在 (7) 式中取 $G=F$, 此时 $\alpha=1$, $EY=EX$, 则

$$\overline{F^{2*}}(x)=2F(x)+[2\gamma EX+o(1)]x^{-1}F(x).$$

在 (7) 式中取 $G=F^{2*}$, 此时 $\alpha=2$, $EY=2EX$, 则

$$\overline{F^{3*}}(x)=F(x)+\overline{F^{2*}}(x)+[4\gamma EX+o(1)]x^{-1}F(x)=$$

$$3F(x)+[6\gamma EX+o(1)]x^{-1}F(x).$$

在 (7) 式中取 $G=F^{3*}$, 此时 $\alpha=3$, $EY=3EX$, 则

$$\overline{F^{4*}}(x) = F(x) + \overline{F^{3*}}(x) + [6\alpha EX + o(1)]x^{-1}F(x) =$$
$$4F(x) + [12\alpha EX + o(1)]x^{-1}F(x).$$

依次类推知(8)式成立.

本文考虑的风险模型假设索赔分布函数尾部 $F \in Rv(-\alpha)$, $\sigma^2 = \mathrm{var}(X) < \infty$, 则由引理1知: $\alpha > 2$, 且由Karamata Th知, $\overline{F_I} \in Rv(-\alpha + 1)$, 因此 $\alpha - 1 > 1$.

定理2　若索赔尾分布 $F \in Rv(-\alpha)$, $\sigma^2 = \mathrm{var}(X) < \infty$, 则

$$\Psi(u) = \frac{1}{\rho}\overline{F_I}(u) + \frac{1}{\mu\rho^2}\frac{\overline{F_I}(u)}{\mu}EX^2 + o(1). \tag{9}$$

证明　因为 $F \in Rv(-\alpha)$, 所以 $\overline{F_I} \in Rv(-\alpha + 1)$, $\alpha > 2$

由推论1知:

$$\overline{F_I^{n*}}(x) = n\overline{F_I}(x) + [n(n-1)\alpha EZ + o(1)]x^{-1}\overline{F_I}(x),$$

其中正随机变量 $Z \sim F_I$, 故

$$EZ = \int_0^\infty z\,\mathrm{d}F_I(z) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty z\overline{F}(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \mathrm{d}F(y)\int_0^y z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\mu}EX^2,$$

所以

$$\overline{F_I^{n*}}(u) = n\overline{F_I}(u) + \left[n(n-1)\alpha\frac{1}{2\mu}EX^2 + o(1)\right]\frac{\overline{F_I}(u)}{u}.$$

由(2)式知:

$$\Psi(u) = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\overline{F_I^{n*}}(u) =$$

$$\frac{\rho}{1+\rho}\overline{F_I}(u)\sum_{n=0}^{\infty}n(1+\rho)^{-n} + \frac{\rho}{1+\rho}\frac{\alpha EX^2\,\overline{F_I}(u)}{2\mu\cdot u}\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(1+\rho)^{-n} + o(1). \tag{10}$$

易知:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(1+\rho)^{-n} = \frac{1+\rho}{\rho^2}, \tag{11}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(1+\rho)^{-n} = \frac{2(1+\rho)}{\rho^3}. \tag{12}$$

将(11)、(12)代入(10)式中即可得(9)式.

[参考文献]

[1] Klüppelberg C. Subexponential distributions and integrated tails[J]. J Appl Probab, 1988, 25: 132-141.

[2] Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Application. Vol II[M]. New York: John Wiley & Sons, 1971.

[3] Embrechts P, Klüppelberg C, Mikosch T. Modelling Extremed Events for Insurance and Finance[M]. New York: Spring-Verlag, 1997.

[责任编辑: 丁　蓉]