

功能梯度 压电材料层合中裂纹对 SH 波的散射

陆万顺¹, 李 星²

(1 宁夏师范学院数学与计算机科学学院, 宁夏 固原 756000)

(2 宁夏大学数学计算机学院, 宁夏 银川 750021)

[摘要] 讨论了功能梯度/压电材料层合中裂纹对 SH 波的散射, 借助 Fourier 积分变换, 将所研究的问题转化成对偶积分方程, 运用 Copson 方法将对偶积分方程变为第二类 Fredholm 积分方程进行求解, 最后通过数值计算, 讨论了材料梯度参数、波数等因素对标准动应力强度因子的影响。

[关键词] 功能梯度/压电材料, 裂纹, Fourier 变换

[中图分类号] O343.7 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009-02-0055-05)

Scattering of SH Wave on Crack in Functionally Graded/Piezoelectric Layers

Lu Wanshun¹, Li Xing²

(1. Department of Mathematics and Computer Science Ningxia Normal College Guyuan 756000, China)

(2. College of Mathematics and Computer Ningxia University Yinchuan 750021, China)

Abstract Scattering of SH wave on crack in functionally graded/piezoelectric layers is discussed. Fourier transforms are used to reduce the problem to the solution of a pair of dual integral equations which are then reduced to a Fredholm integral equation of second kind by the Copson method. Finally, numerical results showed the effect of material gradient, the frequency of wave and so on upon the normalized stress intensity factor.

Key words functionally graded/piezoelectric materials, crack, Fourier transform

随着科学技术的迅猛发展, 对材料的要求越来越高, 通常的单一材料很难满足工程实际中多功能要求. 由于梯度变化的材料连接不同性质的材料就可以有效地降低材料间界面上的应力集中, 于是层合结构得到了广泛应用. 功能梯度/压电材料对弹性波的散射的研究还是处于初级阶段, 还有大量的问题需要解决, 文献 [1] 研究了正交各向异性功能梯度材料裂纹尖端的应力场, 文献 [2] 用对偶积分方程方法计算了任意几何形状二维正交各向异性功能梯度材料静态裂纹的应力强度因子. 文献 [3] 分析了正交各向异性功能梯度材料在反平面载荷剪切作用下裂纹尖端的应力场. 这些材料常常会在波动场中出现, 因此研究波和功能梯度材料中缺陷的作用就有十分重要的意义. 文献 [4] 首先研究了功能梯度压电材料条中裂纹的反平面问题. 他们发现, 功能梯度压电材料中裂纹尖端的应力和电位移与均匀压电材料中裂纹尖端的应力和电位移具有相同形式, 文献 [5] 研究了压电材料和弹性材料复合材料中裂纹对弹性波的散射. 这一点使得我们可以使用已经发展起来的相对成熟的均匀压电材料的数值方法来研究功能梯度压电材料的裂纹问题.

目前还没有对功能梯度/压电材料的层合中裂纹对 SH 波散射进行过研究, 本文通过 Fourier 积分变换把混合边值问题的求解转化为对偶积分方程, 然后利用 Copson 方法将得到的对偶积分方程转化为 Fredholm 积分方程, 利用高斯型求积公式对其进行求解. 得到了裂纹尖端的应力强度因子、电位移强度因子, 分析了不同材料梯度指数、入射角等对标准动应力强度因子的影响.

收稿日期: 2008-11-14

基金项目: 国家自然科学基金 (10661009)、宁夏自然科学基金 (NZ0604) 资助项目.

通讯联系人: 陆万顺, 助教, 研究方向: 复分析及其在力学中的应用. E-mail: lw5823@163.com

1 问题的描述及基本方程

考虑如图 1 所示的问题, 功能梯度 压电 (Functionally Graded Piezoelectric Materials 简称 FG/PM 材料层中含有一长度为 $2a$ 的裂纹, 并且 $h_1 + h_2 = 2h$. D_3 是功能梯度材料. 设裂纹面处于笛卡尔直角坐标系的 $x - y$ 平面, 极化方向沿 z 轴, 则只有反平面位移和面内电场相互耦合.

在散射场运动方程为如下形式

$$\frac{xz(k)}{x} + \frac{yz(k)}{y} = \frac{w_k^2}{t^2},$$
$$\frac{D_x(k)}{x} + \frac{D_y(k)}{y} = 0$$
$$\frac{xz}{x} + \frac{yz}{y} = e \frac{w_3^2}{t^2}.$$

(1)

在线电弹性的理论框架下, (忽略体力与自由电荷) 压电材料本构方程为

$$\varepsilon_{ij}(k) = c_{44} \frac{w_k}{i} + e_{15} \frac{k}{i}, \quad D_{i(k)} = e_{15} \frac{w_k}{i} - \varepsilon_{11} \frac{k}{i}.$$

(2)

其中 $i = x, y; k = 1, 2$ $xz(k), yz(k)$ 是压电材料中的剪切应力; w_k 压电材料中的反平面位移; $c_{44}, e_{15}, \varepsilon_{11}$ 分别称为压电材料的剪切模量、压电常数和介电常数, $D_y(k), D_x(k)$ 是平面电位移, k 是电势.

功能梯度材料的本构方程为

$$yz = c_{44e} \frac{w_3}{y}, \quad xz = c_{44e} \frac{w_3}{x}.$$

(3)

其中, xz, yz 是功能梯度材料的剪切应力. 材料常数的变化量, w_3 是功能梯度材料的反平面位移; c_{44e} 是功能梯度材料的剪切模量.

式 (2), (3) 代入式 (1) 中, 并且引进新函数

$$k(x, y) = k(x, y) - \frac{e_{150}}{\varepsilon_{110}} w_k(x, y).$$

式 (1) 可化为如下形式

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{w_k^2(x, y)}{y} + \frac{w_k(x, y)}{y} + \frac{w_k^2(x, y)}{c_{sh}} = 0 \\ & \frac{k(x, y)}{y} + \frac{k(x, y)}{y} = 0 \\ & \frac{w_3^2(x, y)}{y} + \frac{w_3(x, y)}{y} + \frac{w_3^2(x, y)}{c_{440}} = 0 \end{aligned} \right.$$

(4)

2 边界条件的提出及对偶积分方程的建立

由于裂纹面自由及材料在几何形状上关于 y 轴对称, 从而本问题的边界条件可以描述为

$$\left\{ \begin{aligned} & yz^{(1)}(x, 0) = yz^{(2)}(x, 0) = -\sigma_0 \sin \exp \left[-i \frac{x \cos}{c_{sh}} \right], \quad (0 < x < a), \\ & w_1(x, 0) = w_2(x, 0), \quad (x > a), \end{aligned} \right.$$

(5)

$$\left\{ \begin{aligned} & D_{y(1)}(x, 0) = D_{y(2)}(x, 0), \quad (0 < x < a), \\ & E_{y(1)}(x, 0) = E_{y(2)}(x, 0), \\ & \varphi_1(x, 0) = \varphi_2(x, 0), \quad (x > a), \end{aligned} \right.$$

(6)

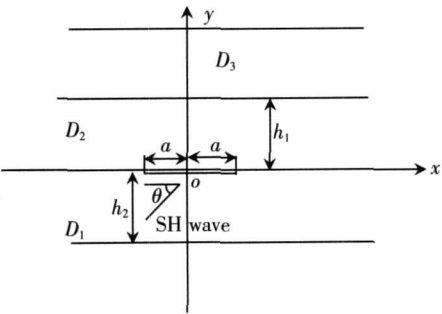


图 1 功能梯度/压电材料层中裂纹对 SH 波的散射几何模型

Fig.1 The geometrical model of scattering of SH wave on crack in functionally graded/piezoelectric layers

$$\begin{cases} y_{z(1)}(x, 0) = y_{z(2)}(x, 0), & (x > a), \\ D_{y(1)}(x, 0) = D_{y(2)}(x, 0), & (x > a), \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} y_{z(1)}(x, -h_2) = 0 \\ D_{y(1)}(x, -h_2) = 0 \\ y_{z(2)}(x, h_1) = y_{z(2)}(x, h_1), E_{y(1)}(x, -h_2) = 0 \\ w_2(x, h_1) = w_3(x, h_1), E_{y(2)}(x, h_1) = 0 \\ D_{y(2)}(x, h_1) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

为了研究问题的方便引入 Fourier 变换^[6], 则位移和电势的表达式分别为^[7]

$$\begin{cases} w_k(x, y) = \frac{2}{0} [A_{1k}(s) \exp(p_1 y) + A_{2k}(s) \exp(p_2 y)] \cos(sx) ds \\ \phi_k(x, y) = \frac{e_{150}}{110} w_k(x, y) + \frac{2}{0} [B_{1k}(s) \exp(q_1 y) + B_{2k}(s) \exp(q_2 y)] \cos(sx) ds \\ w_3(x, y) = \frac{2}{0} [C_{1k}(s) \exp(-q_2 y)] \cos(sx) ds \end{cases} \quad (9)$$

将式 (9) 代入式 (2), (3) 中得

$$\begin{cases} y_{z(k)}(x, y) = \frac{2}{0} \exp(-y) [p_1 A_{1k}(s) \exp(p_1 y) + p_2 A_{2k}(s) \exp(p_2 y)] \cos(sx) ds + \\ \quad \frac{2e_{150}}{0} \exp(-y) [q_1 B_{1k}(s) \exp(q_1 y) + q_2 B_{2k}(s) \exp(q_2 y)] \cos(sx) ds \\ D_{y(k)}(x, y) = -\frac{2}{110} \exp(-y) [q_1 B_{1k}(s) \exp(q_1 y) + q_2 B_{2k}(s) \exp(q_2 y)] \cos(sx) ds \\ y_z(x, y) = \frac{2c_{440}}{0} \exp(-(y - h_1)) [-2 C_{1k}(s) \exp(-q_2 y)] \cos(sx) ds \end{cases} \quad (10)$$

由边界条件 (6) ~ (8) 解出系数 $A_{1k}(s)$, $A_{2k}(s)$, $B_{1k}(s)$, $B_{2k}(s)$, $C_{1k}(s)$, 并由入射波对应的应力形式及边界条件 (5) 得到对偶积分方程

$$\begin{cases} \int_0^a s F(s) p(s) \cos(sx) ds = \frac{1}{2c_{440}} \sin \exp \left[-i \frac{x \cos}{c_{sh}} \right], & (0 < x < a), \\ \int_0^a p(s) \cos(sx) ds = 0 & (a < x). \end{cases} \quad (11)$$

由 Copson 方法, 可得对偶积分方程 (11) 的解为

$$p(s) = \frac{0a \sin}{2c_{440}} \int_0^1 () J_0(sa) d, \quad (12)$$

其中 $J_0(sa)$ 为第一类 Bessel 函数, 函数 $()$ 满足下列第二类 Fredholm 积分方程

$$() + \int_0^1 () K(,) d = \sqrt{J_0 \left[\frac{-a \cos}{c_{sh}} \right]},$$

其中核 $K(,)$ 满足下列方程

$$K(,) = \sqrt{ \int_0^1 \left[A \left[\frac{s}{a} \right] - 1 \right] J_0(s) J_0(s) ds }$$

3 裂纹尖端场的渐进解

将 (12) 式右边积分得

$$p(s) = \frac{a}{2c_{440}} \sin \frac{1}{s} \left\{ (1) J_1(sa) - \int_0^1 J_1(sa) \frac{d}{d} \left[\frac{-1}{c_{sh}} () \right] d \right\}, \quad (13)$$

其中 $J_1(sa)$ 是第一类一阶的 Bessel 函数.

将式 (13) 代入式 (10), 得 $y = 0$ 时的应力、电位移主部的表达式^[8], 并引入复变换^[9], 考虑裂纹尖端附近的应力、电位移在 s 处的奇异性.

$$y_{z(1)}(x, 0) = a_0 (1) \sin \left[- \frac{r \cos \left(- \frac{1}{2} i - \frac{1}{2} 2 \right)}{a \sqrt{r_1 r_2}} \right] = \frac{x_0 (1) \sin}{\sqrt{(x+a)(x-a)}}$$
$$D_{y(1)}(x, 0) = - \frac{ae_{150}}{c_{440}} (1) \sin \left[- \frac{r \cos \left(- \frac{1}{2} i - \frac{1}{2} 2 \right)}{a \sqrt{r_1 r_2}} \right] = \frac{e_{150}}{c_{440}} x_0 (1) \sin / \sqrt{(x+a)(x-a)}.$$

(14)

裂纹尖端的应力强度因子、电场强度因子表示为

$$K = \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{2(x-a)} y_{z(1)}(x, 0) \exp(-i t) = \sqrt{a} a_0 (1) \sin \exp(-i t),$$
$$K^D = \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{2(x-a)} D_{y(1)}(x, 0) \exp(-i t) = \frac{e_{150}}{c_{440}} \sqrt{a} a_0 (1) \sin \exp(-i t) = \frac{e_{150}}{c_{440}} K^T. \quad (15)$$

记标准化后的应力强度因子为

$$K_3 = | (1) \sin |.$$

4 数值算例与讨论

利用高斯型求积公式对上面的第二类 Fredholm 积分方程进行求解, 得到标准化后的应力强度因子. 下面主要分析梯度参数、带宽、拼接材料的梯度参数, 波数及入射角对标准化后的应力强度因子的影响, 假定在裂纹面 $y = 0$ 处的材料为压电陶瓷 PZT-4 裂纹长为 $a = 0.5$ 有关结果可用图 2~6 表示出来.

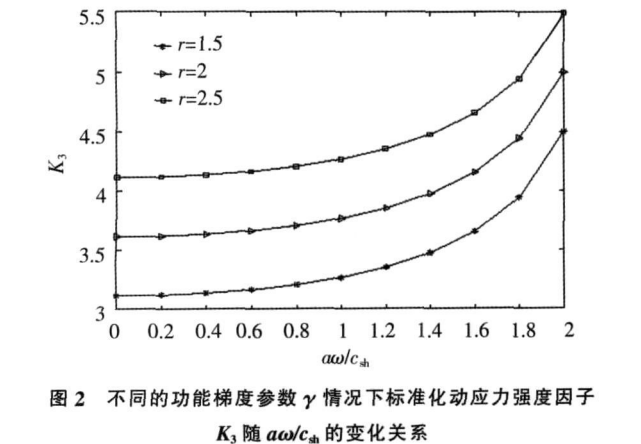


Fig.2 The changing relationship of normalized stress intensity factor K_3 with $a\omega/c_{sh}$ under different functionally gradient parameter γ

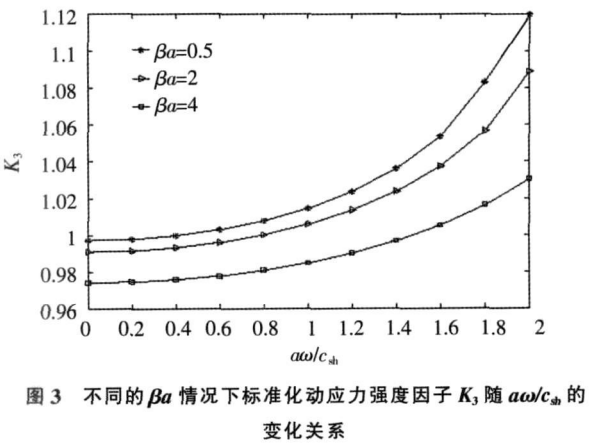


Fig.3 The changing relationship of relationship of normalized stress intensity factor K_3 with $a\omega/c_{sh}$ under different βa

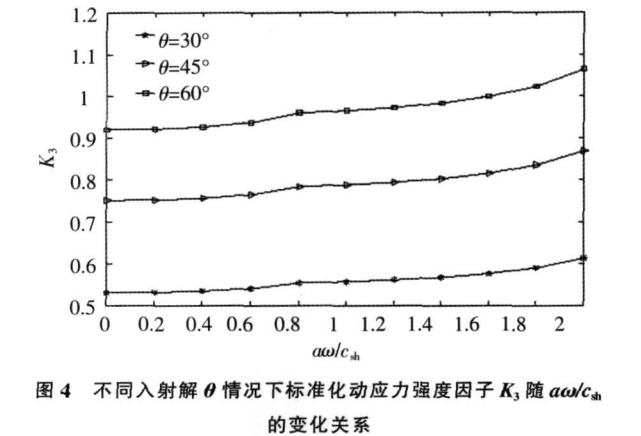


Fig.4 The changing relationship of normalized stress intensity factor K_3 with $a\omega/c_{sh}$ under different angle of incidence

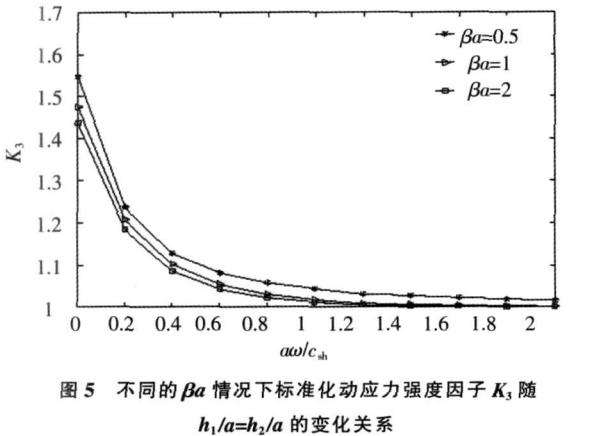


Fig.5 The changing relationship of normalized stress intensity factor K_3 with $h_1/a=h_2/a$ under different βa

图 2 给出了标准化后的动应力强度因子 K_3 与波数 a/c_{sh} 之间的关系 ($h_1/a = h_2/a = 0.5$ $a = 2.5$

以及 $\theta = \pi/4$). 从图中可以看出, 动应力强度因子随着波数增大而增大. 在 θ 相同的情况下, 动应力强度因子随着拼接的功能梯度参数增大而增大.

图 3 给出了不同梯度 α 情况下波数 a/c_{sh} 对标准化后的动应力强度因子的影响 ($h_1/a = h_2/a = 0.5$, $\theta = \pi/6$ 及 $\theta = \pi/2$). 从图中可以看到, 标准化后的动应力强度因子随着 a 的增加而增加; 在 a 一定的情况下, 标准化后的动应力强度因子随 α/c_{sh} 的增大而增大.

图 4 给出了不同入射角 θ 情况下波数 a/c_{sh} 对标准化后的动应力强度因子的影响 ($h_1/a = h_2/a = 0.5$, $\alpha = 3$, $\theta = 0.5$). 从图中可以看到, 标准化后的动应力强度因子随 θ 的增大而增大; 在 θ 一定的情况下, 标准化后的动应力强度因子随 a/c_{sh} 的增大而增大.

图 5 给出了当 $a/c_{sh} = 0.5$, $\theta = \pi/6$, $\alpha = 0.5$ 动应力强度因子随着带宽 h/a 变化的情况. 从图中可以看到, 在 a 越大, 标准化后的应力强度因子越大; 在 a 一定的情况下, 标准化后的应力强度因子随着 h_1/a 的增加而降低.

图 6 给出了当 $a/c_{sh} = 0.5$, $\theta = \pi/6$, $h_1/a = 1.5$ 以及 $\alpha = 2.0$ 时, 动应力强度因子随带宽 h/a 不同的情况下, 波数 a/c_{sh} 对标准化后的动应力强度因子的影响. 从图中可以看出, 标准化后的动应力强度因子随 h/a 的增大而减小; 在 h/a 一定的情况下, 标准化后的动应力强度因子随 a/c_{sh} 的增大而增大.

5 结论

讨论了功能梯度 / 压电材料层合中裂纹对 SH 波的散射. 随着入射角的增加, 标准化应力强度因子也逐渐增加. 功能梯度压电材料的梯度参数可以使裂纹尖端的应力集中变小, 带宽对标准应力强度因子也有影响, 适当增加带的宽度, 可以抑制标准应力强度因子的增加. 调节拼接材料梯度参数可以使裂纹尖端的应力集中变小.

[参考文献]

- [1] Parameswaran V, Shukla A. Crack-Tip stress fields of dynamic fracture in functionally graded materials[J]. Mechanic of Materials, 1999, 31(9): 579-596.
- [2] Kim JH, Paulino G H. Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 2002, 69(2): 502-514.
- [3] Kumar S, Singh R N. Crack propagation in piezoelectric materials under combined mechanical and electrical loadings[J]. Acta Materialia, 1996, 44(1): 173-200.
- [4] Soon Man Kwon. Electrical nonlinear antiplane shear crack in a functionally graded piezoelectric strip[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(21): 5649-5667.
- [5] Gu B, Yu S W, Feng X Q. Elastic wave scattering by an interface crack between a piezoelectric layer and an elastic substrate[J]. International Journal of Fracture, 2002, 116(2): L29-L34.
- [6] Wang X D. On the dynamic behavior of interacting interfacial cracks in piezoelectric media[J]. International Journal of Solid and Structures, 2001, 38(5): 815-831.
- [7] Narita F, Shindo Y. Scattering of anti-plane shear wave by a finite crack in piezoelectric laminates[J]. Acta Mechanica, 1999, 134(2): 27-43.
- [8] Bi X S, Chen J, Chen X L. Moving crack for functionally graded material in an infinite length strip under antiplane shear[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2003, 39(1): 89-97.
- [9] Won S M, Won C, South K. On the dynamic propagation of an antiplane shear crack in a functionally graded piezoelectric strip[J]. Acta Mechanica, 2004, 167(2): 73-89.

[责任编辑: 顾晓天]

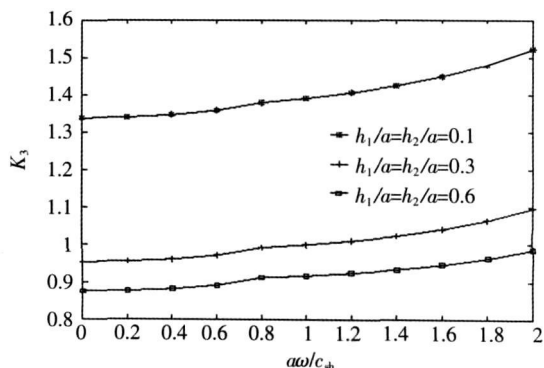


图 6 不同 $h_1/a=h_2/a$ 情况下标准化动应力强度因子 K_3 随 $a\omega/c_{sh}$ 的变化关系

Fig.6 The changing relationship of normalized stress intensity factor K_3 with $a\omega/c_{sh}$ under different $h_1/a=h_2/a$