第 32卷第 3期 南京师大学报 (自然科学版) Vol 32 No. 3
2009年 9月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition) Sep. 2009

Menger PM-空间中模糊映射的一个新的不动度定理

蒋沈庆[1,2], 方锦暄[1]

(1. 南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210046)
(2. 南通航运职业技术学院基础部, 江苏 南通 226010)

[摘要] 在 Menger PM-空间中 -压缩的条件下, 证明了一个关于模糊映射的新的公共不动度定理, 推广了 Abu-Donia新近给出的若干结果.

[关键词] Menger PM-空间, 模糊映射, -压缩, 不动度, 不动点

[中图分类号] O177.99 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009)03-0001-05

A New Common Fixed Degree Theorem for Fuzzy Mappings in Menger PM-Spaces

Jiang Shenqing[1,2], Fang Jinxuan[1]

(1. School of Mathematical Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)
(2. Basic Department, Nantong Shipping College, Nantong 226010, China)

Abstract: A new common fixed degree theorem for fuzzy mappings in Menger probabilistic metric space under -contraction condition is proved. Some recent results given by Abu-Donia are extended.

Key words: Menger PM-spaces, fuzzy mappings, -contraction, fixed degree, fixed point

最近, Abu-Donia[1]在度量空间中 -压缩条件下, 对模糊映射证明了一个公共不动点定理. 众所周知, 概率度量空间(简称 PM-空间)是度量空间的重要推广[2]. 概率度量空间中的不动点理论可以看作概率分析的重要组成部分, 是一个非常活跃的数学研究领域[3].

本文的主要目的是推广 Abu-Donia不动点定理到 Menger PM-空间. 我们在 Menger PM-空间中 -压缩的条件下, 对模糊映射建立一个新的公共不动度定理, 该定理统一并推广 Menger PM-空间、模糊度量空间和通常度量空间中的许多重要的不动点定理.

1 基本定义及引理

在本文中, 设 $I = [0, 1]$, $\mathbf{R} = (- \quad , + \quad)$, $\mathbf{R}_+ = [0, + \quad)$, 以及 $\mathbf{N}$是自然数集. 映射 $F: \mathbf{R} \quad I$称为分布函数, 如果它是不减、左连续的且 $\inf_{t \quad \mathbf{R}} F(t) = 0$, $\sup_{t \quad \mathbf{R}} F(t) = 1$. 我们用 $\mathscr{D}$表示所有分布函数的集合. $\mathscr{D}_0 = \{F \quad \mathscr{D} \mid F(0) = 0\}$. H 是一个特殊的分布函数, 定义如下:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \quad 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

我们称映射 $\quad : [0, 1] \quad [0, 1] \quad [0, 1]$ 为一个三角模 (简称 t-模), 如果它满足以下条件: $\quad (a, 1) = a$; $\quad (a, b) = \quad (b, a)$; $a \quad b, c \quad d \quad (a, c) \quad (b, d)$; $\quad (a, \quad (b, c)) = \quad (\quad (a, b), c)$.

定义 1[2,4] 设 E 是非空集, 是一个 t-模, $\mathscr{F}$是一个 $E \quad E$ 到 $\mathscr{D}_0$的映射, 记 $\mathscr{F}(x, y) = F_{x,y}$, $x, y \quad E$. 如果满足以下条件:

收稿日期: 2008-03-12
基金项目: 国家自然科学基金 (10671094)资助项目.
通讯联系人: 方锦暄, 教授, 博士生导师, 研究方向: 模糊分析学, 泛函分析. E-mail: jxfang@njnu.edu.cn

(1) $F_{x,y}(t)=H(t)$, $\forall t\in\mathbf{R}$ 当且仅当 $x=y$;

(2) $F_{x,y}(t)=F_{y,x}(t)$, $\forall t\in\mathbf{R}$;

(3) $F_{x,y}(t+s)\ge\Delta(F_{x,z}(t),F_{z,y}(s))$, $\forall x,y,z\in E$, $t,s\ge 0$

则称三元组 $(E,\mathscr{F},\Delta)$ 为 Menger概率度量空间(简称 Menger PM-空间).

Schweizer等指出: 如果 Menger PM-空间 $(E,\mathscr{F},\Delta)$ 中的 t-模 Δ 满足条件 $\sup_{0<t<1}\Delta(t,t)=1$, 则 E 上存在惟一的拓扑 τ, 使得 (E,τ) 是一个Hausdorff拓扑空间, 且集族 $\{U_p(\varepsilon,\lambda):\varepsilon>0,\lambda\in(0,1]\}(p\in E)$ 是点 p 的邻域基, 其中

$$U_p(\varepsilon,\lambda)=\{x\in E:F_{x,p}(\varepsilon)>1-\lambda\}.$$

这样的拓扑 τ 称为 $(E,\mathscr{F},\Delta)$ 的 (ε,λ)-拓扑[2,5].

依 (ε,λ)-拓扑 τ, $(E,\mathscr{F},\Delta)$ 中可以引入以下概念: E 中的一个点列 $\{x_n\}$ 称为 τ-收敛于 $x\in E$, 记为 $x_n\xrightarrow{\tau}x$, 如果 $\lim_n F_{x_n,x}(t)=1$, $\forall t>0$; $\{x_n\}$ 称为是 $(E,\mathscr{F},\Delta)$ 中的 τ-Cauchy列, 如果对任给的 $\varepsilon>0$ 和 $\lambda\in(0,1]$, 存在 $N=N(\varepsilon,\lambda)\in\mathbf{N}$ 使得当 $n,m\ge N$ 时, 有 $F_{x_n,x_m}(\varepsilon)>1-\lambda$; $(E,\mathscr{F},\Delta)$ 称为是 τ-完备的, 如果 E 中每个 τ-Cauchy列是 τ-收敛的.

以下总假设 $(E,\mathscr{F},\Delta)$ 是一个具有 (ε,λ)-拓扑 τ 的 Menger PM-空间. 我们用 I^E 表示 E 上的所有模糊集组成的集类, $CB(E)$ 表示 E 的所有非空 τ-闭子集组成的集类. 设 $A\in I^E$, $\alpha\in(0,1]$, 记 $(A)_\alpha=\{x\in E\mid A(x)\ge\alpha\}$, 称为 A 的 α-截集. 对 $A\in CB(E)$ 和 $x\in E$, 我们定义 $F_{x,A}$ 如下:

$$F_{x,A}(t)=\sup_{y\in A}F_{x,y}(t),\ t\ge 0$$

引理1[6] 设 $(E,\mathscr{F},\Delta)$ 是 Menger PM-空间, $A\subset E$. 对每个 $\lambda\in(0,1]$, 分别定义映射 $d_\lambda:E\times E\to\mathbf{R}^+$ 和 $d_\lambda(\cdot,A):E\to\mathbf{R}^+$ 如下:

$$d_\lambda(x,y)=\inf\{t>0\mid F_{x,y}(t)>1-\lambda\},\quad d_\lambda(x,A)=\inf_{y\in A}d_\lambda(x,y).$$

则 (1) $d_\lambda(x,y)<t$ 当且仅当 $F_{x,y}(t)>1-\lambda$; (2) $d_\lambda(x,A)<t$ 当且仅当 $F_{x,A}(t)>1-\lambda$.

引理2[7] 设 $\varphi:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ 是一个不减、右连续且满足: $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(t)<+\infty$, $\forall t>0$, 其中 $\varphi^n(t)$ 表示 $\varphi(t)$ 的第 n 次迭代, 则 $\varphi(t)<t$, $\forall t>0$

注1 我们将所有满足引理2中条件的函数 $\varphi:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ 所组成的集合记为 Φ.

定义2[8] 一个 t-模 Δ 称为是 h-型的, 如果函数族 $\{\Delta^m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ 在 $t=1$ 处是等度连续的, 其中

$$\Delta^1(t)=\Delta(t,t),\quad \Delta^m(t)=\Delta(t,\Delta^{m-1}(t)),m=1,2,\cdots,t\in[0,1].$$

显然, $\Delta=\min$ 是一个 h-型 t-模. [8]中还给出了 h-型 t-模的其它例子.

引理3[6] 设 $(E,\mathscr{F},\Delta)$ 是一个 Menger PM-空间, Δ 是 h-型 t-模. 如果 E 中的点列 $\{x_n\}$ 满足以下条件: 对任 $n\in\mathbf{N}$ 和 $t>0$, $F_{x_n,x_{n+1}}(\varphi^n(t)+)\ge F_{x_0,x_1}(t)$, 其中 $\varphi\in\Phi$, 则 $\{x_n\}$ 是 τ-Cauchy列.

引理4[9] 设 $(E,\mathscr{F},\Delta)$ 是一个 Menger PM-空间, Δ 是 h-型 t-模. 如果 $A\in CB(E)$ 且 $x,y\in E$, 则

(1) $F_{x,A}(t)=1$, $\forall t>0$ 当且仅当 $x\in A$;

(2) $F_{x,A}(t_1+t_2)\ge\Delta(F_{x,y}(t_1),F_{y,A}(t_2))$, $\forall t_1,t_2>0$

注2 由引理1和4, 容易看出 $x\in A$ 当且仅当对所有的 $\lambda\in(0,1]$, $d_\lambda(x,A)=0$

定义3[10] 设 T 是定义在 E 上的模糊映射, 即 $T:E\to I^E$, $\{T_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 是定义在 E 上的模糊映射列, $x_*\in E$.

(1) 我们称值 $(Tx_*)(x_*)$ 为 x_* 关于 T 的不动度, 并用符号 $D_{fix}(x_*,T)$ 来表示;

(2) 我们称值 $(\bigcap_{i=1}^{\infty}T_ix_*)(x_*)$ 为 x_* 关于 $\{T_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 的公共不动度, 并用符号 $D_{fix}(x_*,\{T_i\}_{i\in\mathbf{N}})$ 来表示.

引理5 设 $(E,\mathscr{F},\Delta)$ 是一个 Menger PM-空间, 具有左连续的 t-模 Δ, $A\in CB(E)$ 且 $x\in E$. 如果满足:

$$F_{x,A}(\varphi(\max\{p,r,s\})+)\ge\min\{F_{x,A}(r),F_{x,A}(2s)\},\quad\forall p,r,s>0 \tag{1}$$

其中 $\varphi\in\Phi$, 则 $x\in A$.

证明 假设存在某个 $\lambda\in(0,1]$, 使 $d_\lambda(x,A)=b>0$, 则我们可选择 $a,c>0$ 满足 $a<c/2<b<c$. 因为 $\varphi(\max\{p,r,s\})$ 在 $(a,b,c/2)$ 处是右上半连续的, 所以对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $r_0>b$, $s_0>c/2$ 使

得 $(\max\{a, r_0, s_0\}) < (\max\{a, b, c/2\}) + \;=\; (b) +$. 由引理 1, $r_0 > b$ 蕴涵 $F_{x,A}(r_0) > 1-$, $s_0 > c/2 > b/2$ 蕴涵 $F_{x,A}(2s_0) > 1-$. 于是, 由 (1) 推得

$$F_{x,A}(\;(\max\{a, r_0, s_0\}) + \;)\quad \min\{F_{x,A}(r_0), F_{x,A}(2s_0)\} > 1- \;,$$

所以, 我们有 $b = d(x, A) < (\max\{a, r_0, s_0\}) + \; < \; (b) + 2$. 由 的任意性, 我们得 $b \quad (b) < b$, 导致矛盾. 这便证明了 $d(x, A) = 0$, $\quad (0, 1]$. 由注 2知, $x \quad A$.

2 主要结果

设 $F_1, F_2 \quad \mathscr{D}$, 则 F_1和 F_2的代数和 $F_1 \quad F_2$定义为

$$(F_1 \quad F_2)(t) = \sup_{t_1+t_2=t}\min\{F_1(t_1), F_2(t_2)\},\; t \quad \mathbf{R}$$

定理 1 设 $(E, \mathscr{T}, \min)$ 是一个 -完备的 Menger PM-空间. 又设 $\{\;_i\}_{i\quad \mathbf{N}}$是一个 E 到 $(0, 1]$ 的函数列, $\{T_i\}_{i\quad\mathbf{N}}$是 E 上的模糊映射列, 满足以下条件:

(Ⅰ) 对每个 $x \quad E$ 和 $i \quad \mathbf{N}$, $(T_ix)_{\;_i(x)} \quad CB(E)$;

(Ⅱ) 对任何 $i, j \quad \mathbf{N}$, $x, y \quad E$ 和 $u \quad (T_ix)_{\;_i(x)}$, 存在 $v \quad (T_jy)_{\;_j(y)}$使得对所有的 $t > 0$,

$$F_{u,v}(\;(t))\quad \min\{F_{x,y}(t), F_{x,(T_ix)_{\;_i(x)}}(t), F_{y,(T_jy)_{\;_j(y)}}(t), (F_{y,(T_ix)_{\;_i(x)}} \quad F_{x,(T_jy)_{\;_j(y)}})(2t)\}, \tag{2}$$

其中 . 则存在 $x_* \quad E$ 使得 $D_{fix}(x_*, \{T_i\}_{i\quad\mathbf{N}}) \quad \inf_{i\quad\mathbf{N}}\;_i(x_*)$. 特别地, 如果 $\;_i(x) = \max_{z\quad E}(T_ix)(z)$, $x \quad E$, 则 x_* 是 $\{T_i\}_{i\quad\mathbf{N}}$的公共不动点.

证明 设 $x_0 \quad E$ 和 $x_1 \quad (T_1x_0)_{\;_1(x_0)}$是任意的. 由条件 (Ⅱ), 存在 $x_2 \quad (T_2x_1)_{\;_2(x_1)}$使得对所有的 $p, r, s > 0$,

$$F_{x_1,x_2}(\;(\max\{p, r, s\}))\quad \min\left\{\begin{aligned}&F_{x_0x_1}(p), F_{x_0,(T_1x_0)_{\;_1(x_0)}}(p), F_{x_1,(T_2x_1)_{\;_2(x_1)}}(r),\\ &(F_{x_1,(T_1x_0)_{\;_1(x_0)}} \quad F_{x_0,(T_2x_1)_{\;_2(x_1)}})(2s)\end{aligned}\right\}$$

$$\min\{F_{x_0x_1}(p), F_{x_0x_1}(p), F_{x_1x_2}(r), (F_{x_1x_1} \quad F_{x_0x_2})(2s)\} = \min\{F_{x_0x_1}(p), F_{x_1,x_2}(r), F_{x_0x_2}(2s)\}. \tag{3}$$

对任给的 $\quad (0, 1]$, 记 $a = d(x_0, x_1)$, $b = d(x_1, x_2)$, 以及 $c = d(x_0, x_2)$. 我们将证明 $b \quad (a)$.

事实上, 因为 $(\max\{p, r, s\})$在 $(a, b, c/2)$处是右上半连续的, 所以对任给的 > 0, 存在 $p_0 > a$, $r_0 > b$, $s_0 > c/2$, 使得 $(\max\{p_0, r_0, s_0\}) < (\max\{a, b, c/2\}) +$. 由引理 1知, $p_0 > a$, $r_0 > b$和 $s_0 > c/2$分别蕴涵 $F_{x_0x_1}(p_0) > 1-$, $F_{x_1x_2}(r_0) > 1-$ 和 $F_{x_0x_2}(2s_0) > 1-$. 于是, 由 (3) 推得

$$F_{x_1x_2}(\;(\max\{p_0, r_0, s_0\}))\quad \min\{F_{x_0x_1}(p_0), F_{x_1,x_2}(r_0), F_{x_0x_2}(2s_0)\} > 1- \;.$$

再次由引理 1, 我们得 $b = d(x_1, x_2) < (\max\{p_0, r_0, s_0\}) < (\max\{a, b, c/2\}) +$. 由 > 0的任意性得 $b \quad (\max\{a, b, c/2\})$. 如果 $a < b$, 则我们有 $c = d(x_0, x_2) \quad d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) = a + b < 2b$, 因而 $b < \max\{a, b, c/2\} = b$, 导致矛盾. 这表明 $a \quad b$, $c \quad a + b \quad 2a$, 所以 $b \quad (\max\{a, b, c/2\}) = (a)$, 即 $d(x_1, x_2) \quad (d(x_0, x_1))$.

类似地, 我们可以选择 $x_3 \quad (T_3x_2)_{\;_3(x_2)}$ 使得 $d(x_2, x_3) \quad (d(x_1, x_2))$. 用归纳法, 我们得到 E 中的一个点列 $\{x_n\}$, 满足: $x_{n+1} \quad (T_{n+1}x_n)_{\;_{n+1}(x_n)}$ 和

$$d(x_{n+1}, x_n) \quad (d(x_n, x_{n-1})) \quad {}^n(d(x_0, x_1)),\; n = 1, 2, \tag{4}$$

由 (4), 不难证明

$$F_{x_nx_{n+1}}(\;^n(t) + \;)\quad F_{x_0x_1}(t),\quad t > 0 \tag{5}$$

事实上, 如果 $F_{x_0x_1}(t) = \; > 0$, 则由引理 1, 我们有 $d(x_0, x_1) < t$, $\quad (1- \;, 1]$. 由 (4) 推得 $d(x_n, x_{n+1}) \quad {}^n(t)$. 再次利用引理 1, 即得不等式 (5). 于是, 由引理 3知 $\{x_n\}$是 E 中的 -Cauchy列. 因为 $(E, \mathscr{T}, \min)$ 是 -完备的, 所以存在 $x_* \quad E$ 使得 $x_n \quad x_*$.

现在, 我们证明对每个 $i \quad \mathbf{N}$, $(T_ix_*)(x_*) \quad \;_i(x_*)$. 由条件 ( ), 存在 $y \quad (T_ix_*)_{\;_i(x_*)}$使得对所有的 $p, r, s > 0$,

$$F_{x_{n+1}(T_ix_*)_{\;_i(x_*)}}(\;(\max\{p, r, s\}))\quad F_{x_{n+1},y}(\;(\max\{p, r, s\}))$$

$$\min\{F_{x_nx_*}(p), F_{x_n,(T_{n+1}x_n)_{\;_{n+1}(x_n)}}(p), F_{x_*,(T_ix_*)_{\;_i(x_*)}}(r), (F_{x_*,(T_{n+1}x_n)_{\;_{n+1}(x_n)}} \quad F_{x_n,(T_ix_*)_{\;_i(x_*)}})(2s)\}$$

$$\min\{F_{x_n, x_*}(p), F_{x_n, x_{n+1}}(p), F_{x_*, (T_i x_*)_{i(x_*)}}(r), (F_{x_*, x_{n+1}} \quad F_{x_n, (T_i x_*)_{i(x_*)}})(2s)\}.$$

因而对任给的 $\quad > 0$, 我们有

$$F_{x_*, (T_i x_*)_{i(x_*)}}(\ (\max\{p, r, s\}) + \ )$$

$$\min\{F_{x_*, x_{n+1}}(\ ), F_{x_{n+1}, (T_i x_*)_{i(x_*)}}(\ (\max\{p, r, s\}))\}$$

$$\min\{F_{x_*, x_{n+1}}(\ ), F_{x_n, x_*}(p), F_{x_n, x_{n+1}}(p), F_{x_*, (T_i x_*)_{i(x_*)}}(r), (F_{x_*, x_{n+1}} \quad F_{x_n, (T_i x_*)_{i(x_*)}})(2s)\}.$$

令 n 　, 我们得

$$F_{x_*, (T_i x_*)_{i(x_*)}}(\ (\max\{p, r, s\}) + \ ) \quad \min\{F_{x_*, (T_i x_*)_{i(x_*)}}(r), F_{x_*, (T_i x_*)_{i(x_*)}}(2s)\},$$

再令 　 0, 我们得

$$F_{x_*, (T_i x_*)_{i(x_*)}}(\ (\max\{p, r, s\}) + \ ) \quad \min\{F_{x_*, (T_i x_*)_{i(x_*)}}(r), F_{x_*, (T_i x_*)_{i(x_*)}}(2s)\}.$$

根据引理 5, 便可断定: 对每个 i 　N, x_* 　 $(T_i x_*)_{i(x_*)}$, 因而 $(_{i=1} T_i x_*)(x_*)$ 　 $\inf_{i \ \mathbf{N}} \ _i(x_*)$, 即

$$D_{fix}(x_*, \{T_i\}_{i \ \mathbf{N}}) \quad \inf_{i \ \mathbf{N}} \ _i(x_*).$$

特别地, 如果对每个 i 　N, $\ _i(x) = \max_{z \ E}(T_i x)(z)$ $(x \quad E)$, 则容易看出 x_* 是 $\{T_i\}_{i \ \mathbf{N}}$的公共不动点.

注 **3** 　由定理 1的证明不难看出, 如果(2)式用下面较弱的不等式来代替:

$$F_{u, v}(\ (t) + \ ) \quad \min\{F_{x, y}(t), F_{x, (T_i x)_{i(x)}}(t), F_{y, (T_j y)_{j(y)}}(t), (F_{y, (T_i x)_{i(x)}} \quad F_{x, (T_j y)_{j(y)}})(2t)\}, \tag{6}$$

则定理 1的结论仍然成立.

设 (E, d) 是度量空间, 下面的(7)式定义了一个概率度量函数 $\mathscr{F}: E \quad E \quad \mathscr{D}$,

$$\mathscr{F}(x, y)(t) := F_{x, y}(t) = H(t - d(x, y)), \quad x, y \quad E. \tag{7}$$

容易证明 $(E, \mathscr{F}, \min)$ 是一个 Menger PM-空间, 而且它的 (, 　)-拓扑 S与 E 上度量 d 导出的拓扑是一致的. 这样的 $(E, \mathscr{F}, \min)$ 称为由度量空间 (E, d) 导出的 Menger PM-空间. 设 A, B 是 (E, d) 中的两个非空闭子集, 即 A, B I $CB(E)$. 定义

$$D(A, B) = \sup_{x I A} \inf_{y I B} d(x, y).$$

我们令 $G_{A, B}(t) = H(t - D(A, B))$, t I **R** 则容易证明

$$G_{A, B}(t) = \inf_{u I A} \sup_{v I B} F_{u, v}(t). \tag{8}$$

定理 **2** 　设 (E, d) 是一个完备度量空间, $\{A_i\}_{i I \mathbf{N}}$ 是 E 到 (0, 1] 的函数列, $\{T_i\}_{i I \mathbf{N}}$ 是 E 上的模糊映射列, 满足以下条件:

(I) 对每个 x I E 和 i I N, $(T_i x)_{A_i(x)}$ I $CB(E)$;

(II)c对每个 i, j I N和 x, y I E,

$$D((T_i x)_{A_i(x)}, (T_j y)_{A_j(y)}) [\ < \left(\max\{d(x, y), d(x, (T_i x)_{A_i(x)}), d(y, (T_j y)_{A_j(y)}), \frac{1}{2}[d(y, (T_i x)_{A_i(x)}) + d(x, (T_j y)_{A_j(y)})]\} \right), \tag{9}$$

其中 < I 5. 则定理 1的结论仍成立.

证明 　因为 (E, d) 是完备度量空间, 所以它的导出 Menger PM-空间 $(E, \mathscr{F}, \min)$ 是 S-完备的. 为了证明条件 (II)c蕴涵 (II), 对 i, j I N和 x, y I E, 我们不妨假设 $F_{x, y}(t) = 1$, $F_{x, (T_i x)_{A_i(x)}}(t) = 1$, $F_{y, (T_j y)_{A_j(y)}}(t) = 1$, 以及 $(F_{y, (T_i x)_{A_i(x)}} \quad F_{x, (T_j y)_{A_j(y)}})(2t) = 1$.

则由(7), 容易看出

$$d(x, y) < t, \ d(x, (T_i x)_{A_i(x)}) < t, \ d(y, (T_j y)_{A_j(y)}) < t, \tag{10}$$

且不难证明

$$d(y, (T_i x)_{A_i(x)}) + d(x, (T_j y)_{A_j(y)}) < 2t. \tag{11}$$

事实上, 因为

$$(F_{y, (T_i x)_{A_i(x)}} \quad F_{x, (T_j y)_{A_j(y)}})(2t) = \sup_{0<D<2t} \min\{F_{y, (T_i x)_{A_i(x)}}(2t - D), F_{x, (T_j y)_{A_j(y)}}(D)\} = 1,$$

所以存在 D_0 I (0, 2t) 使得 $F_{y, (T_i x)_{A_i(x)}}(2t - D_0) = 1$, $F_{x, (T_j y)_{A_j(y)}}(D_0) = 1$, 由此推得 $d(y, (T_i x)_{A_i(x)}) < 2t -$

) 　4)

$_0$, $d(x, (T_j y)_{A_j(y)}) < D_0$. 因而 (11) 成立.

因为 < I 5, 由 (9) - (11) 推得

$$D((T_i x)_{A_i(x)}, (T_j y)_{A_j(y)}) [\quad <(t) < <(t) + D, P \quad D > 0,$$

所以我们有 $G_{(T_i x)_{A_i(x)}, (T_j y)_{A_j(y)}}(<(t) + .) = 1$. 于是, 由 (8) 知, 对每个 $u I \quad (T_j x)_{A_j(x)}$, 存在 $v I \quad (T_i y)_{A_j(y)}$ 使得

$$F_{u,v}(<(t) + .) = 1 = \min\{F_{x,y}(t), F_{x,(T_i x)_{A_i(x)}}(t), F_{y,(T_j y)_{A_j(y)}}(t), (F_{y,(T_i x)_{A_i(x)}} \quad F_{x,(T_j y)_{A_j(y)}})(2t)\},$$

(6) 得证. 由注 3即知, 定理 2的结论成立.

作为定理 2的直接推论, 我们可以得到 Abu-Donia不动点定理. 下面的记号来自 [1].

$K(E) = \{A \, I \quad I^E \mid \hat{A} \, I \quad CB(E)\}$, 其中 $\hat{A} = \{x \, I \quad E \mid A(x) = \max_{z I E} A(z)\}$,

$$C: K(E) \, y \quad CB(E), \quad C(A) = \hat{A}.$$

对给定的模糊映射 $T: E \, y \quad K(E)$, 可以定义相应的集值映射 $\hat{T}: E \, y \quad CB(E)$ 如下:

$$\hat{T}(x) = \{y \, I \quad E \mid (Tx)(y) = \max_{z I E}(Tx)(z)\}. \tag{12}$$

定理 3[1]　设 (E, d) 是一个完备度量空间, $\{T_i\}_{i I \mathbf{N}}$ 是 E 到 $K(E)$ 的模糊映射列. 又设对每个 $i I \quad \mathbf{N}$, $\hat{T}_i$ 是由 T_i 按 (12) 导出的集值映射. 如果对每个 $i, j I \quad \mathbf{N}$ 和 $x, y I \quad E$,

$$H_d(\hat{T}_i(x), \hat{T}_j(y)) [\quad < \left(\max\{d(x, y), d(x, \hat{T}_i(x)), d(y, \hat{T}_j(y)), \frac{1}{2}[d(x, \hat{T}_j(y)) + d(y, \hat{T}_i(x))]\} \right), \tag{13}$$

其中 < I 5, H_d 是由 d 导出的 Hausdorff度量. 则 $\{\hat{T}_i\}_{i I \mathbf{N}}$ 有公共不动点.

证明　对每个 $i I \quad \mathbf{N}$, 我们定义函数 $A_i: E \, y \quad (0, 1]$ 如下:

$$A_i(x) = \max_{z I E}(T_i x)(z), \; x \, I \quad E.$$

因为 T_i 是 E 到 $K(E)$ 的模糊映射, $\hat{T}_i$ 是由 T_i 按 (12) 导出的集值映射, 所以容易看出 $\hat{T}_i(x) = (T_i x)_{A_i(x)}$, 且定理 2的条件 (I) 成立. 此外, 注意到 $D(A, B) [\quad H_d(A, B)$, $P A, B \, I \quad CB(E)$. 所以 (13) 蕴涵 (9), 即定理 2的条件 (II) c也成立. 因此定理 3的结论可由定理 2直接推得.

注 4　定理 3表明, [1] 中的定理 211和定理 212是本文中定理 2的特殊情形.

[参考文献]

[1] Abu-Donia H M. Common fixed point theorems for fuzzy mappings in metric space under U-contraction condition [J]. Chaos, Solitons & Factals, 2007, 34(2): 538-543.

[2] Schweizer B, Sklar A. Probabilistic Metric Spaces [M]. Amsterdam: North-Holland, 1983.

[3] Had ic O, Pap E. Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

[4] Schweizer B, Sklar A. Statistical metric spaces [J]. Pacific J Math, 1960, 10: 313-334.

[5] Schweizer B, Sklar A, Thorp E. The metrization of statistical metric spaces [J]. Pacific J Math, 1960, 10: 673-675.

[6] Fang J X. On fixed degree theorems for fuzzy mappings in Menger PM-spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(2): 270-285.

[7] Butnariu D. Fixed point theorems for fuzzy mappings [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1982, 7(2): 191-207.

[8] Had ic O. Fixed point theorems for multi-valued mappings in probabilistic metric spaces [J]. Mat Vesnik, 1979, 3: 125-133.

[9] Fang J X. Fixed point theorems of local contraction mappings on Menger spaces [J]. Appl Math Mech, 1991, 12(4): 363-372.

[10] Fang J X. Fixed degree of fuzzy mappings [J]. Kexue Tongbao, 1985, 9: 1267.

[责任编辑: 丁　蓉]