满足 $xyz=--+$ 的变换图 G^{xyz}

顾秀松[1], 孙志人[2], 张 洁[3]

(1. 解放军理工大学理学院, 江苏 南京, 211101)
(2. 南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京, 210046)
(3. 邢台职业技术学院基础部, 河北 邢台, 054000)

[摘要] 图 G 的变换图 G^{--+} 以 $V(G)\cup E(G)$ 为其顶点集, 对任意的 $\alpha,\beta\in V(G)\cup E(G)$, α 和 β 在图 G^{--+} 中邻接的条件如下: (i) $\alpha,\beta\in V(G)$, 且 α 和 β 在 G 中不相邻, (ii) $\alpha,\beta\in E(G)$, 且 α 和 β 在 G 中不相邻, (iii) $\alpha\in V(G)$, $\beta\in E(G)$, 且它们在 G 中相关. 本文主要证明除了 12个图外, G^{--+} 都不是可平面图, 以及对于图 G, $G^{--+}\cong P_n^{--+}$ 当且仅当 $G\cong P_n$.

[关键词] 变换图, 可平面图, 同构
[中图分类号] O157.5 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009)03-0012-03

The Transformation Graph G^{xyz} When $xyz=--+$

Gu Xiusong[1], Sun Zhiren[2], Zhang Jie[3]

(1. Institute of Science, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China)
(2. School of Mathematical Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)
(3. Basic Department, Xingtai Vocational and Technical College, Xingtai 054000, China)

Abstract The transformation graph G^{--+} of G is the graph with vertex set $V(G)\cup E(G)$ in which the vertex α and β are joined by an edge if one of the following conditions holds: (i) $\alpha,\beta\in V(G)$, and α and β are not adjacent in G, (ii) $\alpha,\beta\in E(G)$, and α and β are not adjacent in G, (iii) $\alpha\in V(G)$, $\beta\in E(G)$, and they are incident in G. In this paper, it is shown that G^{--+} is not planar except for 12 graphs. It is also shown that for a graph G, $G^{--+}\cong P_n^{--+}$ if and only if $G\cong P_n$.

Key words: transformation graph; planar graph; isomorphism

本文所讨论的图均为简单图. 未说明的术语及概念见文献[1]. 设 $G=(V(G),E(G))$ 是图, 图 G 的边连通度和直径分别记作 $\kappa'(G)$ 和 $\mathrm{diam}(G)$. 设 E' 是 E 的非空子集, 记 $G[E']$ 为 G 的边导出子图. 对 $V(G)$ 的两个不交的非空子集 S 和 S', 我们记 $[S,S']$ 为一个端点在 S 中, 另一个端点在 S' 中的边的集合.

设 $G=(V(G),E(G))$ 和 $H=(V(G),E(G))$ 是两个图. G 和 H 的并 $G\cup H$ 以 $V(G)\cup V(H)$ 为它的顶点集, $E(G)\cup E(H)$ 为它的边集. 特别的, 若 $V(G)\cap V(H)=\Phi$, 我们记它们的并为 $G+H$. 图 G 的全图 $T(G)$ 以 $V(G)\cup E(G)$ 为其顶点集, 两个顶点相邻当且仅当它们在 G 中相邻或相关. 文献[2]在全图的基础上, 引出变换图的概念.

定义 设 $G=(V(G),E(G))$ 是简单图, $x,y,z\in\{+,-\}$, 变换图 G^{xyz} 以 $V(G)\cup E(G)$ 为其顶点集, 对任意的 $\alpha,\beta\in V(G)\cup E(G)$, α 和 β 在图 G^{xyz} 中邻接的条件如下:

(i) $\alpha,\beta\in V(G)$, $x=+$ 时当且仅当 α 和 β 在图 G 中相邻; $x=-$ 时当且仅当 α 和 β 在图 G 中不相邻.

(ii) $\alpha,\beta\in E(G)$, $y=+$ 时当且仅当 α 和 β 在图 G 中相邻; $y=-$ 时当且仅当 α 和 β 在图 G 中不相邻.

(iii) $\alpha\in V(G)$, $\beta\in E(G)$, $z=+$ 时当且仅当 α 和 β 在图 G 中关联; $z=-$ 时当且仅当 α 和 β 在图 G 中不关联.

收稿日期: 2007-07-20
基金项目: 国家自然科学基金(10671095)资助项目.
通讯联系人: 孙志人, 博士, 教授, 研究方向: 图论. E-mail: zrsun@njnu.edu.cn

由上述定义, 得到 8个变换图, G^{+++} 恰为图 G的全图 $T(G)$, G^{---} 是 $T(G)$ 的补图. G^{++-} 和 G^{--+}, G^{+-+} 和 G^{-+-}, G^{-++} 和 G^{+--} 是其它 3对互补的图. 近年来, 已有不少研究者陆续对变换图 G^{xyz} 进行了研究.

本文研究的是变换图 G^{--+}. 在第 1部分中, 我们证明了除 K_1, $2K_1$, K_2, $3K_1$, K_2+K_1, P_3, K_3, $4K_1$, K_2+2K_1, P_3+K_1, $K_{1,3}$, K_3+K_1 这 12个图 G 外, G^{--+} 都不是可平面图. 在第 2部分中, 我们主要证明了对于图 G, $G^{--+}\cong P_n^{--+}$ 当且仅当 $G\cong P_n$.

1 连通性, 边连通度, 可平面性

对于变换图 G^{--+}, 已有研究者对它的一些基本性质, 如连通性、直径、边连通度等进行了研究. 文献 [2] 证明了对任意图 G, G^{--+} 都是连通的, 且 $\mathrm{diam}(G^{--+})\leqslant 3$, 等号成立当且仅当图 G 含有三角形并且三角形中有一个度为 2的点. 文献 [3] 证明了 $\kappa'(G^{--+})=\delta(G^{--+})$.

本部分探讨的是 G^{--+} 的可平面性. 为此, 先引入两个引理.

引理 1[1] 图 G 是可平面图当且仅当 G 不含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分.

引理 2 若 $2K_2\subseteq G$, 则 G^{--+} 不是可平面图.

证明 设 $H=2K_2$, 易得 H^{--+} 恰为 $K_{3,3}$.

若 $2K_2\subseteq G$, 则 G^{--+} 含有 $K_{3,3}$ 的剖分. 由引理 1知, G^{--+} 不是可平面图.

定理 1 除了 K_1, $2K_1$, K_2, $3K_1$, K_2+K_1, P_3, K_3, $4K_1$, K_2+2K_1, P_3+K_1, $K_{1,3}$, K_3+K_1 这 12个图 G 外, G^{--+} 都不是可平面图.

证明 设 $|V(G)|=n$. 将 G 的每条边都以长为 2的路替代, 所得的图记为 S. 由 G^{--+} 的定义可知 $\bar{G}\cup S$ 是 G^{--+} 的子图, 并且是 K_n 的一个剖分图. 若 G^{--+} 是可平面图, 由引理 1得 $n\leqslant 4$. 再由引理 2知 G 不含有 $2K_2$ 作为它的子图. 满足上述两个条件的图只有 12个, 它们是 K_1, $2K_1$, K_2, $3K_1$, K_2+K_1, P_3, K_3, $4K_1$, K_2+2K_1, P_3+K_1, $K_{1,3}$ 以及 K_3+K_1.

K_1^{--+}, $(2K_1)^{--+}$, K_2^{--+}, $(3K_1)^{--+}$, $(K_2+K_1)^{--+}$, $(4K_1)^{--+}$ 的顶点数均小于 5, 必是可平面图. 只须验证其它 6个图, 如图 1所示.

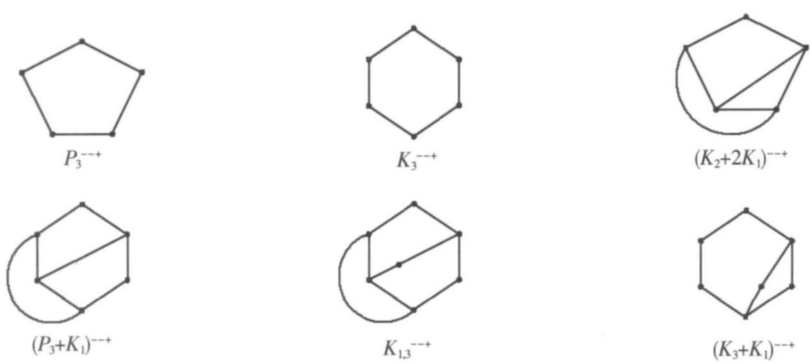

图 1 变换图

Fig.1 Transformation graph

可知这 6个图都是可平面图, 定理得证.

附注: 作者发现定理 1在文献 [4] 中也被独立地证明, 但该文献的定理中漏掉 $(4K_1)^{--+}$ 也是平面图.

2 同构

Behzad和 Radjavi[5] 证明了对任意两个图 G 和 G', $G^{+++}\cong G'^{+++}$ 当且仅当 $G\cong G'$. Baoyinduren Wu 等[6] 证明了对任意两个图 G和 G', $G^{-++}\cong G'^{-++}$ 当且仅当 $G\cong G'$, 并且提出猜想 $G^{--+}\cong G'^{--+}$ 当且仅当 $G\cong G'$. 本文在此猜想的基础上证明了 $G^{--+}\cong P_n^{--+}$ 当且仅当 $G\cong P_n$.

引理 3[7] 若 $v\in V(G)$, $e=uw\in E(G)$, 则 $d_{G^{--+}}(v)=|V(G)|-1$, $d_{G^{--+}}(e)=|E(G)|+3-d_G(u)-d_G(w)$.

引理 4 对任意两个图 G和 G', 若 $G^{--+}\cong G'^{--+}$, 则 $|V(G)|=|V(G')|$ 且 $|E(G)|=|E(G')|$.

证明　设 θ是 G^{--+} 到 G'^{--+} 的同构映射, $V(G^{--+})=V(G)\cup E(G)$, $V(G'^{--+})=V(G')\cup E(G')$. 因 $|V(G)|+|E(G)|=|V(G')|+|E(G')|$, 只须证 $|V(G)|=|V(G')|$.

情况 **1**　$\theta(V(G))\cap V(G')\neq\Phi$. 取 $v'\in\theta(V(G))\cap V(G')$, 则存在 $v\in V(G)$, 使得 $\theta(v)=v'$. 由引理 3, $|V(G)|-1=d_{G^{--+}}(v)=d_{G'^{--+}}(v')=|V(G')|-1$. 故 $|V(G)|=|V(G')|$.

情况 **2**　$\theta(V(G))\cap V(G')=\Phi$, 即 $\theta(V(G))\subseteq E(G')$.

于是, $\theta(V(G))$中的每个元素在 G'^{--+} 中, 与 $V(G')$中恰两个点相邻. 因此, $|[\theta(V(G)),V(G')]|=2|\theta(V(G))|=2|V(G)|$.

另一方面, 因 $\theta(V(G))\cap V(G')=\Phi$, 得 $V(G)\cap\theta^{-1}(V(G'))=\Phi$, 即 $\theta^{-1}(V(G'))\subseteq E(G)$. 类似可证 $|[\theta^{-1}(V(G')),V(G)]|=2|\theta^{-1}(V(G'))|=2|V(G')|$.

由 $G^{--+}\cong G'^{--+}$, $2|V(G)|=|[\theta(V(G)),V(G')]|=|[V(G),\theta^{-1}(V(G'))]|=2|V(G')|$, 于是 $|V(G)|=|V(G')|$.

定理 **2**　$G^{--+}\cong P_n^{--+}$ 当且仅当 $G\cong P_n$.

证明　充分性. 显然成立.

再证必要性.

情况 **1**　$n=2$. 由引理 4得 $|V(G)|=|V(P_2)|=2$, $|E(G)|=|E(P_2)|=1$, 故 $G\cong P_2$.

情况 **2**　$n\geqslant 3$. $|V(G)|=|V(P_n)|=n$, $|E(G)|=|E(P_n)|=n-1$.

论断 **1**　G^{--+} 的度序列为 $(d_1,d_2,\cdots,d_{2n-1})$, $d_1=d_2=\cdots=d_{n+2}=n-1$, $d_{n+3}=d_{n+4}=\cdots=d_{2n-1}=n-2$.

由引理 3, $\forall v'\in V(P_n)$, $d_{P_n^{--+}}(v')=n-1$.

$\forall e'=u'w'\in E(P_n)$, $d_{P_n^{--+}}(e')=|E(P_n)|+3-d_{P_n}(u')-d_{P_n}(w')=n+2-d_{P_n}(u')-d_{P_n}(w')$.

因此 P_n^{--+} 的度序列为 $(d'_1,d'_2,\cdots,d'_{2n-1})$, $d'_1=d'_2=\cdots=d'_{n+2}=n-1$, $d'_{n+3}=d'_{n+4}=\cdots=d'_{2n-1}=n-2$. 由 $G^{--+}\cong P_n^{--+}$, 论断 1得证.

论断 **2**　$\forall e=uw\in E(G)$, $d_G(u)+d_G(w)=3$或 4.

$\forall e=uw\in E(G)$, $d_{G^{--+}}(e)=|E(G)|+3-d_G(u)-d_G(w)=n+2-d_G(u)-d_G(w)=n-1$或 $n-2$, 论断 2得证.

情况 **2.1**　G连通.

由 $|E(G)|=|V(G)|-1$, 知 G为树. 由论断 2, $\forall w\in V(G)$, $d_G(w)\leqslant 3$. 若 G存在 3度点, 由论断 2, $G\cong K_{1,3}$. G^{--+} 的度序列为 $(3,3,3,3,2,2,2)$, 与论断 1矛盾. 故 G只有 1度和 2度点, $G\cong P_n$.

情况 **2.2**　G不连通.

设 $G_1,G_2,\cdots,G_\omega$ 为 G的连通分支. 因为 $|E(G)|=|V(G)|-1$, G必定有分支, 不妨设为 G_j, 含有圈 $\tilde{C}$. 由论断 2易知, G_j 即为圈 $\tilde{C}$, $|E(G_j)|=|V(G_j)|$. 根据 $|E(G)|=|V(G)|-1$, 可知 G仅有一个分支, 设为 G_1是树, 其它分支均为圈. 若 G_1存在 3度点, 由论断 2, $G_1\cong K_{1,3}$. G^{--+} 的度序列为 $(d_1,d_2,\cdots,d_{2n-1})$, $d_1=d_2=\cdots=d_n=n-1$, $d_{n+1}=d_{n+2}=\cdots=d_{2n-1}=n-2$ 与论断 1矛盾. 故 G_1只有 1度和 2度点, 因此 G是若干个圈和一条路的不交并.

设圈 $C=v_1e_1v_2e_2\cdots v_ke_kv_1$ 是 G的一个分支, θ是 G^{--+} 到 P_n^{--+} 的同构映射. 于是, $d_{P_n^{--+}}(\theta(e_i))=d_{G^{--+}}(e_i)=|E(G)|+3-d_G(v_i)-d_G(v_{i+1})=n-2(1\leqslant i\leqslant k, v_{k+1}=v_1)$. 由引理 3, $\theta(e_i)\in E(P_n)$ $(1\leqslant i\leqslant k)$.

e_s和 e_t在 G中相邻, e_s和 e_t在 G^{--+} 中不相邻, 故 $\theta(e_s)$和 $\theta(e_t)$在 P_n^{--+} 中不相邻, $\theta(e_s)$和 $\theta(e_t)$在 P_n 中相邻. e_s和 e_t在 G中相邻当且仅当 $\theta(e_s)$和 $\theta(e_t)$在 P_n 中相邻. 因此,

$P_n[E(\theta(e_1),\theta(e_2),\cdots,\theta(e_k))]\cong G[E(e_1,e_2,\cdots,e_k)]$为圈, 与 P_n 是路矛盾.

综上, $G\cong P_n$.

推论 **1**　$G^{++-}\cong P_n^{++-}$ 当且仅当 $G\cong P_n$.

证明　由于$\overline{G^{--+}}=G^{++-}$, $G^{++-}\cong P_n^{++-}$ 当且仅当 $G^{--+}\cong P_n^{--+}$. 由定理 2, 此推论得证.

(下转第 18页)

因此, 存在惟一的 $M_0 > 0$ 使得 $I(M_0) = (p/(p-1))^{\frac{1}{p}}$. 从而(4)存在惟一解 $u \in C^\infty(-1, 1) \cap C[-1, 1]$.

令

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{\mathrm{d}s}{(F(M_0) - F(s))^{\frac{1}{p}}}, \quad \forall u \in (0, M_0].$$

明显地, 有(3)成立.

[参考文献]

[1] 张志军. 一类奇异边值问题的可解性[J]. 烟台大学学报: 自然科学与工程版, 1999, 12(4): 235-237.

[2] Dalmasso R. Positive solutions of singular boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis, 1996, 27: 645-652.

[3] Erbe L H, Wang H. On the existence of positive solutions of ordinary differential equations[J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 120: 743-748.

[4] Lan K, Wbee J R L. Positive solutions of semilinear differential equations with singularties[J]. J Diff Eqns, 1998, 148: 407-421.

[5] Nachman A, Callegari A. A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids[J]. SIAM J Appl Math, 1986, 28: 271-281.

[6] 周杰, 杨作东. 一类拟线性椭圆型方程正奇异解的能量估计[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2006, 29(1): 21-24

[7] Zhao Jianqing, Yang Zuodong. Nonlinear boundary value problems for a class of quasilinear integro differential equations[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2006, 29(3): 20-24

[8] 杨含生, 杨作东. 一类拟线性常微分方程爆破解的存在性[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2004, 27(2): 5-9.

[责任编辑: 丁　蓉]

(上接第 14页)

[参考文献]

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory With Applications[M]. London: The Macmillan Press Ltd, 1976.

[2] Wu B, Meng J. Basic properties of total transformation graph[J]. J Math Study, 2001, 34(2): 109-116

[3] Chen Jinyang, Meng Jixiang. Super edge-connectivity of transformation graph G^{--+} [J]. Journal of Shanxi Normal University: Natural Science Edition, 2006, 34(1): 123-124

[4] Wang Lu. On the planarity of some transformation graphs[J]. Journal of Huaihua University, 2007, 26(8): 5-7.

[5] Behzad M, Radjavi H. The total group of a graph[J]. Proc Amer Math Soc, 1968(19): 159-163

[6] Wu B, Zhang Li, Zhang Zhao. The transformation graph G^{xyz} when $xyz = -++$ [J]. Discrete Math, 2005(296): 263-270

[7] Lin Qi, Shu Jinlong. Regularity and spectral radius of transformation graphs[J]. Operations Research Transactions, 2007, 11(1): 102-110.

[责任编辑: 丁　蓉]