

奇数个结点上反周期函数的 2 -周期三角插值收敛性

任美英

(武夷学院经济与数学系, 福建 武夷山 354300)

[摘要] 研究了奇数个等距结点上以 π 为周期的反周期函数的 2 -周期三角插值 $\left[0, P\left[\frac{1}{2h}\delta\right]\right]$ 问题, 给出它在 ω_{4n+1}^\perp 中有惟一解的充要条件和这种插值函数的明显式, 同时讨论了该问题在特殊情况下的插值算子的收敛性.

[关键词] 差分多项式算子 $P\left[\frac{1}{2h}\delta\right]$, 反周期函数, 2 -周期 $\left[0, P\left[\frac{1}{2h}\delta\right]\right]$ 三角插值, 收敛阶

[中图分类号] O174.41 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009)03-0019-06

Convergence of Antiperiodic $\left[0, P\left[\frac{1}{2h}\delta\right]\right]$ Trigonometric Interpolation for Odd Equidistant Nodes

Ren Meiyang

(Department of Economics and Mathematics, Wuyi University, Wuyishan 354300, China)

Abstract A kind of 2 -periodic $\left[0, P\left[\frac{1}{2h}\delta\right]\right]$ trigonometric interpolation problem of antiperiodic function for odd equidistant nodes is studied. Some equivalent conditions are established in ω_{4n+1}^\perp and the explicit forms of some interpolation functions on the interpolation problem are given. In some special case, the convergence of the interpolation operators is discussed.

Key words difference polynomial operator $P\left[\frac{1}{2h}\delta\right]$, antiperiodic function, 2 -periodic $\left[0, P\left[\frac{1}{2h}\delta\right]\right]$ trigonometric interpolation, convergence

设 τ_n 是阶数 $\leq n$ 的三角多项式空间, 则 $\tau_n = \text{span}\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx\}$, 记 $\omega_n = \{T \in \tau_n \mid T(x + \pi) = T(x)\}$ 是以 π 为周期的三角多项式子空间, 则

$$\omega_{2n} = \text{span}\{1, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos 2nx, \sin 2nx\},$$

记 $\omega_n^\perp = \{T \in \tau_n \mid T(x + \pi) = -T(x)\}$ 是以 π 为周期的反周期三角多项式子空间, 则

$$\omega_{2n-1}^\perp = \text{span}\{\cos x, \sin x, \cos 3x, \sin 3x, \dots, \cos(2n-1)x, \sin(2n-1)x\}.$$

显然, $\tau_n = \omega_n \oplus \omega_n^\perp$.

对于正整数 m , 设 $P(t) = \sum_{j=0}^m c_j t^j$ ($c_j \in \mathbf{R}, j = 0, 1, \dots, m$) 是一个实系数代数多项式, 则 $P(t) = P_e(t)$

$+ P_o(t)$, 其中 $P_e(t)$ 和 $P_o(t)$ 分别是偶的和奇的实系数代数多项式, 称 $P\left[\frac{1}{2h}\delta\right] = \sum_{j=0}^m c_j \frac{1}{(2h)^j} \delta^j$ 是由 $P(t)$ 导

收稿日期: 2008-09-03

基金项目: 福建省自然科学基金(2008J0204)资助项目、福建省教育厅科技项目(JA06065)、武夷学院科研基金(XL0804)资助项目.

通讯联系人: 任美英, 副教授, 研究方向: 函数逼近论. E-mail: nmeiyang@163.com

出的差分多项式算子.

文献 [1] 通过引进 Sham a-V am a 算子研究了在 $2n$ 个等距结点处的反周期函数的各种插值问题, 得到这些问题的三角插值多项式 $T(x)$ 的存在惟一性. 由于文 [1] 要求被插函数具有若干阶导数, 不适用于被插函数在结点处不可导情形, 因此, 在实际应用上有一定局限性. 我们知道, 文 [1] 考虑的结点数是偶数, 而在实际应用中, 有时常常要讨论在奇数个结点上的插值情形, 而且随着结点数的奇偶性不同, 相应的插值结果也有许多的不同, 所以研究奇数个结点上的插值问题有着重要的意义. 本文将通过引进差分多项式算子 $P\left\{\frac{1}{2h}\right\}$, 采用不同于文 [1] 的方法, 考虑奇数个等距结点 $x_k = \frac{k\pi}{2n+1} (k = 0, 1, \dots, 2n)$ 处反周期函数的 $2 -$ 周期插值问题.

1 插值问题及其主要结论

对 $f \in C_{2\pi}$ 和 $0 < h < \frac{\pi}{4n+1}$ 定义^[2] $\delta^0 f(x) = f(x)$, $\delta^1 f(x) = f(x+h) - f(x-h)$, $\delta^m f(x) = \delta(\delta^{m-1} f(x)) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x + (m-2k)h)$, $m \geq 2$

本文考虑如下问题:
P₁: 对任意给定的两个复数集 $\{\alpha_k\}_0^n$ 和 $\{\beta_k\}_0^{n-1}$, 是否存在惟一的三角多项式 $T(x) \in \omega_{4n+1}^\perp$ 满足条件:
 $T(x_{2k}) = \alpha_k, k = 0, 1, \dots, n, \left[P\left\{\frac{1}{2h}\right\}T\right](x_{2k+1}) = \beta_k, k = 0, 1, \dots, n-1$

我们称满足上述条件的插值问题是奇数个等距结点上以 π 为周期的反周期函数的 $2 -$ 周期 $\left\{0, P\left\{\frac{1}{2h}\right\}\right\}$ 三角插值.

- P₂: 如果问题 P₁ 的回答是肯定的, 我们通常称插值问题是正则的. 找出问题 P₁ 正则的充分必要条件.
P₃: 当问题 P₁ 是正则的, 找出插值基函数.
P₄: 当 $p(t) = t^m$, 且问题 P₁ 正则时, 求出相应的插值算子的收敛阶.
为了证明我们的主要结果, 需要下面的几个引理.

引理 1^[3] 对上述实系数代数多项式 $P(t)$ 和任意非零实数 w , 有

$$\begin{aligned} P_e\left\{\frac{1}{2h}\right\} \cos wx &= P_e\left\{\frac{i \sin w h}{h}\right\} \cos wx, P_e\left\{\frac{1}{2h}\right\} \sin wx = P_e\left\{\frac{i \sin w h}{h}\right\} \sin wx, \\ P_o\left\{\frac{1}{2h}\right\} \cos wx &= i P_o\left\{\frac{i \sin w h}{h}\right\} \sin wx, P_o\left\{\frac{1}{2h}\right\} \sin wx = -i P_o\left\{\frac{i \sin w h}{h}\right\} \cos wx \end{aligned}$$

记

$$K_{4n+1}(x) = \sum_{j=1}^{2n+1} (a_{2j-1} \cos(2j-1)x + b_{2j-1} \sin(2j-1)x), \tag{1}$$
$$(Kf)(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_{2k}) K_{4n+1}(x - x_{2k}), x_{2k} = \frac{2k\pi}{2n+1}, k = 0, 1, \dots, n \tag{2}$$

其中 $a_{2j-1}, b_{2j-1} \in \mathbf{R}$

引理 2^[4] 设 $K_{4n+1}(x)$ 和 $(Kf)(x)$ 分别由 (1) 和 (2) 给出, 则

(i) $K_{4n+1}(x_{2k}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n+1} [(a_{2j-1} + a_{4n-2j+3}) \cos(2j-1)x_{2k} + (b_{2j-1} - b_{4n-2j+3}) \sin(2j-1)x_{2k}]$, (3)

(ii) 对任何自然数 $n, (Kf_v)(x) = \frac{2n+1}{2} [a_{4n-2-v} e^{i(v-2-4n)x} + a_v e^{ix} + ib_{4n-2-v} e^{i(v-2-4n)x} - ib_v e^{ix}]$, 其中 $f_v(x) = e^{ix}, v = 1, 3, 5, \dots, 4n+1$

证明 (i) 因为对 $x_{2k} = \frac{2k\pi}{2n+1}, k = 0, 1, \dots, n$ 令 $m = 2n+2-j, j = 1, 2, \dots, 2n+1$ 有

$$\sum_{j=1}^{2n+1} (a_{2j-1} \cos(2j-1)x_{2k} + b_{2j-1} \sin(2j-1)x_{2k}) = \sum_{m=1}^{2n+1} (a_{4n-2m+3} \cos(2m-1)x_{2k} - b_{4n-2m+3} \sin(2m-1)x_{2k}),$$

所以, (3) 式成立.

$$(ii) \text{ 由 } (Kf)(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_{2k}) K_{4n+1}(x - x_{2k}), x_{2k} = \frac{2k\pi}{2n+1}, k = 0, 1, \dots, n, \text{ 有}$$

$$(Kf_v)(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=1}^{2n+1} \{ a_{2j-1} [(e^{i(2j-1+v)x_{2k}} + e^{-i(2j-1-v)x_{2k}}) \cos(2j-1)x - i(e^{i(2j-1+v)x_{2k}} - e^{-i(2j-1-v)x_{2k}}) \sin(2j-1)x] + b_{2j-1} [i(e^{i(2j-1+v)x_{2k}} - e^{-i(2j-1-v)x_{2k}}) \cos(2j-1)x + (e^{i(2j-1+v)x_{2k}} + e^{-i(2j-1-v)x_{2k}}) \sin(2j-1)x] \}.$$

因为 $1 \leq v \leq 4n+1, 1 \leq 2j-1 \leq 4n+1$,

$$\sum_{k=0}^{2n} \cos jx_{2k} + i \sum_{k=0}^{2n} \sin jx_{2k} = \sum_{k=0}^{2n} e^{ijx_{2k}} = \begin{cases} 2n+1, & j = (2n+1)m, \quad m \in \mathbb{Z} \\ 0, & j \neq (2n+1)m, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

所以, 对任何自然数 n 有

$$(Kf_v)(x) = \frac{2n+1}{2} \{ a_{4n+2-v} \cos(4n+2-v)x + a_v \cos x - i[a_{4n+2-v} \sin(4n+2-v)x - a_v \sin x] + b_{4n+2-v} \sin(4n+2-v)x + b_v \sin x + i[b_{4n+2-v} \cos(4n+2-v)x - b_v \cos x] \} =$$

$$\frac{2n+1}{2} [a_{4n+2-v} e^{i(v-2-4n)x} + a_v e^{ix} + ib_{4n+2-v} e^{i(v-2-4n)x} - ib_v e^{ix}].$$

引理 3 设 $K_{4n+1}(x)$ 由 (1) 式给出, 则对任何自然数 n 有

(i) $K_{4n+1}(x_{2k}) = \delta_{0k} (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ 的充分必要条件是

$$a_{2j-1} + a_{4n-2j+3} = \frac{2}{2n+1}, b_{2j-1} - b_{4n-2j+3} = 0, j = 1, 2, \dots, 2n+1$$

(ii) $K_{4n+1}(x_{2k}) = 0 (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ 的充分必要条件是

$$a_{2j-1} + a_{4n-2j+3} = 0, b_{2j-1} - b_{4n-2j+3} = 0, j = 1, 2, \dots, 2n+1$$

其中 $\delta_{0k} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$

由引理 2 易得引理 3 的证明.

引理 4 设 $K_{4n+1}(x)$ 由 (1) 式给出, 则对任何自然数 n 有

(i) $K_{4n+1}(x_{2k+1}) = \delta_{0k} (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ 的充分必要条件是

$$a_{2j-1} + a_{4n-2j+3} = \frac{2}{2n+1} \cos(2j-1)x_1, b_{2j-1} - b_{4n-2j+3} = \frac{2}{2n+1} \sin(2j-1)x_1, j = 1, 2, \dots, 2n+1$$

(ii) $K_{4n+1}(x_{2k+1}) = 0 (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ 的充分必要条件是

$$a_{2j-1} + a_{4n-2j+3} = 0, b_{2j-1} - b_{4n-2j+3} = 0, j = 1, 2, \dots, 2n+1$$

其中 $\delta_{0k} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$

证明 这里只给出 (i) 的证明, 同理可证 (ii) 成立.

$$K_{4n+1}(x_{2k+1}) = K_{4n+1}(x_{2k} + x_1) = \sum_{j=1}^{2n+1} (P_{2j-1} \cos(2j-1)x_{2k} + Q_{2j-1} \sin(2j-1)x_{2k}),$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$ 其中

$$P_{2j-1} = a_{2j-1} \cos(2j-1)x_1 + b_{2j-1} \sin(2j-1)x_1,$$

$$Q_{2j-1} = b_{2j-1} \cos(2j-1)x_1 - a_{2j-1} \sin(2j-1)x_1.$$

设 $U_{4n+1}(x) = \sum_{j=1}^{2n+1} (P_{2j-1} \cos(2j-1)x + Q_{2j-1} \sin(2j-1)x)$, 由于 $K_{4n+1}(x_{2k+1}) = \delta_{0k} (k = 0, 1, \dots, n-1)$

1) 当且仅当 $U_{4n+1}(x_{2k}) = \delta_{0k} (k = 0, 1, \dots, n-1)$, 因此, 由引理 3 即可得证.

记

$$A_{2j-1} = P_e \left(\frac{i \sin(2j-1)h}{h} \right) - P_e \left(\frac{i \sin(4n-2j+3)h}{h} \right),$$

$$B_{2j-1} = P_o \left(\frac{i \sin(2j-1)h}{h} \right) + P_o \left(\frac{i \sin(4n-2j+3)h}{h} \right), j = 1, 2, \dots, 2n+1$$

定理 1 问题 P₁ 正则的充分必要条件是:

$$\Delta_{2j-1}^2 = A_{2j-1}^2 - B_{2j-1}^2 \neq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 2n+1 \tag{4}$$

证明 设 $T(x) \in \omega_{4n+3}^\perp$ 则 $T(x) = \sum_{j=1}^{2n+1} (a_{2j-1} \cos(2j-1)x + b_{2j-1} \sin(2j-1)x)$, 由引理 1 得

$$\begin{aligned} \left[P\left(\frac{1}{2h}\right) \circ T \right] (x) = & \sum_{j=1}^{2n+1} \left\{ a_{2j-1} P_e \left[\frac{i \sin(2j-1)h}{h} \right] - ib_{2j-1} P_o \left[\frac{i \sin(2j-1)h}{h} \right] \right\} \cos(2j-1)x + \\ & \left[b_{2j-1} P_e \left[\frac{i \sin(2j-1)h}{h} \right] + ia_{2j-1} P_o \left[\frac{i \sin(2j-1)h}{h} \right] \right\} \sin(2j-1)x \}. \end{aligned}$$

因为问题 P₁ 正则当且仅当 $T(x_{2k}) = 0 (k = 0, 1, \dots, n)$, $\left[P\left(\frac{1}{2h}\right) \circ T \right] (x_{2k+1}) = 0 (k = 0, 1, \dots, n-1)$ 仅有零解.

由引理 3 和引理 4 知,

$T(x_{2k}) = 0 (k = 0, 1, \dots, n)$, $\left[P\left(\frac{1}{2h}\right) \circ T \right] (x_{2k+1}) = 0 (k = 0, 1, \dots, n-1)$ 的充分必要条件是:

$$\begin{cases} a_{2j-1} + a_{4n-2j+3} = 0 \\ b_{2j-1} - b_{4n-2j+3} = 0 \\ a_{2j-1} P_e \left[\frac{i \sin(2j-1)h}{h} \right] - ib_{2j-1} P_o \left[\frac{i \sin(2j-1)h}{h} \right] + a_{4n-2j+3} P_e \left[\frac{i \sin(4n-2j+3)h}{h} \right] - \\ ib_{4n-2j+3} P_o \left[\frac{i \sin(4n-2j+3)h}{h} \right] = 0 \\ b_{2j-1} P_e \left[\frac{i \sin(2j-1)h}{h} \right] + ia_{2j-1} P_o \left[\frac{i \sin(2j-1)h}{h} \right] - b_{4n-2j+3} P_e \left[\frac{i \sin(4n-2j+3)h}{h} \right] - \\ ia_{4n-2j+3} P_o \left[\frac{i \sin(4n-2j+3)h}{h} \right] = 0 \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, 2n+1 \tag{5}$$

而方程组 (5) 有惟一解 $a_{2j-1} = 0, b_{2j-1} = 0 (j = 1, 2, \dots, 2n+1)$ 的充分必要条件是 $\Delta_{2j-1}^2 = A_{2j-1}^2 - B_{2j-1}^2 \neq 0 (j = 1, 2, \dots, 2n+1)$, 因此, 问题 P₁ 正则当且仅当 $\Delta_{2j-1}^2 = A_{2j-1}^2 - B_{2j-1}^2 \neq 0 (j = 1, 2, \dots, 2n+1)$.

设 $r_{2j}(x)$ 和 $\phi_{2j+1}(x)$ 分别表示所考虑插值问题的基函数, 则

$$r_{2j}(x) = r_0(x - x_{2j}), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \phi_{2j+1}(x) = \phi_1(x - x_{2j}), \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

其中 $r_0(x)$ 和 $\phi_1(x)$ 分别满足以下条件:

$$r_0(x_{2k}) = \delta_{0k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad \left[P\left(\frac{1}{2h}\right) \circ r_0 \right] (x_{2k+1}) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \tag{6}$$

$$\phi_1(x_{2k}) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad \left[P\left(\frac{1}{2h}\right) \circ \phi_1 \right] (x_{2k+1}) = \delta_{0k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \tag{7}$$

下面的定理给出了基函数 $r_0(x)$ 和 $\phi_1(x)$ 的显式.

定理 2 若 (4) 式成立, 则满足 (6) 式和 (7) 式的基函数分别是

$$r_0(x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{1}{\Delta_{2j-1}} [D_{2j-1} \sin(2j-1)x - C_{2j-1} \cos(2j-1)x], \tag{8}$$

$$\phi_1(x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{1}{\Delta_{2j-1}} \{ A_{2j-1} \cos[(2j-1)(x - x_1)] - i B_{2j-1} \sin[(2j-1)(x - x_1)] \}. \tag{9}$$

证明 设 $r_0(x) = \sum_{j=1}^{2n+1} (a_{2j-1} \cos(2j-1)x + b_{2j-1} \sin(2j-1)x)$, 有

$$\begin{aligned} \left[P\left(\frac{1}{2h}\right) \circ r_0 \right] (x) = & \sum_{j=1}^{2n+1} \left\{ a_{2j-1} P_e \left[\frac{i \sin(2j-1)h}{h} \right] - ib_{2j-1} P_o \left[\frac{i \sin(2j-1)h}{h} \right] \right\} \cos(2j-1)x + \\ & \left[b_{2j-1} P_e \left[\frac{i \sin(2j-1)h}{h} \right] + ia_{2j-1} P_o \left[\frac{i \sin(2j-1)h}{h} \right] \right\} \sin(2j-1)x \}. \end{aligned}$$

若 $r_0(x)$ 满足 (6) 式, 则由引理 3 和引理 4 知,

$$\begin{cases} a_{2j-1} + a_{4n-2j+3} = \frac{2}{2n+1} \\ b_{2j-1} - b_{4n-2j+3} = 0 \\ a_{2j-1}P_e\left(\frac{i\sin(2j-1)h}{h}\right) - ib_{2j-1}P_o\left(\frac{i\sin(2j-1)h}{h}\right) + a_{4n-2j+3}P_e\left(\frac{i\sin(4n-2j+3)h}{h}\right) - \\ ib_{4n-2j+3}P_o\left(\frac{i\sin(4n-2j+3)h}{h}\right) = 0 \\ b_{2j-1}P_e\left(\frac{i\sin(2j-1)h}{h}\right) + ia_{2j-1}P_o\left(\frac{i\sin(2j-1)h}{h}\right) - b_{4n-2j+3}P_e\left(\frac{i\sin(4n-2j+3)h}{h}\right) - \\ ia_{4n-2j+3}P_o\left(\frac{i\sin(4n-2j+3)h}{h}\right) = 0 \\ j = 1, 2, \dots, 2n+1 \end{cases}$$

因为 $\Delta_{2j-1}^2 = A_{2j-1}^2 - B_{2j-1}^2 \neq 0, j = 1, 2, \dots, n$, 所以解方程组, 可得

$$\begin{aligned} a_{2j-1} &= \frac{-2}{(2n+1)\Delta_{2j-1}}C_{2j-1}, \quad b_{2j-1} = \frac{2}{(2n+1)\Delta_{2j-1}}D_{2j-1}, \\ \text{其中 } C_{2j-1} &= P_e\left(\frac{i\sin(4n-2j+3)h}{h}\right)A_{2j-1} + P_o\left(\frac{i\sin(4n-2j+3)h}{h}\right)B_{2j-1}, \\ D_{2j-1} &= \left[P_o\left(\frac{i\sin(4n-2j+3)h}{h}\right)A_{2j-1} + P_e\left(\frac{i\sin(4n-2j+3)h}{h}\right)B_{2j-1}\right], j = 1, 2, \dots, 2n+1 \end{aligned}$$

这就蕴含着 (8) 式.

设 $\phi_1(x) = \sum_{j=1}^{2n+1} (a_{2j-1} \cos(2j-1)x + b_{2j-1} \sin(2j-1)x)$, 有

$$\begin{aligned} \left[P\left(\frac{1}{2h}\right)\phi_1\right](x) &= \sum_{j=1}^{2n+1} \left[a_{2j-1}P_e\left(\frac{i\sin(2j-1)h}{h}\right) - ib_{2j-1}P_o\left(\frac{i\sin(2j-1)h}{h}\right) \right] \cos(2j-1)x + \\ &\quad \left[b_{2j-1}P_e\left(\frac{i\sin(2j-1)h}{h}\right) + ia_{2j-1}P_o\left(\frac{i\sin(2j-1)h}{h}\right) \right] \sin(2j-1)x. \end{aligned}$$

若 $\phi_1(x)$ 满足 (7) 式, 则由引理 3 和引理 4 知,

$$\begin{cases} a_{2j-1} + a_{4n-2j+3} = 0 \\ b_{2j-1} - b_{4n-2j+3} = 0 \\ a_{2j-1}P_e\left(\frac{i\sin(2j-1)h}{h}\right) - ib_{2j-1}P_o\left(\frac{i\sin(2j-1)h}{h}\right) + a_{4n-2j+3}P_e\left(\frac{i\sin(4n-2j+3)h}{h}\right) - \\ ib_{4n-2j+3}P_o\left(\frac{i\sin(4n-2j+3)h}{h}\right) = \frac{2}{2n+1} \cos(2j-1)x_1, \\ b_{2j-1}P_e\left(\frac{i\sin(2j-1)h}{h}\right) + ia_{2j-1}P_o\left(\frac{i\sin(2j-1)h}{h}\right) - b_{4n-2j+3}P_e\left(\frac{i\sin(4n-2j+3)h}{h}\right) - \\ ia_{4n-2j+3}P_o\left(\frac{i\sin(4n-2j+3)h}{h}\right) = \frac{2}{2n+1} \sin(2j-1)x_1, \\ j = 1, 2, \dots, 2n+1 \end{cases}$$

因为 $\Delta_{2j-1}^2 = A_{2j-1}^2 - B_{2j-1}^2 \neq 0, j = 1, 2, \dots, n$, 所以解方程组, 可得

$$\begin{aligned} a_{2j-1} &= \frac{2}{(2n+1)\Delta_{2j-1}} [A_{2j-1} \cos(2j-1)x_1 + iB_{2j-1} \sin(2j-1)x_1], \\ b_{2j-1} &= \frac{2}{(2n+1)\Delta_{2j-1}} [A_{2j-1} \sin(2j-1)x_1 - iB_{2j-1} \cos(2j-1)x_1], j = 1, 2, \dots, 2n+1 \end{aligned}$$

这就蕴含着 (9) 式, 证毕.

所以, 我们所考虑的插值问题的显式解是 $T(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j r_0(x - x_{2j}) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \phi_1(x - x_{2j})$.

若 $P(t) = t^m$, 此时称之为奇数个等距结点上反周期函数的 2-周期 $(0, \delta)$ 插值, 有如下推论.

推论 1 若 $P(t) = t^m$, 则问题 P_1 正则当且仅当 m 是奇数.

推论 2 若 $P(t) = t^m$, m 是奇数, 则满足 (6) 式和 (7) 式的基函数分别为

$$r_0(x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{\sin^m((4n-2j+3)h)}{\sin^m((2j-1)h) + \sin^m((4n-2j+3)h)} \cos(2j-1)x,$$

(10)

$$\phi_1(x) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2h^m}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{\sin(2j-1)(x-x_1)}{\sin^m((2j-1)h) + \sin^m((4n-2j+3)h)}.$$

(11)

2 插值算子的收敛阶

设 $f(x)$ 是以 π 为周期的反周期函数, 记

$$(Q_n^m f)(x) = \sum_{k=0}^n f(x_{2k}) r_0(x - x_{2k}) + \sum_{k=0}^{n-1} [(\delta^m f)(x_{2k+1}) / (2h)^m] \phi_1(x - x_{2k}),$$

其中 $r_0(x)$ 和 $\phi_1(x)$ 分别满足 (10) 式和 (11) 式.

为了讨论插值算子的收敛阶, 我们需要一个引理.

引理 5 若 $r_0(x)$ 和 $\phi_1(x)$ 分别满足 (10) 式和 (11) 式, 则

$$\sum_{k=0}^n |r_0(x - x_{2k})| = O(n), \sum_{k=0}^{n-1} |\phi_1(x - x_{2k})| = O(n^{-m+1}),$$

(12)

其中符号“ O ”与 n 及 x 无关.

类似于文献 [5] 中引理 5 的讨论易证得此引理.

定理 3 设 $f(x)$ 是以 π 为周期的反周期函数, $P(t) = t^m$, 若 m 为奇数, 则

$$|(Q_n^m f)(x) - f(x)| = O(n E_{4n+1}(f)),$$

(13)

其中 $E_{4n+1}(f)$ 是 $f(x)$ 的最佳逼近, 符号“ O ”与 n , f 及 x 无关.

证明 设 $T_{4n+1}(x) \in \omega_{4n+1}^1$ 是 $f(x)$ 的最佳逼近多项式, 则 $\|f(x) - T_{4n+1}(x)\|_c = E_{4n+1}(f)$, 其中

$\|f\|_c = \sup\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 2\pi\}$. 由推论知, 当 $P(t) = t^m$, m 为奇数时, 有

$$T_{4n+1}(x) = \sum_{k=0}^n T_{4n+1}(x_{2k}) r_0(x - x_{2k}) + \sum_{k=0}^{n-1} [(\delta^m T_{4n+1})(x_{2k+1}) / (2h)^m] \phi_1(x - x_{2k}),$$

其中 $r_0(x)$ 和 $\phi_1(x)$ 分别满足 (10) 式和 (11) 式. 因此,

$$(Q_n^m f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n [f(x_{2k}) - T_{4n+1}(x_{2k})] r_0(x - x_{2k}) +$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^m (f - T_{4n+1})(x_{2k+1})}{(2h)^m} \phi_1(x - x_{2k}) + [T_{4n+1}(x) - f(x)],$$

这样, 由 (12) 式即可得 (13) 式成立.

[参考文献]

[1] Franz-jürgen Delvos, Ludger Knoche, Lacunary interpolation by antiperiodic trigonometric polynomials[J]. BIT, 1999, 39 (3): 439-450.

[2] Sun Xiehua, A generalization of (Q, m) interpolation[J]. J of Math Res & Expt, 1999, 19(1): 9-17.

[3] 马欣荣. 奇数个等距结点上的 2- 周期 $\left[Q, P\left(\frac{\delta}{2h}\right) \right]$ 三角插值 [J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 2006, 34(4): 171-174.

[4] Liu Yongping, On the trigonometric interpolation and the entire interpolation[J]. Approx Theory and Its Appl, 1990, 6(4): 85-106.

[5] 何尚琴. 反周期函数的 2- 周期 (Q, m) 三角插值的收敛性 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(4): 513-518.

[6] 孙永生. 函数逼近论 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1989.

[责任编辑: 丁 蓉]