

# 一类具扩散的 SIRS 传染病模型解的渐近性质

甘文珍<sup>1</sup>, 史一欢<sup>2</sup>

(1. 江苏技术师范学院数理学院, 江苏 常州 213001)

(2. 南京师范大学生命科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 研究了一类具有非线性发生率的 SIRS 传染病模型的弱耦合反应扩散方程组. 利用线性化和特征值的方法, 讨论了无病平衡点和染病平衡点的局部稳定性. 利用 Liapunov 函数的方法给出了无病平衡点渐近稳定的充分条件. 结果表明, 在小初值条件下, 当接触率小的时候, 无病平衡点是渐近稳定的.

[关键词] 非线性发生率, 暂时免疫力, 时滞, 反应扩散系统, 渐近性质

[中图分类号] O175.26 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009)03-0025-06

## Asymptotic Properties of Solutions to a SIRS Epidemic Model With Diffusion

GanWenzhen<sup>1</sup>, ShiYihuan<sup>2</sup>

(1. School of Mathematics and Physics, Jiangsu Teachers University of Technology, Changzhou 213001, China)

(2. School of Life Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

**Abstract** The weakly coupled reaction-diffusion system describing a SIRS epidemic model with nonlinear incident rate is investigated. The local asymptotic stabilities of equilibria are given by linearization and eigenvalue. The asymptotic stabilities of disease-free equilibrium is investigated using the method of Liapunov functions. Our results show that the disease-free equilibrium is asymptotically stable if the contact rate is small and the initial values are small.

**Key words** nonlinear incident rate, temporary immunity, time delay, reaction diffusion system, asymptotic properties

传染病是严重危害人类生命健康的感染性疾病. 历史上传染病曾给人类带来了很大的灾难, 这引起了人们的高度重视. 早在 1927 年, Kemack 和 McKendrick<sup>[1]</sup>就建立了经典的 SR 仓室模型. 受他们工作的启发, 假设 SIR 传染病模型在潜伏期的病毒可以忽略不计, 则易感者在接触病毒后成为染病者, 最后因为永久恢复或暂时具有免疫力而移出.  $S(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$  分别表示总人口中易感者 (susceptibles)、染病者 (infectives) 和移出者 (removed) 的人数. 下面给出一个具有暂时免疫力的 SR 传染病模型, 即 SIRS 传染病模型:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = \mu - dS - \beta SI + R, \\ \dot{I}(t) = \beta SI - (\gamma + d + \alpha)I, \\ \dot{R}(t) = \gamma I - (\delta + d)R, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\mu > 0$  是易感者的出生率,  $d$  是易感者、染病者、移出者的死亡率,  $\alpha > 0$  是因病死亡率. 假设从易感者病例到感染病例的转化率与易感者和染病者的乘积成正比, 比例系数为  $\beta$ , 称  $\beta SI$  为双线性发生率. 假设单位时间内从染病者类移出的人数与病人数量成正比, 比例系数为  $\gamma$ . SIRS 传染病模型表示易感者被染病者传染成为染病者个体, 染病者具有免疫力后从染病者类移出变为移出者, 再以比例  $\delta$  失去免疫力后又变为易感者.  $\delta$  是免疫力丧失系数. Mena 和 Hethcote<sup>[2]</sup>利用 Liapunov 函数的方法证明了当  $\beta\mu < d(\gamma + \alpha + d)$  时, 问题 (1) 的唯一的无病平衡点全局渐近稳定; 当  $\beta\mu > d(\gamma + \alpha + d)$  时, 染病平衡点局部渐近稳定.

收稿日期: 2008-03-12

基金项目: 江苏省教育厅自然科学基金 (BK2006064) 资助项目.

通讯联系人: 甘文珍, 硕士, 讲师, 研究方向: 偏微分方程. E-mail: ganwenzhen@yahoo.com.cn

但鉴于实际上易感者发病的多少不仅与染病者数量有关,更与病菌本身的传染性强弱有关,因此,更合理的发生率应该是非线性的,在这方面已经有了很多工作<sup>[3-5]</sup>. 在模型(1)中考虑引入非线性发生率 $\varphi f(I)S$  其中 $f(0) = 0, f(I) \geq 0, f'(I) > 0, f''(I) < 0, \lim_{I \rightarrow \infty} f(I) = c < \infty$ , 例如 $f(I) = (\alpha I)/(I + \beta I)$ ,  $\varphi$ 是易感者类到染病者类的接触率(recruitment). 另外,在模型(1)的基础上考虑时滞因素. 假定平均免疫期为一常数 $\tau$ ,移出者丧失免疫力而回到易感者的比例是按 $e^{-\mu\tau}$ 分布的,则在 $t - \tau$ 时刻的移出者经过 $\tau$ 时刻后丧失免疫力又回到易感者类,即在 $t$ 时刻有 $\gamma I e^{-\mu\tau}$ 移出者进入易感者类. 假设出生率与死亡率相等,无因病死亡率,即 $\mu = d, \alpha = 0$  于是模型(1)变为

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = \mu - \mu S(t) - \varphi f(I(t))S(t) + \gamma e^{-\mu\tau} I(t - \tau), \\ \dot{I}(t) = \varphi f(I(t))S(t) - (\mu + \gamma)I(t), \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) - \gamma e^{-\mu\tau} I(t - \tau) - \mu R(t). \end{cases} \tag{2}$$

Y uliy a等在[6]中利用 Liapunov函数给出了其常数平衡点的稳定性.

当进一步考虑病毒感染人口和扩散的空间影响,模型(2)可扩展为下列反应扩散问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - d_1 \Delta u_1 = \mu - \mu u_1 - \varphi f(u_2)u_1 + \gamma e^{-\mu\tau} u_2(x, t - \tau), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - d_2 \Delta u_2 = \varphi f(u_2)u_1 - (\mu + \gamma)u_2, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} - d_3 \Delta u_3 = \gamma u_2 - \gamma e^{-\mu\tau} u_2(x, t - \tau) - \mu u_3, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = \frac{\partial u_3}{\partial \eta} = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u_i(x, t) = u_{i0}(x, t) > 0 \quad i = 1, 2, 3 & (x, t) \in \Omega \times [-\tau, 0]. \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中的有界区域,其边界 $\partial\Omega$ 光滑, $\eta$ 是边界上的单位外法向量,齐次 Neumann边界条件说明上述系统是封闭的,在边界上没有人口移动. $u_1, u_2, u_3$ 分别表示易感者、染病者、移出者在 $t$ 时刻的空间分布密度. 扩散的引入允许了所有人口的迁移,正常数 $d_1, d_2, d_3$ 分别表示易感者、染病者、移出者的空间扩散率. 通常情况下,初始条件 $u_{i0}(x, t)$ 在 $\Omega \times [-\tau, 0]$ 上是 $H^1$ -Lider连续且非负有界的. 根据生物学意义,我们进一步假设在 $\Omega \times [-\tau, 0]$ 上 $u_{i0}(x, t) > 0$  在本文中,我们拟利用线性化和特征值及 Liapunov函数的方法讨论问题(3)解的渐近行为.

### 1 解的正性

由于 $u_1, u_2$ 的方程不依赖 $u_3$ , 故先考虑前两个方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - d_1 \Delta u_1 = \mu - \mu u_1 - \varphi f(u_2)u_1 + \gamma e^{-\mu\tau} u_2(x, t - \tau), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - d_2 \Delta u_2 = \varphi f(u_2)u_1 - (\mu + \gamma)u_2, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u_i(x, t) = u_{i0}(x, t) > 0 \quad i = 1, 2 & (x, t) \in \Omega \times [-\tau, 0]. \end{cases} \tag{4}$$

既然方程右边的增长函数在 $\mathbf{R}^2$ 中是足够光滑的,那么由经典的 PDE<sup>[7]</sup>理论表明问题(4)的解在 $\Omega$ 中对所有时间是连续惟一的. 由正性引理<sup>[8]</sup>可得:

**定理 1** 设 $u_i \in C(\Omega \times [0, T]) \cap C^{2,1}(\Omega \times (0, T]), i = 1, 2$  其中 $u_1, u_2$ 是问题(4)的解, 则有 $u_1(x, t) \geq 0, u_2(x, t) \geq 0$

问题(4)解的界一般很难得到,但如果给出一些限制,这样的界还是可以给出的.

**定理 2** 设 $u_i \in C(\Omega \times [0, T]) \cap C^{2,1}(\Omega \times (0, T]), i = 1, 2$  其中 $u_1, u_2$ 是问题(4)的解, 设

$$\begin{aligned} \mu(\mu + \gamma) > \gamma \varphi_c, \|u_{10}\|_\infty &\leq \frac{\mu(\mu + \gamma)}{\mu(\mu + \gamma) - \gamma \varphi_c} \\ m = \max_{(x,t) \in \Omega \times [-\tau, 0]} \{u_{20}(x, t)\} &\leq \frac{\mu \varphi_c}{\mu(\mu + \gamma) - \gamma \varphi_c}, \end{aligned} \quad (5)$$

则

$$u_1(x, t) \leq \frac{2\mu(\mu + \gamma)}{\mu(\mu + \gamma) - \gamma \varphi_c}, u_2(x, t) \leq \frac{2\mu \varphi_c}{\mu(\mu + \gamma) - \gamma \varphi_c}, (x, t) \in \Omega \times (0, \infty). \quad (6)$$

注  $u_1, u_2$  在  $\Omega \times (0, \infty)$  中并不是一致有界的, 而当初值在一定范围内时解一致有界. 如果初值很大,  $u_1, u_2$  在  $\Omega \times (0, \infty)$  中无界, 即病情无法控制.

## 2 局部稳定性

首先讨论染病平衡点存在的充分条件. 记

$$F = (f_1, f_2), f_1 = \mu - \mu u_1 - \varphi f(u_2) u_1 + \gamma e^{-\mu \tau} u_2(x, t - \tau), f_2 = \varphi f(u_2) u_1 - (\mu + \gamma) u_2$$

易见问题 (4) 总有一个无病平衡点  $E_0 = (1, 0)$ , 所以问题 (3) 有无病平衡点  $E_0 = (1, 0, 0)$ . 根据传染病学概念,  $R = \varphi'(0)/(\mu + \gamma)$  被称为基本再生数. 这里  $R$  为  $\varphi$  和 分数  $f'(0)/(\mu + \gamma)$  的乘积. 假定  $R > 1$ , 问题 (4) 还有 1 个染病平衡点  $E^* = (u_1^*, u_2^*)$ , 即问题 (3) 存在 1 个染病平衡点  $E^* = (u_1^*, u_2^*, \gamma u_2^* (1 - e^{-\mu \tau})/\mu)$ .

下面先讨论问题 (4) 无病平衡点和染病平衡点的局部稳定性.

利用 [9] 的方法, 假设  $0 = \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \dots$  是  $\Omega$  中带有齐次 Neumann 边界条件的算子  $-\Delta$  的特征值, 且在  $C^1(\Omega)$  中  $\sigma_i$  对应的特征空间为  $E(\sigma_i)$ . 设  $X = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in [C^1(\Omega)]^3 \mid \partial_n u = 0, x \in \partial\Omega\}$ ,  $\{\phi_{ij}, j = 1, \dots, \dim E(\sigma_i)\}$  是  $E(\sigma_i)$  的基本正交基,  $X_{ij} = \{c \cdot \phi_{ij} \mid c \in \mathbf{R}^3\}$ ,  $X_j = \bigoplus_{i=1}^{\dim E(\sigma_j)} X_{ij}$ ,  $X = \bigoplus_{i=1}^\infty X_i$ .

设  $(u_1, u_2)$  是问题 (4) 的稳态解, 令  $u_i(x, t) = u_i(x, t) + V_i(x, t)$  代入问题 (4) 线性化可得  $V_t = LV = DV + F_u(u)V$ , 其中  $D = \text{diag}(d_1, d_2)$ ,

$$F_u(u)V = \begin{pmatrix} -(\varphi f(u_2) + \mu)V_1 & \gamma e^{-\mu \tau} V_2(x, t - \tau) - \varphi'(u_2) u_1 V_2 \\ \varphi f(u_2) V_1(x, t) & u_1 \varphi'(u_2) V_2 - (\mu + \gamma) V_2 \end{pmatrix}.$$

对每个  $i \geq 1$ ,  $X_i$  是算子  $L$  的不变子空间, 则算子  $L$  作用在  $X_i$  上为

$$V_i = LV = -D\sigma_i V + F_u(u)V.$$

令  $V_1 = c_1 e^{\lambda t}$ ,  $V_2 = c_2 e^{\lambda t}$  代入上式可得

$$\begin{pmatrix} \lambda + \sigma_i d_1 + \mu + \varphi f(u_2) & \varphi'(u_2) u_1 - \gamma e^{-(\lambda + \mu)\tau} \\ -\varphi f(u_2) & \lambda + \sigma_i d_2 + \mu + \gamma - \varphi'(u_2) u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由于  $c_1, c_2$  不全为 0, 故系数行列式为零, 展开行列式得

$$[\lambda + \sigma_i d_1 + \mu + \varphi f(u_2)][\lambda + \sigma_i d_2 + \mu + \gamma - \varphi'(u_2) u_1] + \varphi f(u_2)[\varphi'(u_2) u_1 - \gamma e^{-(\lambda + \mu)\tau}] = 0$$

所以特征方程为

$$\begin{aligned} \Phi_i(\lambda) &= [\lambda + \sigma_i d_1 + \mu + \varphi f(u_2)][\lambda + \sigma_i d_2 + \mu + \gamma - \varphi'(u_2) u_1] + \\ &\quad \varphi f(u_2)[\varphi'(u_2) u_1 - \gamma e^{-(\lambda + \mu)\tau}]. \end{aligned}$$

### 2.1 无病平衡点的局部稳定性

在  $E_0 = (1, 0)$  处的特征方程为

$$\Phi_i(\lambda) = (\lambda + d_1 \sigma_i + \mu)(\lambda + \sigma_i d_2 + \mu + \gamma - \varphi'(0)) = 0$$

先考虑  $R < 1$  时的情况: 显然  $\lambda_{i1} = -d_1 \sigma_i - \mu < 0$ ,  $\lambda_{i2} = -\sigma_i d_2 - \mu - \gamma + \varphi'(0) < 0$  并且对  $\forall i \geq 1$ ,  $\lambda_{i1} \leq -\mu$ ,  $\lambda_{i2} \leq -\mu - \gamma + \varphi'(0)$ , 故  $L$  的谱都是由实部小于某一个负常数的特征值组成的. 由 [10] 中 71 页推论 1.11 知, 当  $R < 1$  时,  $E_0 = (1, 0)$  是局部渐近稳定的.

再考虑  $R > 1$  时的情况: 当  $i = 1$  时  $\sigma_1 = 0$ ,  $\Phi_1(0) = \mu(\mu + \gamma - \varphi'(0)) < 0$ . 当  $\lambda \rightarrow \infty$  时,  $\Phi_1(\lambda) \rightarrow \infty$ . 又因为  $\Phi_1(\lambda)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是连续的, 由介值定理可知  $\Phi_1(\lambda) = 0$  至少有一正根, 则  $L$  的谱包

含一个特征值  $\lambda$ (它的实部大于零). 由 [10] 中 71 页推论 1.11 得, 当  $R > 1$  时,  $E_0 = (1, 0)$  是不稳定的平衡点.

2.2 染病平衡点的局部稳定性

下面考虑  $R > 1$  时染病平衡点  $E^* = (u_1^*, u_2^*)$  的局部稳定性.

对  $E^* = (u_1^*, u_2^*)$ , 特征方程为

$$\begin{aligned} & [\lambda + \sigma_i d_1 + \mu + \varphi(u_2^*)][\lambda + \sigma_i d_2 + \mu + \gamma - \varphi'(u_2^*) u_1^*] + \\ & \varphi(u_2^*)[\varphi'(u_2^*) u_1^* - \gamma e^{-(\lambda + \mu)\tau}] = 0 \end{aligned}$$

简记为

$$\lambda^2 + a_i \lambda + c_i + d_i e^{-\lambda \tau} = 0 \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned} a_i &= \sigma_i(d_1 + d_2) + 2\mu + \gamma + \varphi(u_2^*) - \varphi'(u_2^*) u_1^*, \\ c_i &= \sigma_i^2 d_1 d_2 + \sigma_i d_1 [\mu + \gamma - \varphi'(u_2^*) u_1^*] + \sigma_i d_2 [\mu + \varphi'(u_2^*)] + \\ & \quad [\mu + \varphi(u_2^*)][\mu + \gamma - \varphi'(u_2^*) u_1^*] + \varphi'(u_2^*) u_1^*, \\ d_i &= -\gamma e^{-\mu \tau} \varphi(u_2^*). \end{aligned}$$

显然,  $E^* = (u_1^*, u_2^*)$  的局部稳定性取决于方程 (7) 的根的情况.

假设

$$\mu + \gamma > \varphi'(u_2^*) u_1^*, \tag{8}$$

由计算可知  $a_i > 0$ ,  $a_i^2 - 2c_i > \sigma_i^2(d_1^2 + d_2^2) > 0$ ,  $c_i^2 - d_i^2 > \sigma_i^4 d_1^2 d_2^2 > 0$ .

先证明: 对每一个确定的  $i$  而言, 方程 (7) 不存在实部绝对值很小的根. 事实上, 设  $\lambda_{ij} = x_{ij} + \sqrt{-1}y_{ij}$  代入 (7), 则

$$x_{ij}^2 - y_{ij}^2 + a_i x_{ij} + c_i + \sqrt{-1}y_{ij}(2x_{ij} + a_i) + d_i e^{-\tau x_{ij}}(\cos \tau y_{ij} - \sqrt{-1} \sin \tau y_{ij}) = 0 \tag{9}$$

分离实部、虚部得

$$\begin{cases} x_{ij}^2 - y_{ij}^2 + a_i x_{ij} + c_i + d_i e^{-\tau x_{ij}} \cos \tau y_{ij} = 0 \\ 2x_{ij}y_{ij} + a_i y_{ij} - d_i e^{-\tau x_{ij}} \sin \tau y_{ij} = 0 \end{cases}$$

两式两边平方相加得

$$y_{ij}^4 + (2x_{ij}^2 + 2x_{ij}a_i + a_i^2 - 2c_i)y_{ij}^2 + (x_{ij}^2 + a_i x_{ij} + c_i)^2 - d_i^2 e^{-2\tau x_{ij}} = 0 \tag{10}$$

当  $|x_{ij}| \ll 1$  时,

$$y_{ij}^4 + (a_i^2 - 2c_i)y_{ij}^2 + c_i^2 - d_i^2 = 0 \tag{11}$$

由假设及上述计算知  $a_i^2 - 2c_i > 0$ ,  $c_i^2 - d_i^2 > 0$ , 故方程 (11) 无实根, 这与  $y_{ij}$  的存在性矛盾.

然后证明: 对确定的  $i$  方程 (7) 不存在具有非负实部的根. 记  $A_i = 2x_{ij}^2 + 2x_{ij}a_i + a_i^2 - 2c_i$ ,  $B_i = (x_{ij}^2 + a_i x_{ij} + c_i)^2 - d_i^2 e^{-2\tau x_{ij}}$ . 假设存在一  $x_{ij} > 0$ , 由计算知  $A_i > 0$ ,  $B_i > 0$ , 则方程 (10) 无实根, 这与  $y_{ij}$  的存在性矛盾.

最后证明: 对于任意  $i$  方程 (7) 的根实部都小于等于某一个负常数. 由上述证明可知, 对于每一个确定的  $i$  存在  $\delta_i < 0$  使  $x_{ij} < -\delta_i$ . 因此只要证明: 对任何  $i$  存在  $\delta$  使  $x_{ij} \leq -\delta$ . 先取  $\delta_0 = 1$ , 当  $-1 < x_{ij} < 0$  时  $\lim_{i \rightarrow \infty} (A_i / \sigma_i^2) = d_1^2 + d_2^2 > 0$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} (B_i / \sigma_i^4) = d_1^2 d_2^2 > 0$ . 所以, 存在  $N$ , 当  $i > N$  时,  $A_i > 0$ ,  $B_i > 0$ . 则方程 (10) 无实根, 这与  $y_{ij}$  的存在性矛盾. 所以只能是  $x_{ij} < -\delta_0$ , 对  $i > N$  成立. 故取  $\delta = \min\{\delta_0, \dots, \delta_N, \delta_0\}$ , 对任意的  $i$  有  $x_{ij} \leq -\delta$ . 由 [10] 中 71 页推论 1.11 可得, 当  $R > 1$ ,  $\mu + \gamma > \varphi'(u_2^*) u_1^*$  时,  $E^* = (u_1^*, u_2^*)$  局部渐近稳定.

**定理 3** 当  $R < 1$  时,  $E_0 = (1, 0)$  是局部渐近稳定的, 不存在染病平衡点; 当  $R > 1$  时,  $E_0 = (1, 0)$  是不稳定的, 存在染病平衡点  $E^* = (u_1^*, u_2^*)$ , 且当  $\mu + \gamma > \varphi'(u_2^*) u_1^*$  时,  $E^* = (u_1^*, u_2^*)$  局部渐近稳定.

**注** 当接触系数很小时, 无病平衡点局部渐近稳定, 且不存在染病平衡点; 当  $\varphi'(0) > \mu + \gamma > \varphi'(u_2^*) u_1^*$  时, 存在染病平衡点  $E^* = (u_1^*, u_2^*)$ , 且该点局部渐近稳定, 无病平衡点  $E_0 = (1, 0)$  是不稳定的.

### 3 小初值范围内的稳定性

在本节中, 将证明无病平衡点在小初值条件下的渐近稳定性, 染病平衡点的全局稳定性比较复杂, 在此不作讨论. 下面先介绍在稳定性的证明中运用的引理.

**引理 1<sup>[11]</sup>**  $a, b$  为正常数, 设  $\phi, \varphi \in C^1([a, \infty))$ ,  $\varphi(t) \geq 0$  且  $\phi$  有下界, 如果  $\phi'(t) \leq -b\varphi(t)$ , 且存在常数  $K$  满足  $t \geq a$  时,  $\varphi'(t) \leq K$ , 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$

利用引理 1 我们可得:

**定理 4** 若  $\mu(\mu + \gamma) > \gamma\varphi_c$ ,  $\mu + \gamma - \varphi'(0) - \frac{\varphi_c}{2} > 0$ ,  $\|u_{10}\|_\infty \leq \frac{\mu(\mu + \gamma)}{\mu(\mu + \gamma) - \gamma\varphi_c}$ ,  $\mu > \gamma$ ,  $m = \max_{(x,t) \in \Omega \times [-\tau, 0]} \{u_{20}(x, t)\} \leq \frac{\mu\varphi_c}{\mu(\mu + \gamma) - \gamma\varphi_c} \frac{\gamma}{2\mu + 2\gamma - 2\varphi'(0) - \varphi_c} < \frac{2\mu - \gamma}{\varphi_c}$ , 则  $E_0$  是渐近稳定的.

**证明** 根据定理 2 在条件 (5) 下问题 (4) 的解  $(u_1, u_2)$  在  $\Omega \times (0, \infty)$  中一致有界, 即存在常数  $C > 0$ ,  $\|u_i(\cdot, t)\|_\infty \leq C$ ,  $\forall t \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ . 再利用 [12] 定理 A2 得

$$\|u_i(\cdot, t)\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C, \quad \forall t \geq 1 \quad (12)$$

令  $V_1 = 1 - u_1$ ,  $V_2 = u_2 > 0$  代入 (4) 得

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial t} - d_1 \Delta V_1 = -\mu V_1 - \varphi f(V_2)(1 - V_1) - \gamma e^{-\mu\tau} V_2(x, t - \tau), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} - d_2 \Delta V_2 = \varphi f(V_2)(1 - V_1) - (\mu + \gamma)V_2, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial V_1}{\partial \eta} = \frac{\partial V_2}{\partial \eta} = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ V_1(x, t) = 1 - u_{10}(x, t), V_2(x, t) = u_{20}(x, t), & (x, t) \in \Omega \times [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (13)$$

定义 Liapunov 函数  $E(t) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} V_1^2 + V_2 + \frac{k}{2} V_2^2 \right\} dx + \frac{\gamma}{2} e^{-\mu\tau} \int_\Omega \int_\tau^t V_2^2(x, s) ds dx$ .

由抛物方程的强极大值原理和 Hopf 引理知, 当  $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$  时,  $u_1(x, t) > 0$ ,  $u_2(x, t) > 0$ . 故  $V_2(x, t) > 0$ . 因此  $E(t) > \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} V_1^2 + V_2 + \frac{k}{2} V_2^2 \right\} dx > 0$ . 对  $E(t)$  求导得:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_\Omega \left\{ V_1 \cdot V_{1t} + V_{2t} + k V_2 \cdot V_{2t} + \frac{\gamma}{2} e^{-\mu\tau} (V_2^2(x, t) - V_2^2(x, t - \tau)) \right\} dx \leq \\ &= \int_\Omega \{ d_1 |\nabla V_1|^2 + k d_2 |\nabla V_2|^2 \} dx + \int_\Omega \left\{ \left[ -\mu + \frac{\gamma}{2} e^{-\mu\tau} \right] V_1^2 + [\varphi'(0) - \mu - \gamma] V_2 + \right. \\ &\quad \left. \left[ k f'(0) - k(\mu + \gamma) + \frac{\gamma}{2} e^{-\mu\tau} \right] V_2^2 + \frac{k\varphi_c}{2} (V_1^2 + V_2^2) \right\} dx \leq \\ &= \int_\Omega \{ d_1 |\nabla V_1|^2 + k d_2 |\nabla V_2|^2 \} dx - \int_\Omega \left\{ \left[ \mu - \frac{\gamma}{2} - \frac{k\varphi_c}{2} \right] V_1^2 + [\mu + \gamma - \varphi'(0)] V_2 + \right. \\ &\quad \left. \left[ k(\mu + \gamma) - k\varphi'(0) - \frac{\gamma}{2} - \frac{k\varphi_c}{2} \right] V_2^2 \right\} dx \equiv: -g(t) - h(t). \end{aligned}$$

取  $k > 0$  使得  $\mu - \frac{\gamma}{2} - \frac{k\varphi_c}{2} > 0$ ,  $k(\mu + \gamma) - k\varphi'(0) - \frac{\gamma}{2} - \frac{k\varphi_c}{2} > 0$ . 当

$$\mu > \gamma, \mu + \gamma - \varphi'(0) - \frac{\varphi_c}{2} > 0, \gamma / (2\mu + 2\gamma - 2\varphi'(0) - \varphi_c) < (2\mu - \gamma) / \varphi_c \quad (14)$$

取  $\gamma / (2\mu + 2\gamma - 2\varphi'(0) - \varphi_c) < k < (2\mu - \gamma) / \varphi_c$ , 所以  $E'(t) \leq -g(t) - h(t) < 0$ . 由定理 2 及  $V_1 = 1 - u_1$ ,  $V_2 = u_2 > 0$  知  $g'(t)$ ,  $h'(t)$  在  $[1, \infty)$  有界, 利用引理 1 得  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ . 即

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla V_1|^2 dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla V_2|^2 dx = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \int_\Omega 1 dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_\Omega 2 dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_\Omega 2 dx = 0 \end{aligned}$$

又由 Poincare 不等式知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (V_1 - V_1)^2 dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (V_2 - V_2)^2 dx = 0$$

其中  $V = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} dx$ ,  $i = 1, 2$  又因为

$$|\Omega| (V_1 - V_1^*)^2 = \int_{\Omega} (V_1 - V_1 + V_1 - V_1^*)^2 dx \leq 2 \int_{\Omega} (V_1 - V_1)^2 dx + 2 \int_{\Omega} (V_1 - V_1^*)^2 dx,$$

因此, 当  $t \rightarrow \infty$ ,  $V_1 \rightarrow V_1^*$ , 同理  $t \rightarrow \infty$ ,  $V_2 \rightarrow V_2^*$ . 又根据 (12) 式及  $V_1 = 1 - u_1$ ,  $V_2 = u_2$  得

$$\|V_i(\cdot, t)\|_{C^2(\Omega)} \leq C, \quad \forall t \geq 1, \quad C = C + 1$$

所以存在子列  $\{t_m\}$ ,  $t_m \rightarrow \infty$  和非负函数  $w_i \in C^2(\Omega)$ , 满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|V_i(\cdot, t_m) - w_i^*\|_{C^2(\Omega)} = 0, i = 1, 2$  则  $w_i$

$= V_i^*, i = 1, 2$  即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|V_i(\cdot, t_m) - V_i^*\|_{C^2(\Omega)} = 0, i = 1, 2$  由此及局部渐近稳定性结论可得, 在条件 (5)

和 (13) 下,  $(0, 0)$  是渐近稳定的, 即  $E_0 = (1, 0)$  是渐近稳定的.

为了得到问题 (3) 解的渐近行为, 我们给出:

引理 2<sup>[13]</sup> 令  $v \in C(\Omega \times [0, \infty)) \cap C^{2,1}(\Omega \times [0, \infty))$ ,  $v$  是下述标量问题的一个非负解,

$$\begin{cases} v_t - Dv = -Av(x, t) + f(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ v(x, t) = \xi(x, t), & (x, t) \in \Omega \times [-\tau, 0]. \end{cases}$$

其中  $A > 0$ ,  $f(x, t)$  是非负连续函数, 若当  $t \rightarrow \infty$ ,  $f(x, t) \rightarrow B$  在  $x \in \Omega$  内一致成立, 则  $v \rightarrow B/A$  在  $x \in \Omega$  内一致成立.

结合子问题 (4) 的稳定性结论和引理 2 得:

定理 5 问题 (3) 在  $R < 1$  时仅存在无病平衡点, 且当初值在一定范围内时, 在条件 (5)、(14) 下是渐近稳定的; 问题 (3) 在  $R > 1$  时存在惟一染病平衡点, 且在条件 (8) 下局部渐近稳定; 无病平衡点不稳定.

注 在小初值条件下, 当接触系数  $\phi$  充分小时, 无病平衡点是渐近稳定的.

## [参考文献]

- [1] Kermack W O, McKendrick A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics[J]. Proc Roy Soc, 1927, A115: 700-721.
- [2] Mena-Lorca J, Hethcote H W. Dynamic models of infectious diseases as regulators of population sizes[J]. J Math Biol, 1992, 30(7): 693-716.
- [3] Anderson R M, May R. Infectious Diseases of Human: Dynamics and Control[M]. Oxford: Oxford University Press, 1991: 50-86.
- [4] Liu W M, Levin S A, Lwasa Y. Influence of nonlinear incidence rate upon the behavior of SIRS epidemiological models[J]. J Math Biol, 1986, 23(2): 187-204.
- [5] Ruan S G, Wang W D. Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incident rate[J]. J Differ Equ, 2003, 188(1): 135-163.
- [6] Yuliyana, Kyrchko Konstantin Blyuss B. Global properties of a delayed SIR model with temporary immunity and nonlinear incident rate[J]. Nonlinear Analysis RWA, 2005, 6(3): 495-507.
- [7] Ladyzenskaja O A, Sobolev V A, Ural'tseva N N. Linear and quasilinear equations of parabolic type[J]. Providence: RI: Amer Math Soc, 1968: 105-219.
- [8] Pao C V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations[M]. New York: Plenum Press, 1992: 96-98.
- [9] Pang P Y H, Wang M X. Strategy and stationary pattern in a three-species predator-prey model[J]. J Differ Equ, 2004, 200(2): 245-273.
- [10] Wu J H. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations: Applied Mathematical Science[M]. New York: Springer-Verlag, 1996: 71-72.
- [11] 王明新. 非线性抛物方程[M]. 北京: 科学出版社, 1993: 121-122.
- [12] Brown K J, Dunne P C, Gardner R A. A semilinear parabolic system arising in the theory of superconductivity[J]. J Differ Equ, 1981, 40(2): 232-252.
- [13] 许飞, 侯燕, 林支桂. 带时滞的具有阶段结构的捕食抛物型方程组[J]. 数学学报, 2005, 48(6): 1121-1130.

[责任编辑: 丁 蓉]