一类拟线性椭圆型方程基态解的存在性

尉 琳[1], 杨作东[1,2]

(1. 南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210046)
(2. 南京师范大学中北学院, 江苏 南京 210046)

[摘要] 讨论了一类拟线性椭圆型方程

$$-\Delta_p u = f(x, u) \text{ 在 } \mathbf{R}^N \text{ 中},$$

其中$f(x, u)$是局部Hölder连续函数. 通过对$f(x, u)$建立适当的条件讨论了方程基态解的存在性, 并且非线性项$f(x, u)$当$u \to 0^+$时可能出现奇异.

[关键词] 基态解, 存在性, 拟线性椭圆型方程
[中图分类号] O175.6 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009)04-0024-05

Existence of Ground State Solutions to a Quasilinear Elliptic Equations

Wei Lin[1], Yang Zuodong[1,2]

(1. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)
(2. College of Zhongbei, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

Abstract This paper proves the existence of a ground state solution for the quasilinear elliptic equation $-\Delta_p u = f(x, u)$ on $\mathbf{R}^N$ under suitable conditions on a locally Hölder continuous nonlinearity $f(x, u)$. The non-linearity may exhibit a singularity as $u \to 0^+$.

Key words ground state solution, existence, quasilinear elliptic equation

本文讨论了方程

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x, u) \text{ 在 } \mathbf{R}^N, \\ u > 0 \text{ 在 } \mathbf{R}^N, \\ u(x) \to 0 \text{ 当 } |x| \to \infty \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性, 其中 $1 < p < N$, $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$是$p$-拉普拉斯算子, $f: \mathbf{R}^N \times (0, \infty) \to [0, \infty)$是局部Hölder连续函数, 并且在$u = 0$可能出现奇异.

此类问题出现在非牛顿流[1,2]和非牛顿渗流[3]等流体理论的研究中, 数量p代表介质的特性. 当$p > 2$时, 称为膨胀流; 当$p < 2$时, 称为伪塑流; 当$p = 2$时, 称为牛顿流. 当$p \neq 2$时, 问题就变得更复杂, 因为$p = 2$时某些好的性质不再适用或者很难证明, $p = 2$和$p \neq 2$的不同点可以参考[4-6, 7, 8].

当$p = 2$时, $\mathbf{R}^N$被有界光滑域Ω且边界为Dirichlet边界条件所替代的这种问题已被广泛研究过. 最近对基态解的研究引起了很多关注, 得到了许多存在性的结果[9-19]. 然而在大部分文献中, 重点研究的是非线性项分离的情形, 形如$f(x, u) = b(x)g(u)$. 在文献[20]中, Lazer和Mckenna研究了$f(x, u) = b(x)u^{-\gamma}$, 其中$b \in C(\bar{\Omega})$, 在$\bar{\Omega}$, $b > 0$, 证明了对任意的$\gamma > 0$, 古典解$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$的存在性, 继而研究了$u \in W_0^{1,2}(\Omega)$当且仅当$\gamma < 3$. 这个问题在文献[21]中并有进一步的研究.

最近, Dragos-Patru Covei在文献[22]考虑了问题

收稿日期: 2009-09-11.
基金项目: 国家自然科学基金(10871060)、江苏省高校自然科学基金(08KJB110005)资助项目.
通讯联系人: 杨作东, 教授, 博士生导师, 研究方向: 非线性微分方程. E-mail: yangzuodong@njnu.edu.cn

$$\begin{cases} -\Delta_p u = b(x)g(u) \text{ 在 } \mathbf{R}^N, \\ u > 0 \text{ 在 } \mathbf{R}^N, \\ u(x) \to 0 \text{ 当 } |x| \to \infty, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $b: \mathbf{R}^N \to (0, \infty)$ 满足:

[B-1] $b > 0$ 是 $\mathbf{R}^N$ 上 Hölder连续函数.

[B-2] $\varphi(r) = \max_{|x|=r} b(x)$,

$$0 < \int_1^\infty r^{1/(p-1)} \varphi^{1/(p-1)}(r) \mathrm{d}r < \infty, \quad 1 < p \le 2,$$

$$0 < \int_1^\infty r^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} \varphi(r) \mathrm{d}r < \infty, \quad 2 \le p < \infty.$$

$g: (0, \infty) \to (0, \infty)$ 是 $(0, \infty)$ 上局部利普希茨连续函数, 并且满足:

[G-1] $u \mapsto g(u)/u^{p-1}$ 在 $(0, \infty)$ 单调递减.

[G-2] $\lim\limits_{u \to 0} \frac{g(u)}{u^{p-1}} = +\infty$, $\lim\limits_{u \to \infty} \frac{g(u)}{u^{p-1}} = 0$

作者证明了问题(2)的存在性和渐近行为.

受以上结果的启发, 本文利用文献[22, 23]的方法把存在性的结果推广到拟线性问题(1)中, 其中 f 不一定是分离的.

1　主要结果

引理 1　如果 b 满足[B-1], [B-2], g 满足[G-1], [G-2], 则存在 $v \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$ 使得 $-\Delta_p v(x) \ge b(x)g(v(x))$, $v > 0$ 且当 $|x| \to \infty$ 时 $v(x) \to 0$

证明　首先我们构造一个正的径向对称函数 w, 使得 $-\Delta_p w = \varphi(r)$ $(r = |x|)$, 并且 $\lim\limits_{r \to \infty} w(r) = 0$ 通过直接计算可得

$$w(r) = K - \int_0^r \left[t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} \varphi(s) \mathrm{d}s \right]^{1/(p-1)} \mathrm{d}t,$$

其中

$$K = \int_0^\infty \left[t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} \varphi(s) \mathrm{d}s \right]^{1/(p-1)} \mathrm{d}t.$$

下面证明条件[B-2]可以推出 K 是有限的.

情形 1　$1 < p \le 2$, 所以 $1 \le \frac{1}{p-1} < \infty$, 由 Hardy不等式, 我们有

$$\int_0^{+\infty} \left[t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} \varphi(s) \mathrm{d}s \right]^{1/(p-1)} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{\frac{-(N-1)}{p-1}} \left[\int_0^t s^{N-1} \varphi(r) \mathrm{d}s \right]^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{d}t$$

$$\le \left[\frac{1}{p-1} \left(\frac{N-p}{p-1} \right)^{-1} \right]^{1/(p-1)} \int_0^{+\infty} t^{\frac{-(N-1)}{p-1}} \left(t^{N-1} \varphi(t) \right)^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{d}t = \left(\frac{1}{N-p} \right)^{\frac{1}{p-1}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p-1}} \varphi^{\frac{1}{p-1}}(t) \mathrm{d}t < \infty.$$

情形 2　$2 < p < \infty$, 有 $0 < \frac{1}{p-1} < 1$

令

$$\int_0^\delta s^{N-1} \varphi(s) \mathrm{d}s \le 1, \quad \delta > 0,$$

或者

$$\int_0^\delta s^{N-1} \varphi(s) \mathrm{d}s > 1, \quad \delta > 0.$$

第一种情况:

$$\left[\int_0^\delta s^{N-1} \varphi(s) \mathrm{d}s \right]^{\frac{1}{p-1}} \le 1,$$

所以

$$\int_0^r \tau^{\frac{1-N}{p-1}} [\int_0^\tau s^{N-1} (\ ) \mathrm{d}]^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{d} \quad \int_0^r \tau^{\frac{1-N}{p-1}} \mathrm{d} = \frac{p-1}{p-N} r^{\frac{p-N}{p-1}}. \quad (p < N)$$

第二种情况:

$$[\int_0 \ ^{N-1} (\ ) \mathrm{d}]^{\frac{1}{p-1}} \quad \int_0 \ ^{N-1} (\ ) \mathrm{d},$$

当　0,有

$$\int_0^r \ ^{\frac{1-N}{p-1}} [\int_0 \ ^{N-1} (\ ) \mathrm{d}]^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{d} \quad \int_0^r \ ^{\frac{1-N}{p-1}} \int_0 \ ^{N-1} (\ ) \mathrm{d} \ \mathrm{d},$$

分部积分得

$$\int_0^r \ ^{\frac{1-N}{p-1}} \int_0 \ ^{N-1} (\ ) \mathrm{d} \ \mathrm{d} = \frac{p-1}{N-p} (\int_0^r \ ^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} (\ ) \mathrm{d} - r^{\frac{p-N}{p-1}} \int_0^r \ ^{N-1} (\ ) \mathrm{d}) < \quad .$$

其次考虑函数 $\bar{g}(y) = (g(y)+1)^{1/(p-1)}$, $y > 0$,其中 $g(y) = y^p / \int_0^y \frac{t^{p-1}}{g(t)} \mathrm{d}t$.

[g-1] $\bar{g}(y) \quad g^{1/(p-1)}(y)$, $y \mapsto \bar{g}(y)/y^{p-1}$在$(0,\ \ )$上单调递减.

[g-2] $\lim_{y \ 0} \bar{g}(y)/y = \ \ $, $\lim_{y} \bar{g}(y)/y = 0$

假设 v是一个正函数,使得 $w(r) = \frac{1}{c} \int_0^{v(r)} t^{p-1} / \bar{g}(t) \mathrm{d}t$,其中 c是正常数使得 $Kc \quad \int_0^{c^{1/(p-1)}} t^{p-1} / \bar{g}(t) \mathrm{d}t$.

下面证明可以找到这样的 $c > 0$满足这个性质. 由假设条件[g-2]得 $\lim_{x} \int_0^x t^{p-1} \bar{g}(t) \mathrm{d}t = +\ \ $,运用洛必达法则可得

$$\lim_{x} \frac{1}{x^{p-1}} \int_0^x \frac{t^{p-1}}{\bar{g}(t)} \mathrm{d}t = \lim_{x} \frac{x}{(p-1)\bar{g}(x)} = + \quad .$$

从而推出存在 $x_1 > 0$,对所有的 $x \quad x_1$,使得 $\int_0^x t^{p-1} / \bar{g}(y) \mathrm{d}t \quad Kx^{p-1}$成立,从而得到对任意的 $c \quad x_1$,有

$$Kc \quad \int_0^{c^{1/(p-1)}} \frac{t^{p-1}}{\bar{g}(t)} \mathrm{d}t.$$

由 w是一个单调递减函数,可得 v也是一个单调递减函数. 则对所有的 $r > 0$有

$$\int_0^{v(r)} \frac{t^{p-1}}{\bar{g}(t)} \mathrm{d}t \quad \int_0^{v(0)} \frac{t^{p-1}}{\bar{g}(t)} \mathrm{d}t = cw(0) = cK \quad \int_0^{c^{1/(p-1)}} \frac{t^{p-1}}{\bar{g}(t)} \mathrm{d}t,$$

$v(r) \quad c^{1/(p-1)}$. 由 $\lim_{r +} w(r) = 0$,可得 $\lim_{r +} v(r) = 0$. 由 v的选择,可得

$$_p w = \frac{1}{c^{p-1}} \left(\frac{v^{p-1}}{\bar{g}(v)} \right)^{p-1} \ _p v + (p-1) \frac{1}{c^{p-1}} | \quad v |^p \left(\frac{v^{p-1}}{\bar{g}(v)} \right)^{p-2} \left(\frac{v^{p-1}}{\bar{g}(v)} \right) \quad , \tag{3}$$

$y \quad \bar{g}(y)/y^{p-1}$在$(0,\ \ )$是单调递减函数,由(3)式推得

$$_p v \quad c^{p-1} \left(\frac{\bar{g}(v)}{v^{p-1}} \right)^{p-1} \ _p w = - c^{p-1} \left(\frac{\bar{g}(v)}{v^{p-1}} \right)^{p-1} \ (r) \quad - g(v) \quad (r) \quad - g(v) b(x).$$

从而完成了这个引理的证明.

为了证明主要结果,考虑以下 Dirchlet问题

$$\begin{cases} - \ _p w = b(x) \text{在} \ \ , \\ w > 0 \text{在} \ \ , \\ w(x) = 0 \text{在} \ \ , \end{cases} \tag{4}$$

其中　$\mathbf{R}^N$ 是有界光滑域.

引理 2　令　$\mathbf{R}^N$是有界光滑域,f满足下面条件:

[F-1] 对几乎处处 x　,函数 $u \quad f(x, u)$在$[0,\ \ )$上是非负连续函数且函数 $u \quad f(x, u)/u^{p-1}$在$(0,\ \ )$上是单调递减的;

[F-2] 对任意 $u \quad 0$,函数 $x \quad f(x, u) \quad L(\ \ )$;

[F-3] 对几乎处处 x　　和任意 $u \quad 0$,存在 $C > 0$,使得 $f(x, u) \quad C(u^{p-1}+1)$;

[F－4] $\lim_{u\to 0}\frac{f(x,u)}{u^{p-1}}=+\infty$, $\lim_{u\to\infty}\frac{f(x,u)}{u^{p-1}}=0$;

[F－5] 对任意 $(x,s)\in\mathbf{R}^N\times(0,\infty)$, 有 $f(x,s)\le b(x)g(s)$,

则问题

$$\begin{cases}-\Delta_p u(x)=f(x,u)\ 在\ \Omega,\\ u(x)=0\ 在\ \partial\Omega\end{cases}\tag{5}$$

有一个正解 $u\in C^1(\bar\Omega)$.

证明　令 $w(r)=\frac{1}{c}\int_0^{v(r)}\frac{t^{p-1}}{g(t)}\mathrm{d}t$ 如引理 1所定义, 则在 $\partial\Omega$ 上 $v=0$ 由引理 1, 可得

$$-\Delta_p v(x)\ge b(x)g(v(x)),\quad x\in\Omega.$$

由条件 [F－5], 有

$$-\Delta_p v(x)\ge f(x,v),\tag{6}$$

显然, $u=0$ 满足

$$-\Delta_p u(x)\le f(x,u).\tag{7}$$

由文献 [24] 的结果, 问题 (5) 有惟一正解, 由弱解的内部正则性, 可推出 $u(x)\in C^1(\bar\Omega)$.

根据 (6) 和 (7) 式, 可得 $0<u(x)\le v(x)$.

下面我们给出主要的定理.

定理 1　如果 f 满足 [F－1]、[F－2]、[F－3]、[F－4]、[F－5], b 满足 [B－1]、[B－2], g 满足 [G－1]、[G－2], 则问题 (1) 有一个解 $u\in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$.

证明　对每个正整数 K, 令 $B_K=B(0,K)$ 是以原点为圆心 K 为半径的球. 由引理 2, 对每个正整数 K, 可令 $u_K\in C^1(\bar B_K)$ 是方程

$$\begin{cases}-\Delta_p u(x)=f(x,u)\ 在\ B_K,\\ u(x)=0\ 在\ \partial B_K\end{cases}\tag{8}$$

的一个解, 则在 B_K 上有 $0<u_K\le v_K$, 其中 v_K 是按引理 2中相对应球 B_K 定义的. 对所有的 $K\ge 1$, 在 B_K 上有 $v\ge v_K$, 于是对所有的 $x\in\Omega$ 和所有的 K,

$$0<u_K\le v(x).\tag{9}$$

由常规方法[22], 我们得出 $\{u_K\}_1^\infty$ 有一个子序列一致收敛到 $C(\bar\Omega)$ 上的函数. 由对角线法得 $\{u_K\}$ 有一个子序列在 $\mathbf{R}^N$ 有界区域中一致收敛到 $u\in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$, 于是 u 是方程 (1) 的解. 由 $0<u\le v$, 可得 当 $|x|\to\infty$ 时, 有 $u(x)\to 0$.

[参考文献]

[1] Astrita G, Marrucci G. Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics[M]. New York: McGraw-Hill, 1974.

[2] Martinson L K, Pavlov K B. Unsteady shear flows of a conducting fluid with a rheological power law[J]. Magnit Gidrodinamika, 1971, 2: 50-58.

[3] Esteban J R, Vazquez J L. On the equation of turbulent filtration in one-dimensional porous media[J]. Nonlinear Anal, 1982, 10: 1303-1325.

[4] Guo Z M. Existence and uniqueness of the positive radial solutions for a class of quasilinear elliptic equations[J]. Appl Anal, 1992, 47(1): 173-190.

[5] Guo Z M. Some existence and multiplicity results for a class of quasilinear elliptic equations[J]. Nonlinear Anal, 1992, 18(10): 957-971.

[6] Guo Z M, Webb J R L. Uniqueness of positive solutions for quasilinear elliptic equations when a parameter is large[J]. Proc R Soc Edinburgh, 1994, 124A(1): 189-198.

[7] 杨作东, 陆炳新. 一类拟线性椭圆型方程组爆破整体正对称解的存在性和解的结构[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2005, 28(1): 1-7.

[8] 周杰, 杨作东. 一类拟线性椭圆型方程正奇异解的能量估计[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2006, 29(1): 21-24.

[9] Dalmasso R. Solutions d equations elliptiques semi-linearies singulieres[J]. Ann Mat Pura Appl, 1998, 153: 191-201.

[10] Dinu T L. Entire solutions of sublinear elliptic equations in anisotropic media[J]. J Math Anal Appl, 2006, 322: 382-392.

[11] Edelson A L. Entire solutions of singular elliptic equations[J]. J Math Anal Appl, 1989, 139: 523-532.

[12] K El Mdelson. Entire bounded solutions for a class of sublinear elliptic equations[J]. Nonlinear Anal, 2004, 58: 205-218.

[13] Feng W, Liu X. Existence of entire solutions of a singular semilinear elliptic problem[J]. Acta Math Sinica, 2004, 20: 2983-2988.

[14] Ghergu M, R dulescu V D. Ground state solutions for the singular Lane-Emden-Fowler equation with sublinear convection term[J]. J Math Anal Appl, 2007, 333: 265-273.

[15] Kusano T, Swanson C A. Entire positive solutions of singular semilinear elliptic equations[J]. Japan J Math, 1985, 111: 145-155.

[16] Lair A V, Shaker A W. Entire solutions of singular semilinear elliptic problem[J]. J Math Anal Appl, 1996, 200: 498-505.

[17] Wu S, Yang H. The existence theorems for a class of sublinear elliptic equation in $\mathbf{R}^N$[J]. Acta Math Sinica, 1997, 13: 259-304.

[18] Zhang Z. A remark on the existence of entire solutions of a singular semilinear elliptic problem[J]. J Math Anal Appl, 1997, 215: 579-582.

[19] Zhang Z. A remark on the existence of positive entire solutions of a sublinear elliptic problem[J]. Nonlinear Anal, 2007, 67: 147-153.

[20] Lazer A C, Mckenna P J. On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem[J]. Proc Amer Math Soc, 1991, 111: 721-730.

[21] Gui G, Lin F H. Regularity of an elliptic problem with singular nonlinearity[J]. Proc Roy Soc Ediburgh, 1993, 123: 1021-1029.

[22] Dragos-Patru Covei. Existence and asymptotic behavior of positive solution to a quasilinear elliptic problem in $\mathbf{R}^N$[J]. Nonlinear Anal, 2008, 69: 2615-2622.

[23] Mohammed A. Ground state solutions for singular semilinear elliptic equations[J]. Nonlinear Anal, 2009, 71: 1276-1280.

[24] Diaz J I, Sa J E. Existence et unicite de solutions positive pour certaines equations elliptic quasilinearies[J]. CRAS 305 Serie, 1987, 1: 521-524.

[责任编辑: 丁 蓉]