第 32卷第 4期 南京师大学报 (自然科学版) Vol. 32 No. 4
2009年 12月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition) Dec, 2009

相容和弱相容映射的几个新的公共不动点定理

葛仁福[1], 方锦暄[2]

(1. 连云港高等师范专科学校, 江苏 连云港 222006)
(2. 南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210046)

[摘要] 证明了 Menger空间上相容和弱相容映射在 -压缩条件下的两个新的公共不动点定理. 作为它们的推论, 还得到了度量空间上相容和弱相容映射的两个有趣的不动点定理.

[关键词] Menger空间, -压缩, 相容映射, 弱相容映射, 公共不动点
[中图分类号] O177.99 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009)04-0029-07

Some New Common Fixed Point Theorems of Compatible and Weakly Compatible Mappings

Ge Renfu[1], Fang Jinxuan[2]

(1. Lianyungang Teachers College, Lianyungang 222006, China)
(2. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

Abstract In this paper, two new common fixed point theorems for compatible and weakly compatible self-maps on Menger space under -contractive conditions are proved. As their applications, we also obtain two interesting fixed point theorems in metric spaces.

Key words Menger spaces, -contraction, compatible maps, weakly compatible maps, common fixed point

众所周知, Menger概率度量空间 (简称 Menger空间) 是度量空间的重要推广[1-3]. Menger空间中的不动点理论可以认为是概率分析的重要组成部分, 是当今一个很活跃的数学研究领域[4].

最近, 本文的第二作者[5], 对于 Menger空间上满足 -压缩条件的相容映射和弱相容映射证明了几个公共不动点定理, 改进并推广了 Mishra[6], Jungck[7], Singh和 Jain[8]以及 Razani和 Shirdaryazdi[9]等的相应结果.

本文的主要目的是要在另一种形式的 -压缩条件下, 对 Menger空间上的相容映射和弱相容映射, 建立两个新的公共不动点定理. 作为它们的直接推论, 我们还得到了度量空间上相容映射和弱相容映射的两个有趣的不动点定理.

1 基本定义及引理

在本文中, 设 $I = [0, 1]$, $\mathbf{R} = (- \quad, + \quad)$, $\mathbf{R}_+ = [0, + \quad)$, 以及 $\mathbf{N}$是自然数集. 映射 $F: \mathbf{R} \quad I$称为分布函数, 如果它是不减、左连续的, 且 $\inf_{t \mathbf{R}} F(t) = 0$, $\sup_{t \mathbf{R}} F(t) = 1$. 我们用 $\mathscr{D}$表示所有分布函数的集合. $\mathscr{D}_0 = \{F \quad \mathscr{D} \mid F(0) = 0\}$. H 是一个特殊的分布函数, 定义如下:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \quad 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

我们称映射 $: [0, 1] \quad [0, 1] \quad [0, 1]$ 为一个三角模 (简称 t-模), 如果它满足以下条件: $(a, 1) = a$; $(a, b) = (b, a)$; $a \quad b, c \quad d \quad (a, c) \quad (b, d)$; $(a, (b, c)) = ((a, b), c)$.

收稿日期: 2009-10-12
基金项目: 国家自然科学基金 (10671094) 资助项目.
通讯联系人: 方锦暄, 教授, 研究方向: 泛函分析. E-mail: jxfang@njnu.edu.cn

定义 **1**[1,10]　设 X 是非空集,　是一个 t-模, $\mathscr{F}$是一个 X　X 到 $\mathscr{D}_0$的映射, 记 $\mathscr{F}(x, y) = F_{x,y}, x, y$　E. 如果满足以下条件:

(1) $F_{x,y}(t) = H(t)$(　t　$\mathbf{R}$) 当且仅当 $x = y$;

(2) $F_{x,y}(t) = F_{y,x}(t)$,　t　$\mathbf{R}$;

(3) $F_{x,y}(t+s)$　　$(F_{x,z}(t), F_{z,y}(s))$,　x, y, z　E, t, s　0

则称三元组 $(X, \mathscr{F},\ )$ 为 Menger概率度量空间(简称 Menger空间).

注 **1**　Schweizer等指出: 如果 t-模　满足条件 $\sup\limits_{0<t<1}\ (t, t) = 1$, 则 Menger空间 $(X, \mathscr{F},\ )$上存在惟一的拓扑　, 使得 $(X,\ )$ 是一个 Hausdorff拓扑空间, 且集族 $\{U_p(\ ,\ ): \ > 0,\ \ (0, 1]\}$ $(p$　$X)$ 是点 p 的邻域基, 其中

$$U_p(\ ,\ ) = \{x\ \ X \mid F_{x,p}(\ ) > 1 - \ \}.$$

这样的拓扑　, 称为 $(X, \mathscr{F},\ )$ 的 $(\ ,\ )$-拓扑[2,3].

依 $(\ ,\ )$-拓扑　, $(E, \mathscr{F},\ )$ 中可以引入以下概念: X 中的点列 $\{x_n\}$ 称为　-收敛于 x　X, 记为 x_n　x, 如果 $\lim\limits_n F_{x_n,x}(t) = 1$,　$t > 0$; 称 $\{x_n\}$ 为 $(X, \mathscr{F},\ )$ 中的　-Cauchy列, 如果对任给的　> 0和　　$(0, 1]$, 存在 $N = N(\ ,\ )$　$\mathbf{N}$, 使得当 n, m　N 时, 有 $F_{x_n,x_m}(\ ) > 1 -\ $; $(X, \mathscr{F},\ )$ 称为是　-完备的, 如果 X 中每个　-Cauchy列都　-收敛.

以下总假设 $(X, \mathscr{F},\ )$ 是一个具有 $(\ ,\ )$-拓扑　的 Menger空间.

引理 **1**[11]　设 (X, d) 是一个度量空间. 定义映射 $\mathscr{F}: X$　X　　$\mathscr{D}$ 如下:

$$\mathscr{F}(x, y)(t) = F_{x,y}(t) = H(t - d(x, y)),\quad x, y\ \ X,\ t > 0 \tag{2}$$

则 $(X, \mathscr{F}, \min)$ 是一个 Menger空间, 称为由度量空间 (X, d) 诱导出的 Menger空间. 并且, 它是　-完备的当且仅当 (X, d) 是完备的.

定义 **2**[4,12]　一个　t-模　称为是 H-型的, 如果函数族 $\{\ ^m(t)\}_{m=1}$ 在　$t = 1$处是等度连续的, 其中

$$^1(t) = \ (t, t),\quad ^m(t) = \ (t,\ ^{m-1}(t)),\ m = 1, 2,\ \ ,\ t\ \ [0, 1].$$

显然, $_M = \min$是 H-型 t-模一个平凡例子. H-型 t-模的其它例子参见[4].

引理 **2**[13]　设 $(X, \mathscr{F},\ )$ 是一个 Menger空间. 对每个　　$(0, 1]$, 定义一个函数 $d: X$　X　　$\mathbf{R}^+$ 如下:

$$d\ (x, y) = \inf\{t > 0: F_{x,y}(t) > 1 - \ \}. \tag{3}$$

则以下结论成立:

(1) $d\ (x, y) < t$ 当且仅当 $F_{x,y}(t) > 1 - \ $;

(2) $d\ (x, y) = 0$ 对所有　　$(0, 1]$, 当且仅当 $x = y$;

(3) $d\ (x, y) = d\ (y, x)$ 对所有 x, y　X.

定义 **3**[5]　设　: $\mathbf{R}_+$　　$\mathbf{R}_+$ 是一个给定的函数, $^n(t)$ 表示　(t) 的第 n次迭代. (　-1), (　-2) 和 (　-3) 分别表示以下条件:

(　-1)　是不减的;

(　-1)　是严格增的;

(　-2)　是右上半连续的;

(　-3) 对所有 $t > 0$,　$\sum\limits_{n=0}\ ^n(t) < +\ $.

我们定义以下三个函数类 $_0$,　和 $_1$ 如下:

(1) $_0$ 是所有满足条件 (　-1) 和 (　-3) 的函数　: $\mathbf{R}^+$　　$\mathbf{R}^+$ 组成的函数.

(2)　是所有满足条件 (　-1) ~ (　-3) 的函数　: $\mathbf{R}^+$　　$\mathbf{R}^+$ 组成的函数.

(3) $_1$ 是所有满足条件 (　-1) 和 (　-3) 的函数　: $\mathbf{R}^+$　　$\mathbf{R}^+$ 组成的函数.

注 **2**　显然,　$_0$　,　$_0$　$_1$. 此外, 如果　　$_0$, 则对每个 $t > 0$,　$(t) < t$

引理 **3**[14]　设　　$_1$. 定义函数　: $\mathbf{R}^+$　　$\mathbf{R}^+$ 如下:

$$(t) = \ (t + 0) = \lim_{\ \ 0^+}\ (t + \ ),\ t\ \ \mathbf{R}^+,$$

则　　.

引理 **4**[15] 设 $(X, \mathscr{F}, \ )$ 是一个 Menger空间, 其中 是连续 t-模. $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是 X 中的两个点列, x_n x, y_n y 且 x y. 则

(1) $\lim\limits_{n} \inf F_{x_n, y_n}(x)$ $F_{x, y}(t)$, $t > 0$;

(2) $F_{x, y}(t + 0)$ $\lim\limits_{n} \sup F_{x_n, y_n}(x)$, $t > 0$.

定义 **4**[6] 设 S 和 T 是 Menger空间 $(X, \mathscr{F}, \ )$ 上的两个自映射. 如果满足: 对 X 中的任一点列 $\{x_n\}$, 当 $\lim\limits_{n} Sx_n = \lim\limits_{n} Tx_n = u$ X 时, 有 $F_{STx_n, TSx_n}(t)$ 1, $t > 0$, 则称映射对 (S, T) 是相容的.

定义 **5**[8] 设 S 和 T 是 Menger空间 $(X, \mathscr{F}, \ )$ 上的两个自映射. 如果它们在其重合点处可交换, 即如果对某个 u X, $Tu = Su$ 蕴涵 $TSu = STu$, 则称映射对 (S, T) 是弱相容的 (或重合可交换的).

注 **3** 两个相容的自映射一定是弱相容的, 但文 [8] 已证明其逆不真.

2 主要结果

为了得到本文的主要结果, 我们还需要下面几个引理:

引理 **5**[5] 设 $(X, \mathscr{F}, \ )$ 是 Menger空间, 其中 是一个 H-型 t-模. 又设 $\{y_n\}$ 是 X 中的一个点列. 如果存在函数 使得

$$F_{y_n, y_{n+1}}(\ (t)) \quad \min\{F_{y_{n-1}, y_n}(t), F_{y_n, y_{n+1}}(t)\}, \quad t > 0, \ n \quad \mathbf{N}. \tag{4}$$

则 $\{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy列.

引理 **6**[5] 设 $(X, \mathscr{F}, \ )$ 是 Menger空间, x, y X. 如果存在 使得

$$F_{x, y}(\ (t) + 0) \quad F_{x, y}(t), \quad t > 0,$$

则 $x = y$.

定理 **1** 设 $(X, \mathscr{F}, \ )$ 是一个 -完备的 Menger空间, 是一个连续的 H-型 t-模. 又设 P, Q, L 和 M 是 X 上的自映射. 如果满足以下条件:

(i) $L(X)$ $Q(X)$, $M(X)$ $P(X)$;

(ii) P 或 L 是连续的;

(iii) (L, P) 是相容的, (M, Q) 是弱相容的;

(iv) 存在 或 $_1$ 使得对所有的 x, y X 和 $t > 0$,

$$F_{Lx, My}(\ (t)) \quad \min\{F_{Px, Lx}(t), F_{Qy, My}(t), F_{Lx, Qy}(t), F_{Px, Qy}(t), F_{Px, \ }(t), F_{\ , My}(t)\}. \tag{5}$$

则 L, M, P 和 Q 在 X 中有惟一的公共不动点.

证明 设 x_0 X. 由条件 (i), 存在 x_1, x_2 X 使得 $Lx_0 = Qx_1 = y_0$, $Mx_1 = Px_2 = y_1$. 归纳地, 我们可以构造出 X 中的两个点列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 使得

$$Lx_{2n} = Qx_{2n+1} = y_{2n}, Mx_{2n+1} = Px_{2n+2} = y_{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2,$$

假设存在 使得 (5) 成立.

第 **1** 步 在 (5) 中取 $x = x_{2n}$, $y = x_{2n+1}$ 以及 $= y_{2n}$, 我们有

$$F_{y_{2n}, y_{2n+1}}(\ (t)) = F_{Lx_{2n}, Mx_{2n+1}}(\ (t)) \quad \min\{F_{Px_{2n}, Lx_{2n}}(t), F_{Qx_{2n+1}, Mx_{2n+1}}(t), F_{Lx_{2n}, Qx_{2n+1}}(t),$$
$$F_{Px_{2n}, Qx_{2n+1}}(t), F_{Px_{2n}, y_{2n}}(t), F_{y_{2n}, Mx_{2n+1}}(t)\} = \min\{F_{y_{2n-1}, y_{2n}}(t), F_{y_{2n}, y_{2n+1}}(t), F_{y_{2n}, y_{2n}}(t),$$
$$F_{y_{2n-1}, y_{2n}}(t), F_{y_{2n-1}, y_{2n}}(t), F_{y_{2n}, y_{2n+1}}(t)\} = \min\{F_{y_{2n-1}, y_{2n}}(t), F_{y_{2n}, y_{2n+1}}(t)\}.$$

类似地, 我们可以证明

$$F_{y_{2n+1}, y_{2n+2}}(\ (t)) \quad \min\{F_{y_{2n}, y_{2n+1}}(t), F_{y_{2n+1}, y_{2n+2}}(t)\}.$$

这表明对所有的 n $\mathbf{N}$, 我们有

$$F_{y_n, y_{n+1}}(\ (t)) \quad \min\{F_{y_{n-1}, y_n}(t), F_{y_n, y_{n+1}}(t)\}, \ n = 1, 2,$$

于是, 由引理 5知, $\{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy列. 因为 $(X, \mathscr{F}, \ )$ 是 -完备的, 我们可以设 y_n z X, 所以它的子列也收敛于 z, 故有

$$\lim_{n} Lx_{2n} = \lim_{n} Px_{2n} = \lim_{n} Qx_{2n+1} = \lim_{n} Mx_{2n+1} = z \tag{6}$$

现在, 我们证明 z 是 L, M, P 和 Q 的一个公共不动点.

情形 I 假设 P 是连续的. 由 (6), 我们有 PLx_{2n} Pz 和 PPx_{2n} Pz. 注意到 (L, P) 是相容的, 所以

$F_{LPx_{2n}, PLx_{2n}}(t)$　　1,　　$t > 0$,从而有

$$F_{lPx_{2n}Pz}(t) \quad \{F_{LPx_{2n}, PLx_{2n}}(t/2), F_{PLx_{2n}Pz}(t/2)\} \quad 1(n \quad).$$

这表明 LPx_{2n}　　Pz.

第 **2**步　在(5)中取 $x = Px_{2n}$, $y = x_{2n+1}$ 以及　$= z$,我们有

$$F_{LPx_{2n}Mx_{2n+1}}(\ (t)) \quad \min\{F_{PPx_{2n}LPx_{2n}}(t), F_{Qx_{2n+1}, Mx_{2n+1}}(t), F_{lPx_{2n}Qx_{2n+1}}(t), F_{PPx_{2n}Qx_{2n+1}}(t), F_{PPx_{2n}z}(t), F_{zMx_{2n+1}}(t)\}.$$

令 n　　,由引理 4得

$$F_{Pz, z}(\ (t) + 0) \quad \min\{1, 1, F_{Pz, z}(t), F_{Pz, z}(t), F_{Pz, z}(t), 1\} = F_{Pz, z}(t), \quad t > 0,$$

据引理 6,上式蕴涵 $Pz = z$.

第 **3**步　在(5)中取 $x = z$, $y = x_{2n+1}$ 以及　$= z$,我们有

$$F_{Lz, Mx_{2n+1}}(\ (t)) \quad \min\{F_{Pz, Lz}(t), F_{Qx_{2n+1}, Mx_{2n+1}}(t), F_{Lz, Qx_{2n+1}}(t), F_{Pz, Qx_{2n+1}}(t), F_{Pz, z}(t), F_{zMx_{2n+1}}(t)\}.$$

当 n　　时,可得

$$F_{Lz, z}(\ (t) + 0) \quad \min\{F_{z, Lz}(t), 1, F_{Lz, z}(t), 1, 1, 1\} = F_{Lz, z}(t), \quad t > 0.$$

由引理 6,我们断定 $Lz = z$.因此, z是 L和 P的一个公共不动点.

第 **4**步　因为 $L(X)$　$Q(X)$,所以存在 v　X使得 $z = Lz = Qv$.在(5)中取 $x = x_{2n}$, $y = v$以及　$= z$,我们有

$$F_{Lx_{2n}Mv}(\ (t)) \quad \min\{F_{Px_{2n}, Lx_{2n}}(t), F_{Qv, Mv}(t), F_{Lx_{2n}Qv}(t), F_{Px_{2n}Qv}(t), F_{Px_{2n}z}(t), F_{zMv}(t)\} = \min\{F_{Px_{2n}Lx_{2n}}(t), F_{z, Mv}(t), F_{Lx_{2n}z}(t), F_{Px_{2n}z}(t), F_{Px_{2n}z}(t), F_{zMv}(t)\}.$$

令 n　　,由引理 4,我们得

$$F_{zMv}(\ (t) + 0) \quad \min\{1, F_{zMv}(t), 1, 1, 1, F_{zMv}(t)\} = F_{zMv}(t), \quad t > 0.$$

由引理 6推得 $Mv = z$.因而,我们有 $Qv = z = Mv$,即 v是 Q和 M的一个重合点.因为 (M, Q)是弱相容的,所以 $MQv = QMv$,从而有 $Mz = Qz$.

第 **5**步　在(5)中取 $x = x_{2n}$, $y =$　$= z$,我们有

$$F_{Lx_{2n}Mz}(\ (t)) \quad \min\{F_{Px_{2n}Lx_{2n}}(t), F_{Qz, Mz}(t), F_{Lx_{2n}Qz}(t), F_{Px_{2n}Qz}(t), F_{Px_{2n}z}(t), F_{zMz}(t)\} = \min\{F_{Px_{2n}Lx_{2n}}(t), 1, F_{Lx_{2n}Mz}(t), F_{Px_{2n}Mz}(t), F_{Px_{n}z}(t), F_{zMz}(t)\}.$$

令 n　　,由引理 4得

$$F_{zMz}(\ (t) + 0) \quad \min\{1, 1, F_{zMz}(t), F_{zMz}(t), 1, F_{zMz}(t)\} = F_{z, Mz}(t), \quad t > 0.$$

据引理 6,我们有 $z = Mz = Qz$.因此, z是 L, M, P和 Q的一个公共不动点.

情形 II　假设 L是连续的.注意到 Lx_{2n}　z和 Px_{2n}　z,我们有 L^2x_{2n}　Lz和 LPx_{2n}　Lz.因为 (L, P)是相容的,所以 $F_{PLx_{2n}, lPx_{2n}}(t)$　1,　$t > 0$.据此,容易证明 PLx_{2n}　Lz.

第 **6**步　在(5)中取 $x = Lx_{2n}$, $y = x_{2n+1}$ 以及　$= z$,我们有

$$F_{LLx_{2n}Mx_{2n+1}}(\ (t)) \quad \min\{F_{PLx_{2n}LLx_{2n}}(t), F_{Qx_{2n+1}, Mx_{2n+1}}(t), F_{LLx_{2n}Qx_{2n+1}}(t), F_{PLx_{2n}Qx_{2n+1}}(t), F_{PLx_{2n}z}(t), F_{zMx_{2n+1}}(t)\}.$$

令 n　　,由引理 4得

$$F_{Lz, z}(\ (t) + 0) \quad \min\{F_{Lz, Lz}(t), F_{z, z}(t), F_{Lz, z}(t), F_{Lz, z}(t), F_{Lz, z}(t), F_{z, z}(t)\} = F_{Lz, z}(t), \quad t > 0,$$

这意味着 $Lz = z$.由第 4步和第 5步,我们有 $z = Lz = Mz = Qz$.下面,只需证明 $Pz = z$.

第 **7**步　因为 $M(X)$　$P(X)$,所以存在 w　X使得 $z = Mz = Pw$.在(5)中取 $x = w$, $y = x_{2n+1}$以及　$= z$,我们得

$$F_{Lw, Mx_{2n+1}}(\ (t)) \quad \min\{F_{Pw, Lw}(t), F_{Qx_{2n+1}, Mx_{2n+1}}(t), F_{Lw, Qx_{2n+1}}(t), F_{Pw, Qx_{2n+1}}(t), F_{Pw, z}(t), F_{z, Wx_{2n+1}}(t)\} = \min\{F_{z, Lw}(t), F_{Qx_{2n+1}, Mx_{2n+1}}(t), F_{Lw, Qx_{2n+1}}(t), F_{z, Qx_{2n+1}}(t), F_{z, z}(t), F_{z, Wx_{2n+1}}(t)\}.$$

令 n　　,由引理 4得

$$F_{Lw, z}(\ (t) + 0) \quad \min\{F_{z, Lw}(t), 1, F_{Lw, z}(t), 1, 1\} = F_{Lw, z}(t), \quad t > 0,$$

这意味着 $Lw = z = Pw$.注意到 (L, P)是相容的,因而也是弱相容的.所以 $Pz = PLw = LPw = Lz = z$.

这证明了 z 是 L, M, P 和 Q 的一个公共不动点.

第 **8** 步　证明惟一性. 设 u 是 L, M, P 和 Q 的另一个公共不动点. 则 $Lu = Mu = Pu = Qu = u$. 于是, 通过在 (5) 中取 $x = z$ 和 $y = \quad = u$, 我们有

$$F_{zu}(\quad(t)) = F_{Lz, Mu}(\quad(t)) \quad \min\{F_{Pz, Lz}(t), F_{Qu, Mu}(t), F_{Lz, Qu}(t),$$

$$F_{Pz, Qu}(t), F_{Pz, u}(t), F_{u, Mu}(t)\} = \min\{1, 1, F_{zu}(t), F_{zu}(t), F_{zu}(t), 1\} = F_{zu}(t), \qquad t > 0$$

这意味着 $z = u$. 因此, z 是 L, M, P 和 Q 的惟一公共不动点.

假设存在 $\quad_1$ 使得 (5) 成立. 我们定义一个新的函数 $\quad: \mathbf{R}^+ \quad \mathbf{R}^+$ 如下: $\quad(t) = \quad(t + 0)$, $t \quad \mathbf{R}^+$. 由引理 3知, . 此外, 利用 的定义及 (5), 对所有的 x, y, $\quad X$ 和 $t > 0$, 我们有

$$F_{Lx, My}(\quad(t)) = F_{Lx, My}(\quad(t + 0)) \quad F_{Lx, My}(\quad(t))$$

$$\min\{F_{Px, Lx}(t), F_{Qy, My}(t), F_{Px, Qy}(t), F_{Qy, Lx}(t), F_{Px, \quad}(t), F_{\quad, My}(t)\}.$$

这表明函数 也满足条件 (5). 因此, 在 $\quad_1$ 情形下的结论, 可由上面的讨论推得.

利用定理 1, 我们可以证明下面一个涉及 X 上 6个自映射的公共不动点定理:

定理 2　设 $(X, \mathcal{F}, \quad)$ 是一个 –完备的 Menger空间, 是一个连续的 H–型 t–模. 又设 A, B, S, T, L and M 是 X 上的自映射. 如果满足以下条件:

(a) $L(X) \quad ST(X)$, $M(X) \quad AB(X)$;

(b) $AB = BA$, $ST = TS$, $LB = BL$, $MT = TM$;

(c) AB 或 L 是连续的;

(d) (L, AB) 是相容的, 而 (M, ST) 是弱相容的;

(e) 存在函数 或 $\quad_1$ 使得对所有的 x, y, $\quad X$ 和 $t > 0$,

$$F_{Lx, My}(\quad(t)) \quad \min\{F_{ABx, Lx}(t), F_{STy, My}(t), F_{ABx, STy}(t),$$

$$F_{STy, Lx}(t), F_{ABx, \quad}(t), F_{\quad, My}(t)\} \tag{7}$$

则 A, B, S, T, L 和 M 在 X 中有惟一的公共不动点.

证明　令 $P = AB$ 和 $Q = ST$, 容易看出定理 2的条件 (a) 和 (c) ~ (e) 蕴涵定理 1的条件 (i) ~ (iv). 因此, 据定理 1, L, M, P 和 Q 在 X 中有惟一的公共不动点 z, 即

$$Lz = Mz = Pz = Qz = z \tag{8}$$

下面, 我们将证明 z 也是 A 和 B 的公共不动点. 由 (8) 及条件 (b), 我们有 $LBz = BLz = Bz$ 和 $PBz = (AB)Bz = (BA)Bz = B(AB)z = BPz = Bz$. 于是, 在 (7) 中取 $x = \quad = Bz$ 和 $y = z$, 我们有

$$F_{Bz, z}(\quad(t)) = F_{LBz, Mz}(\quad(t)) \quad \min\{F_{PBz, LBz}(t), F_{Qz, Mz}(t), F_{PBz, Qz}(t),$$

$$F_{Qz, LBz}(t), F_{PBz, Bz}(t), F_{Bz, Mz}(t)\} = \min\{1, 1, F_{Bz, z}(t), F_{z, Bz}(t), 1, F_{Bz, z}(t)\} = F_{Bz, z}(t),$$

这意味着 $Bz = z$, 从而 $z = Pz = ABz = Az$. 因此, z 是 A 和 B 的公共不动点.

不难证明 z 也是 T 和 S 的公共不动点. 事实上, 由 (8) 和条件 (b), 我们有 $MTz = TMz = Tz$ 和 $QTz = (ST)Tz = (TS)Tz = TQz = Tz$. 在 (7) 中取 $x = \quad = z$ 和 $y = Tz$, 我们得

$$F_{z, Tz}(\quad(t)) = F_{Lz, MTz}(\quad(t)) \quad \min\{F_{Pz, Lz}(t), F_{QTz, MTz}(t), F_{Pz, QTz}(t),$$

$$F_{QTz, Lz}(t), F_{Pz, z}(t), F_{z, MTz}(t)\} = \min\{1, 1, F_{z, Tz}(t), F_{Tz, z}(t), 1, F_{z, Tz}(t)\} = F_{z, Tz}(t), \qquad t > 0$$

这意味着 $Tz = z$, 从而 $Sz = STz = Qz = z$, 故 z 也是 T 和 S 的公共不动点. 因此, z 是 A, B, S, T, L 和 M 的公共不动点. 因为 z 是 P, Q, L 和 M 的惟一公共不动点, 所以容易看出 z 也是 A, B, S, T, L 和 M 的惟一公共不动点. 这完成了定理 2的证明.

注 4　特别地, 如果在定理 2中令 $B = T = I$, $S = Q$ 和 $A = P$, 则可以立即得到定理 1. 因此, 定理 1和定理 2实际上是等价的.

在定理 1和定理 2中取 $\quad = \quad_M = \min$, 可以得到下面两个推论:

推论 1　设 $(X, \mathcal{F}, \quad_M)$ 是一个 –完备的 Menger空间. P, Q, L 和 M 是 X 上的自映射, 满足以下条件:

(i) $L(X) \quad Q(X)$, $M(X) \quad P(X)$;

(ii) P 或 L 是连续的;

(iii) (L, P) 是相容的, (M, Q) 是弱相容的;

(iv) 存在函数 或 $\quad_1$ 使得对所有的 x, y I X 和 $t > 0$,

$$F_{Lx,My}(\varphi(t)) \geq \min\{F_{Px,Lx}(t), F_{Qy,My}(t), F_{Lx,Qy}(t), F_{Px,Qy}(t), F_{Px,My}(2t)\}. \quad (9)$$

则 P, Q, L 和 M 在 X 中有惟一的公共不动点.

证明　因为 $\Delta_M = \min$, 由 $(MS-3)$, 我们有

$$F_{Px,My}(2t) \geq \min\{F_{Px,N}(t), F_{N,My}(t)\}, \quad \forall x, y, N \in X, \quad t > 0.$$

所以不难看出(9)蕴涵(5). 从而, 推论 1的结论可由定理 1直接推得.

推论 2　设 $(X, \mathscr{F}, \Delta_M)$ 是一个 S-完备的 Menger空间. A, B, S, T, L 和 M 是 X 上的自映射, 满足定理 2的条件(a) ~ (c)及下面的条件

(e) 存在函数 $\varphi \in \Phi$ 或 $\varphi \in \Phi_1$ 使得对所有的 $x, y \in X$ 和 $t > 0$,

$$F_{Lx,My}(\varphi(t)) \geq \min\{F_{ABx,Lx}(t), F_{STy,My}(t), F_{Lx,STy}(t), F_{ABx,STy}(t), F_{ABx,My}(2t)\},$$

则 A, B, S, T, L 和 M 在 X 中有惟一的公共不动点.

证明　像推论 1的证明那样, 推论 2的结论可由定理 2直接推得.

作为定理 1和定理 2的直接推论, 我们还可以得到度量空间中关于相容映射和弱相容映射相应的两个公共不动点定理. 关于度量空间中相容映射和弱相容映射的定义可分别参见[16]和[7].

推论 3　设 P, Q, L 和 M 是完备度量空间 (X, d) 上的自映射, 满足以下条件:

(a) $L(X) \subset Q(X)$, $M(X) \subset P(X)$;

(b) P 或 L 是连续的;

(c) (L, P) 是相容的, (M, Q) 是弱相容的;

(d) 存在函数 $\varphi \in \Phi_1$ 使得 $d(Lx, My) \leq \varphi(G(x, y, N))$, $\forall x, y, N \in X$, 其中

$$G(x, y, N) = \max\{d(Px, Lx), d(Qy, My), d(Lx, Qy), d(Px, Qy), d(Px, N), d(N, My)\},$$

则 L, M, P 和 Q 在 X 中有惟一的公共不动点.

证明　设 $(X, \mathscr{F}, \Delta_M)$ 是由 (X, d) 诱导出的 Menger空间, 其中 F 由(2)定义. 根据引理 1, 容易看出推论 3的条件(a) ~ (c)可推出定理 1的条件(i) ~ (iii). 剩下的只需要证明推论 3的条件(d)蕴涵定理 1的条件(iv).

由(2)知, 诱导的 Menger空间中, 每个分布函数 $F_{u,v}(\cdot)$ $(u, v \in X)$ 仅取 0或 1值. 所以, 不失一般性, 我们可以假设

$$\min\{F_{Px,Lx}(t), F_{Qy,My}(t), F_{Lx,Qy}(t), F_{Px,Qy}(t), F_{Px,N}(t), F_{N,My}(t)\} = 1.$$

这意味着

$$d(Px, Lx) < t,\ d(Qy, My) < t,\ d(Lx, Qy) < t,\ d(Px, Qy) < t,\ d(Px, N) < t,\ d(N, My) < t.$$

于是, 我们有 $G(x, y, N) < t$. 注意到 $\varphi \in \Phi_1$ 是严格增的, 由条件(d)推得 $d(Lx, My) \leq \varphi(G(x, y, N)) < \varphi(t)$. 由(2)即知 $F_{Lx,My}(\varphi(t)) = 1$. 所以, 不等式(5)成立, 即条件(iv)成立. 因此, 推论 3的结论可由定理 1直接推得.

用同样的方法, 使用定理 2, 我们可以证明下面的推论.

推论 4　设 A, B, S, T, L 和 M 是完备度量空间 (X, d) 上的自映射, 满足如下条件:

(a) $L(X) \subset ST(X)$, $M(X) \subset AB(X)$;

(b) $AB = BA$, $ST = TS$, $LB = BL$, $MT = TM$;

(c) AB 或 L 是连续的;

(d) (L, AB) 是相容的, (M, ST) 是弱相容的;

(e) 存在函数 $\varphi \in \Phi_1$ 使得 $d(Lx, My) \leq \varphi(G_1(x, y, N))$, $\forall x, y, N \in X$, 其中

$$G_1(x, y, N) = \max\{d(ABx, Lx), d(STy, My), d(Lx, STy), d(ABx, STy), d(ABx, N), d(N, My)\},$$

则 A, B, S, T, L 和 M 在 X 中有惟一的公共不动点.

[参考文献]

[1] Schweizer B, Sklar A. Probabilistic Metric Spaces[M]. Amsterdam: North-Holland Publishers, 1983.

[2] Schweizer B, Sklar A. Statistical metric spaces [J]. Pacific J Math, 1960, 10: 313–334

[3] Schweizer B, Sklar A, Thorp E. The metrization of statistical metric spaces [J]. Pacific J Math, 1960, 10: 673–675.

[4] Hadžić O, Pap E. Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

[5] Fang J X. Common fixed point theorems of compatible and weakly compatible maps in Menger spaces [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71: 1833–1843.

[6] Mishra S N. Common fixed points of compatible mappings in PM-spaces [J]. Math Japonica, 1991, 36: 283–289.

[7] Jungck G, Rhoades B E. Fixed point for set valued functions without continuity [J]. Indian J Pure Appl Math, 1988, 29: 227–238.

[8] Singh B, Jain S. A fixed point theorem in Menger space through weak compatibility [J]. J Math Anal Appl, 2005, 301: 439–448.

[9] Razani A, Shirdaryazdi M. A common fixed point theorem of compatible maps in Menger space [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 32: 26–34.

[10] Menger K. Statistical metrics [J]. Proc Nat Acad Sci USA, 1942, 28: 535–537.

[11] Sehgal V M, Bharucha-Reid A T. Fixed points of contraction mappings in PM-spaces [J]. Math System Theory, 1972, 6: 97–102.

[12] Hadžić O. Fixed point theorems for multi-valued mappings in probabilistic metric spaces [J]. Mat Vesnik, 1979, 3: 125–133

[13] Fang J X. Fixed point theorems of local contraction mappinga on menger spaces [J]. Appl Math & Mech, 1991, 12: 363–372

[14] Fang J X. On fixed degree theorems for fuzzy mappings in Menger PM-spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157: 270–285

[15] Grabiec M. Fixed points in fuzzy metric spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1983, 27: 385–389.

[16] Jungck G. Compatible mappings and common fixed points [J]. Internat J Math & Math Sci, 1986, 9: 771–779.

[责任编辑: 丁 蓉]