弱 Hopf代数上的 β-特征代数

李彦超, 王　勇, 张良云

(南京农业大学理学院, 江苏 南京 210095)

[摘要] 考虑了弱 Hopf代数上的 β-特征代数. 当 H 是有限维弱 Hopf代数时, 给出了 $g\in C_\beta(H)$ ($C_\beta(H)$ 是 H^* 的 β-特征)的一个充要条件, 并研究了弱 Hopf代数上的 β-广义特征代数.

[关键词] 弱 Hopf代数, β-特征代数, 群像元素

[中图分类号] O153.3　[文献标识码] A　[文章编号] 1001-4616(2009)04-0036-06

β-Character Algebras Over Weak Hopf Algebras

Li Yanchao, Wang Yong, Zhang Liangyun

(College of Science, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210095, China)

Abstract The paper is concerned with the β-character algebras in the case of weak Hopf algebras. We present a sufficient and necessary condition that any element $g\in H^*$ is in the β-character algebra $C_\beta(H)$, where H is a finite dimensional weak Hopf algebra. Furthermore, we investigate the β-generalized character algebras over weak Hopf algebras.

Key words weak Hopf algebra, β-character algebra, group-like element

弱双代数和弱 Hopf代数[1]是通常的双代数和 Hopf代数的推广. 弱双代数和弱 Hopf代数主要是在余单位的乘法和单位的余乘法上进行了弱化. 关于弱 Hopf代数最早的例子是群代数 (groupoid algebra), 其它例子还有面代数 (face algebra), 量子群 (quantum groupoid)以及广义的 Kac代数 (generalized Kac algebra)[2-4]. 弱 Hopf代数的理论研究见文献 [1], 它的应用可以在文献 [3, 5, 6]中找到. 许多经典的 Hopf代数结果可以推广到弱 Hopf代数情形, 例如, 在文献 [5]中, Nikshych给出了弱模代数的对偶定理; 在文献 [6]中, 张良云和朱胜林给出了弱 Doi-Hopf模的基本定理, 它不仅推广了文献 [1]中的弱 Hopf模基本定理, 也推广了文献 [7]中相关 Hopf模基本定理; 在文献 [8]中, 张良云给出了弱模代数的 Maschke定理, 它推广了文献 [9]中著名的模代数的 Maschke定理.

本文的目的是给出弱 Hopf代数上的 β-特征代数的一些性质, 它主要推广了文献 [10]中的定理 3.3, 而且还给出了 β-广义特征代数的定义.

在文章中我们所考虑的对象总是在域 k 上的, 余代数和余模等一些概念和符号均参考文献 [11].

定义 1 设 H 既是代数又是域余代数. 如果 H 满足下面的条件 (1) – (3), 则称它是弱双代数[1,3,5]. 如果它满足条件 (1) – (4), 则称它是弱 Hopf代数, 并称 S 是它的弱对极.

对任意 $x, y, z\in H$,

$$\Delta(xy)=\Delta(x)\Delta(y),\tag{1}$$

$$\Delta^2(1_H)=(\Delta(1_H)\otimes 1_H)(1_H\otimes\Delta(1_H));\ \Delta^2(1_H)=(1_H\otimes\Delta(1_H))(\Delta(1_H)\otimes 1_H),\tag{2}$$

其中 $\Delta^2=(\Delta\otimes id_H)\circ\Delta$,

$$\varepsilon(xyz)=\sum\varepsilon(xy_1)\varepsilon(y_2z);\ \varepsilon(xyz)=\sum\varepsilon(xy_2)\varepsilon(y_1z),\tag{3}$$

$$\sum x_1S(x_2)=\sum\varepsilon(1_1x)1_2;\ \sum S(x_1)x_2=\sum 1_1\varepsilon(x1_2);\ \sum S(x_1)x_2S(x_3)=S(x),\tag{4}$$

其中 $\Delta(1_H)=\sum 1_1\otimes 1_2$.

收稿日期: 2009-03-06
基金项目: 国家自然科学基金 (10871170)、教育部科学技术重点研究 (108154)资助项目.
通讯联系人: 张良云, 教授, 博士生导师, 研究方向: Hopf代数与量子群. E-mail: zlyun@njau.edu.cn

对任意弱双代数 H，定义映射 $\Pi^L, \Pi^R: H \to H$ 如下：

$$\Pi^L(h) = \Sigma\varepsilon(1_1 h)1_2;\quad \Pi^R(h) = \Sigma 1_1\varepsilon(h1_2).$$

用 H^L 表示映射 Π^L 的像集 $\Pi^L(H)$，H^R 表示映射 Π^R 的像集 $\Pi^R(H)$。注意：H 是弱双代数，则 H 是通常的双代数当且仅当 $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$，或当且仅当 ε 是代数映射。

由文献[1]知下面的结果(W1)–(W6)成立。

(W1) 对任意 $h \in H$，$\Sigma h_1 \otimes \Pi^L(h_2) = \Sigma 1_1 h \otimes 1_2$；$\Sigma\Pi^R(h_1) \otimes h_2 = \Sigma 1_1 \otimes h1_2$。

(W2) $\Delta(1_H) = \Sigma 1_1 \otimes 1_2 \in H^R \otimes H^L$。

(W3) $S(H^L) \subseteq H^R$；$S(H^R) \subseteq H^L$。

(W4) 对任意 $h \in H$，由 $\Sigma\Pi^L(h_1) \otimes h_2 = \Sigma S(1_1) \otimes 1_2 h$，$\Sigma h_1 \otimes \Pi^R(h_2) = \Sigma h1_1 \otimes S(1_2)$，有 $\Sigma\Pi^L(h_1) \otimes h_2 = \Sigma\Pi^L(1_1) \otimes 1_2 h$；$\Sigma h_1 \otimes \Pi^R(h_2) = \Sigma h1_1 \otimes \Pi^R(1_2)$。

(W5) 对任意 $h, g \in H$，$\Pi^L(\Pi^L(h)g) = \Pi^L(h)\Pi^L(g)$；$\Pi^R(h\Pi^R(g)) = \Pi^R(h)\Pi^R(g)$。

(W6) $\Pi^L\Pi^L = \Pi^L$；$\Pi^R\Pi^R = \Pi^R$。

设 H 的弱对极 S 是双射，其逆为 S^{-1}。则由文献[12]的命题1.2知下面的结果(W7)–(W9)成立。

(W7) S^{-1} 既是反乘法映射又是反余乘法映射，即，对任意 $h, l \in H$，

$$S^{-1}(hl) = S^{-1}(l)S^{-1}(h);\ S^{-1}(1_H) = 1_H,$$

$$\Delta S^{-1}(h) = \Sigma S^{-1}(h_2) \otimes S^{-1}(h_1);\ \varepsilon S^{-1} = \varepsilon$$

(W8) 对任意 $h \in H$，$\Sigma h_2 S^{-1}(h_1) = \Sigma 1_1\varepsilon(1_2 h)$；$\Sigma S^{-1}(h_2)h_1 = \Sigma 1_2\varepsilon(h1_1)$。

(W9) 对任意 $h \in H$，$\Sigma S^{-1}(h_3)h_2 S^{-1}(h_1) = S^{-1}(h)$。

若 H 是有限维弱 Hopf代数，则由文献[1]知，H^* 也是有限维弱 Hopf代数，其弱对极是双射，因此以上结论(W1)–(W9)对 H^* 依然成立。

1 β-特征代数

下面设 H 为有限维弱 Hopf代数，H^* 的弱对极 S 满足 $S^2 = id$，S 有逆元 S^{-1}。设

$$G \equiv G(H^*) = \{\beta \in H^* \mid \Delta(\beta) = \Delta(1_{H^*})(\beta \otimes \beta) = (\beta \otimes \beta)\Delta(1_{H^*}) \text{ 对可逆元素 } \beta\}.$$

容易证明 G 是一个群且有单位元 1_{H^*}。若 $\beta \in G$，则对任意 $g, h \in H$，有

$$\Sigma\varepsilon(g_1 h_1)\beta(g_2)\beta(h_2) = \beta(gh) = \Sigma\varepsilon(g_2 h_2)\beta(g_1)\beta(h_1).$$

事实上，我们有，

$$\beta(gh) = \langle\Delta(\beta), g \otimes h\rangle = \Sigma\langle 1_1\beta, g\rangle\langle 1_2\beta, h\rangle = \Sigma\langle 1_1, g_1\rangle\langle\beta, g_2\rangle\langle 1_2, h_1\rangle\langle\beta, h_2\rangle =$$
$$\Sigma\langle 1_1 \otimes 1_2, g_1 \otimes h_1\rangle\langle\beta, g_2\rangle\langle\beta, h_2\rangle = \Sigma\varepsilon(g_1h_1)\langle\beta, g_2\rangle\langle\beta, h_2\rangle,$$

其中 $\Delta(1_{H^*}) = \Sigma 1_1 \otimes 1_2$，类似地，可证 $\beta(gh) = \Sigma\varepsilon(g_2 h_2)\beta(g_1)\beta(h_1)$。我们用 $\beta \in \mathrm{Alg}_\varepsilon(H, k)$ 表示这个元素。

相反地，如果 $\beta \in \mathrm{Alg}_\varepsilon(H, k)$，则易证 $\beta \in G$，因此 $G = \{\beta \in \mathrm{Alg}_\varepsilon(H, k) \mid \beta \text{在} H^* \text{中是可逆的}\}$。

对任意 $g \in H^*$，$h \in H$，定义

$$g \bullet_\beta h = \Sigma\langle S^{-1}(g_3)\beta g_1, h\rangle g_2,$$

其中 $\beta \in G$。

通过 $\bullet_\beta$ 作用，得到 $(H^*, \bullet_\beta)$ 是一个弱右 H-模(即对任意 $h, l \in H$，$(g \bullet_\beta h) \bullet_\beta l = g \bullet_\beta (hl)$)。事实上，对任意 $h, l \in H$，有

$$g \bullet_\beta (hl) = \Sigma\langle S^{-1}(g_3)\beta g_1, hl\rangle g_2 = \Sigma\langle S^{-1}(g_3), h_1 l_1\rangle\langle\beta, h_2 l_2\rangle\langle g_1, h_3 l_3\rangle g_2 =$$
$$\Sigma\langle S^{-1}(g_3), h_1 l_1\rangle\langle\beta_1, h_2\rangle\langle\beta_2, l_2\rangle\langle g_1, h_3 l_3\rangle g_2 =$$
$$\Sigma\langle S^{-1}(g_3), h_1 l_1\rangle\langle 1_1\beta, h_2\rangle\langle 1_2\beta, l_2\rangle\langle g_1, h_3 l_3\rangle g_2 =$$
$$\Sigma\langle S^{-1}(g_3), h_1 l_1\rangle\underbrace{\langle 1_1, h_2\rangle\langle 1_2, l_2\rangle}\langle\beta, h_3\rangle\langle\beta, l_3\rangle\langle g_1, h_4 l_4\rangle g_2 =$$
$$\Sigma\langle S^{-1}(g_3), h_1 l_1\rangle\varepsilon(h_2 l_2)\langle\beta, h_3\rangle\langle\beta, l_3\rangle\langle g_1, h_4 l_4\rangle g_2 =$$
$$\Sigma\langle S^{-1}(g_3), h_1 l_1\rangle\langle\beta, h_2\rangle\langle\beta, l_2\rangle\langle g_1, h_3 l_3\rangle g_2 \overset{(W7)}{=}$$

$$\Sigma\langle S^{-1}(g_5\ , h_1\rangle\langle S^{-1}(g_4\ ,\ \ell_1\rangle\langle\beta, h_2\rangle\langle\beta,\ \ell_2\rangle\langle g_1, h_3\rangle\langle g_2,\ \ell_3\rangle = (g\bullet_\beta h\ \ \bullet_\beta \ell.$$

通过 H 在 H^* 上的作用 $\bullet_\beta$ 得到一个 H^* 上的一个弱左 H^* –余模, 其上的余模结构映射为 $\rho_\beta(g\ \ = \Sigma S^{-1}(g_3\ \ \beta g_1 \rightharpoonup g_2.$

定义 2　对任意 $\beta\in G$, 定义 $C_\beta(H\ \ = \{g\in H^*\ \mid g\bullet_\beta h = \Sigma\langle\Pi^R(g_2\ \ \beta,\ \ h\rangle g_1\}$, 其中 $\Pi^R(g\ \ = \Sigma S^{-1}(g_2\ \ g_1.$

下面的引理推广了文献[10]中的引理 3.2.

引理 1　设 $\beta\in G$, 则对任意 $g\in H^*$, $g\in C_\beta(H$ 当且仅当 $\rho_\beta(g\ \ = \Sigma\Pi^R(g_2\ \ \beta\rightharpoonup g_1$. 特别地, 若 $g\in C_\beta(H$, 则

$$\Sigma\Pi^L(g_2\ \ \beta g_1 = \Sigma g_1\Pi^R(g_2\ \ \beta,$$

这里映射 Π^L 定义为

$$\Pi^L: H^*\ \rightarrow\ H^*,\ \ g\ \mapsto\Sigma\varepsilon(\mathbf{1}_1 g\ \ \mathbf{1}_2,$$

其中 $\Delta(1_{H^*}\ \ = \Sigma\mathbf{1}_1\rightharpoonup\mathbf{1}_2.$

证明　第一个充要条件由定义 2易得. 特别地, 设 $g\in C_\beta(H$, 有

$$\Sigma S^{-1}(g_3\ \ \beta g_1\rightharpoonup g_2 = \Sigma\Pi^R(g_2\ \ \beta\rightharpoonup g_1. \qquad (5$$

因此

$$\Sigma\Pi^L(g_2\ \ \beta g_1 \overset{(4}{=} \Sigma g_2 S(g_3\ \ \beta g_1 = \Sigma g_2 S^{-1}(g_3\ \ \beta g_1(S^{-1} = S\ \ \overset{(5}{=} \Sigma g_1\Pi^R(g_2\ \ \beta.$$

证毕.

定理 1　设 $\beta\in G$, 则对任意 $g\in H^*$, $g\in C_\beta(H$ 当且仅当

$$\Sigma\Pi^L(g_3\ \ \beta g_1\rightharpoonup g_2 = \Sigma g_2\beta\rightharpoonup g_1, \qquad (6$$

其中 $\Pi^L(g\ \ = \Sigma g_2 S^{-1}(g_1$ (由(W8)得到 $\Pi^L(g\ \ \in\Pi^R(H^*$.

此时, 若 $H^*\subseteq C(\Pi^R(H^*$ ($C(\Pi^R(H^*$ 是 H^* 的中心子代数), 则

(1 $C_\beta(H$ 是 H^* 的结合子代数;

(2 $C_\beta(H$ 是 H^* 的子代数且单位元为 1_{H^*} 当且仅当

$$\Sigma\Pi^R(\mathbf{1}'_2\mathbf{1}_1\ \ \rightharpoonup\mathbf{1}'_1\mathbf{1}_2 = \Sigma\mathbf{1}_2\rightharpoonup\mathbf{1}_1, \qquad (7$$

其中 $\Delta(1_{H^*}\ \ = \Sigma\mathbf{1}_1\rightharpoonup\mathbf{1}_2 = \Sigma\mathbf{1}'_1\rightharpoonup\mathbf{1}'_2$. 我们称有单位元 1_{H^*} 的子代数 $C_\beta(H$ 为 β-特征代数. 特别地, 若 $\Delta(1_{H^*}\ \ = \tau\Delta(1_{H^*}$, 则 $C_\beta(H$ 是 β-特征代数.

证明　根据引理 1, 我们能得到条件(5 和(6 是等价的.

首先, 假设(5 成立, 则

$$\Sigma\Pi^L(g_3\ \ \beta g_1\rightharpoonup g_2 = \Sigma g_4 S^{-1}(g_3\ \ \beta g_1\rightharpoonup g_2 \overset{(5}{=}$$
$$\Sigma g_3\Pi^R(g_2\ \ \beta\rightharpoonup g_1 = \Sigma g_4 S^{-1}(g_3\ \ g_2\beta\rightharpoonup g_1 \overset{(W7)}{=}$$
$$\Sigma S^{-1}(S(g_2\ \ g_3 S(g_4\ \ \ \beta\rightharpoonup g_1 \overset{(4}{=}$$
$$\Sigma S^{-1}(S(g_2\ \ \ \beta\rightharpoonup g_1 = \Sigma g_2\beta\rightharpoonup g_1,$$

因此(6 成立. 反之, 若条件(6 成立, 则

$$\Sigma S^{-1}(g_3\ \ \beta g_1\rightharpoonup g_2 \overset{(W9)}{=} \Sigma S^{-1}(g_5\ \ g_4 S^{-1}(g_3\ \ \beta g_1\rightharpoonup g_2 =$$
$$\Sigma S^{-1}(g_4\ \ \Pi^L(g_3\ \ \beta g_1\rightharpoonup g_2 \overset{(6}{=} \Sigma S^{-1}(g_3\ \ g_2\beta\rightharpoonup g_1 = \Sigma\Pi^R(g_2\ \ \beta\rightharpoonup g_1,$$

因此(5 成立. 所以 $g\in C_\beta(H$ 当且仅当 $\Sigma\Pi^L(g_3\ \ \beta g_1\rightharpoonup g_2 = \Sigma g_2\beta\rightharpoonup g_1$.

(1 注意到(6 等价于

$$\Sigma\Pi^L(g_3\ \ \beta g_1\beta^{-1}\rightharpoonup g_2 = \Delta^\varphi(g\ \ . \qquad (8$$

要证明 $C_\beta(H$ 是 H^* 的结合子代数, 我们先证明下式成立

$$\Sigma\Pi^{L}(g_2 \otimes g_1 = \Sigma S(\mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_1 g. \qquad (9$$

事实上, 我们有

$$\Sigma\Pi^{L}(g_2 \otimes g_1 = \Sigma g_3 S^{-1}(g_2 \otimes g_1 = \Sigma S^{-1}(g_2 S(g_3 \otimes g_1 =$$

$$\Sigma S^{-1}(\Pi^{L}(g_2 \otimes g_1 \overset{(W1)}{=} \Sigma S^{-1}(\mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_1 g = \Sigma S(\mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_1 g, \quad (S^2 = id$$

因此对任意 $f, g \in C_\beta(H$, 有

$$\Delta^{op}(fg = \Delta^{op}(f\ \Delta^{op}(g \overset{(8}{=} \Sigma\Pi^{L}(f_3\ \beta f_1 \beta^{-1}\Pi^{L}(g_3\ \beta g_1 \beta^{-1} \otimes f_2 g_2 =$$

$$\Sigma\Pi^{L}(f_3\ \beta f_1 \beta^{-1}\beta\ \Pi^{L}(g_3\ g_1 \beta^{-1} \otimes f_2 g_2 (H^* \subseteq C(\Pi^{R}(H^* \overset{(9}{=}$$

$$\Sigma S(\mathbf{1}_2\ \beta f_1 S(\mathbf{1}'_2\ g_1 \beta^{-1} \otimes \mathbf{1}_1 f \mathbf{1}'_1 g \overset{(W3)}{=}$$

$$\Sigma S(\mathbf{1}'_2\ S(\mathbf{1}_2\ \beta f_1 g_1 \beta^{-1} \otimes \mathbf{1}_1 \mathbf{1}'_1 f_2 g_2 \overset{(W7)}{=}$$

$$\Sigma S(\mathbf{1}_2 \mathbf{1}'_2\ \beta f_1 g_1 \beta^{-1} \otimes \mathbf{1}_1 \mathbf{1}'_1 f_2 g_2 \overset{(1}{=}$$

$$\Sigma S(\mathbf{1}_2\ \beta f_1 g_1 \beta^{-1} \otimes \mathbf{1}_1 f_2 g_2 \overset{(9}{=} \Sigma\Pi^{L}(f_3 g_3\ \beta f_1 g_1 \beta^{-1} \otimes f_2 g_2.$$

即, $fg \in C_\beta(H$, 因此 $C_\beta(H$ 是 H^* 的结合子代数.

(2 若 $g = 1_{H^*}$, 则条件 (6 变为

$$\Sigma\Pi^{R}(\mathbf{1}'_2 \mathbf{1}_1\ \beta \otimes \mathbf{1}'_1 \mathbf{1}_2 = \Sigma \mathbf{1}_2 \beta \otimes \mathbf{1}_1. \qquad (10$$

这是因为,

$$\Sigma\Pi^{R}(\mathbf{1}'_2 \mathbf{1}_1\ \beta \otimes \mathbf{1}'_1 \mathbf{1}_2 \overset{(W5)}{=} \Sigma\Pi^{R}(\mathbf{1}'_2\ \mathbf{1}_1 \beta \otimes \mathbf{1}'_1 \mathbf{1}_2 \overset{(W4)}{=}$$

$$\Sigma S(\mathbf{1}'_2\ \mathbf{1}_1 \beta \otimes \mathbf{1}'_1 \mathbf{1}_2 = \Sigma S(\mathbf{1}'_2\ \beta \mathbf{1}_1 \otimes \mathbf{1}'_1 \mathbf{1}_2 \overset{(9}{=}$$

$$\Sigma\Pi^{L}(\mathbf{1}_3\ \beta \mathbf{1}_1 \otimes \mathbf{1}_2 \overset{(6}{=} \Sigma \mathbf{1}_2 \beta \otimes \mathbf{1}_1.$$

若 $1_{H^*} \in C_\beta(H$, 有 (10 成立, 因此我们有

$$\Sigma\Pi^{R}(\mathbf{1}'_2 \mathbf{1}_1 \otimes \mathbf{1}'_1 \mathbf{1}_2 = \Sigma(\Pi^{R}(\mathbf{1}'_2 \mathbf{1}_1\ \beta \otimes \mathbf{1}'_1 \mathbf{1}_2\ (\beta^{-1} \otimes 1_{H^*} \overset{(10}{=}$$

$$\Sigma(\mathbf{1}_2 \beta \otimes \mathbf{1}_1\ (\beta^{-1} \otimes 1_{H^*} = \Sigma \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_1,$$

即, (7 成立, 因此 $C_\beta(H$ 是 β-特征代数. 反之, 显然. 如果 $\Delta(1_{H^*} = \tau\Delta(1_{H^*}$, 则

$$\Sigma\Pi^{R}(\mathbf{1}'_2 \mathbf{1}_1 \otimes \mathbf{1}'_1 \mathbf{1}_2 = \Sigma\Pi^{R}(\mathbf{1}'_1 \mathbf{1}_1 \otimes \mathbf{1}'_2 \mathbf{1}_2 \overset{(1}{=} \Sigma\Pi^{R}(\mathbf{1}_1 \otimes \mathbf{1}_2 \overset{(W6)}{=} \Sigma \mathbf{1}_1 \otimes \mathbf{1}_2,$$

即, (7 成立. 证毕.

注 **1** (1 定理 1推广了文献 [10] 中的定理 3 3.

(2 由 $\varepsilon \in G(H^*$, 有

$$C_\varepsilon(H = \{g \in H^* \mid \Delta(g = q\Delta^{op}(g\},$$

其中 $q = \Sigma \mathbf{1}_1 \otimes S(\mathbf{1}_2$ 是 $\mathscr{H}^R(\mathscr{H} = H^*$ 的可分幂等元[8].

事实上, 由定理 1可得

$$C_\varepsilon(H = \{g \in H^* \mid g \cdot_\beta h = \Sigma\langle\Pi^{R}(g_2\ \beta, h\rangle g_1\} \overset{(6}{=}$$

$$\{g \in H^* \mid \Sigma\Pi^{L}(g_3\ g_1 \otimes g_2 = \Sigma g_2 \otimes g_1\} \overset{(9}{=}$$

$$\{g \in H^* \mid \Sigma S(\mathbf{1}_2\ g_1 \otimes \mathbf{1}_1 g_2 = \Sigma g_2 \otimes g_1\} =$$

$$\{g \in H^* \mid \Sigma(\mathbf{1}_1 \otimes S(\mathbf{1}_2\ (g_2 \otimes g_1 = \Sigma g_1 \otimes g_2\} =$$

$$\{g \in H^* \mid q\Delta^{op}(g = \Delta(g\}.$$

(3 由文献 [12] 的命题 1. 2得, 若 H 是可换的或余可换的, 可以得到 H^* 的弱对极 S 满足 $S^2 = id$. 因此, 若 H 是有限维余可换的弱 Hopf代数, 则 H^* 是有限维可换弱 Hopf代数且 $S^2 = id$ 使得 $H^* \subseteq C(\Pi^{R}(H^*$, $\Pi^{L}(g = \Sigma g_2 S^{-1}(g_1 \overset{(W8)}{=} \Sigma \mathbf{1}_1\varepsilon(\mathbf{1}_2 g = \Sigma \mathbf{1}_1\varepsilon(g\mathbf{1}_2 = \Pi^{R}(g$. 从而 (6 变为

$$\Sigma\Pi^{R}(g_3\ \beta g_1 \otimes g_2 = \Sigma g_2 \beta \otimes g_1. \qquad (11$$

如果条件(11)成立, 则可得到 $C_\beta(H)$ 是 H^* 的结合子代数.

(4) 若 H 是有限维可换余可换弱 Hopf代数, 则 H^* 是有限维余可换可换弱 Hopf代数, 此时(11)成立. 事实上, 对任意 $\beta\in G$, $g\in H^*$, 有

$$\sum\Pi^R(g_3)\beta g_1\otimes g_2=\sum g_2\Pi^R(g_3)\beta\otimes g_1=\sum g_2\beta\otimes g_1.\quad\left(\sum g_1\Pi^R(g_2)=g\right)$$

根据(1)和(W6)易得(7)成立. 再由定理 1得 $C_\beta(H)$ 是 β-特征代数且 $C_\beta(H)=H^*$.

例 1　设 $\mathbf{R}$是实数域,

$$H=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\,\middle|\,a,\ b\in\mathbf{R}\right\},$$

其中 $\{e_1,\ e_2\}$ 是 H 的一组基,

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

则 H 是弱双代数, 其上的乘法是通常的矩阵乘法, 余乘法和余单位如下:

$$\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,\quad\Delta(e_2)=e_2\otimes e_2,\quad\varepsilon(e_1)=1=\varepsilon(e_2).$$

进一步, 我们可以证明 H 是弱 Hopf代数, 其中弱对极 $S=id$. 但它不是通常情况下的 Hopf代数, 因为 $\Delta_H(1_H)=e_1\otimes e_1+e_2\otimes e_2\neq 1_H\otimes 1_H$.

对任意 $\beta\in G$, 此有限维可换余可换弱 Hopf代数 H 满足 $C_\beta(H)=H^*$.

例 2　设 $\mathbf{R}$是实数域,

$$H=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\,\middle|\,a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R}\right\},$$

其中 $\{e_{11},\ e_{12},\ e_{21},\ e_{22}\}$ 是 H 的一组基,

$$e_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad e_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad e_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad e_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

不难证明 H 是弱 Hopf代数, 其上的乘法为通常的矩阵乘法, 余乘法、余单位和弱对极如下:

$$\Delta(e_{ij})=e_{ij}\otimes e_{ij},\quad\varepsilon(e_{ij})=1,\quad S(e_{ij})=e_{ji},$$

其中 $1\leqslant i,\ j\leqslant 2$.

设 $\{e^*_{11},\ e^*_{12},\ e^*_{21},\ e^*_{22}\}$ 是 H 的对偶基, 则 H^* 是有限维弱 Hopf代数. 通过待定系数法可以得到其上的乘法如下:

$$e^*_{ij}e^*_{k\ell}=\begin{cases}e^*_{ij}, & i=k\text{且}j=\ell,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

单位元为 $\varepsilon=e^*_{11}+e^*_{12}+e^*_{21}+e^*_{22}$, 余乘法, 余单位和弱对极如下:

$$\Delta(e^*_{ij})=(e^*_{i1}\otimes e^*_{1j})+(e^*_{i2}\otimes e^*_{2j}),$$

$$\varepsilon(e^*_{ij})=1\text{若 }i=j;\ \text{其它为 }0,$$

$$S(e^*_{ij})=e^*_{ji}.$$

通过计算, 我们可得 $G\equiv G(H^*)=\{e^*_{11}+ke^*_{12}+(1/k)e^*_{21}+e^*_{22}\mid 0\neq k\in\mathbf{R}\}$, 且对任意 $\beta\in G$, 都有 $C_\beta(H)=\{0\}$.

定义 3　对任意 $\beta\in G$, 定义 H 的 β-广义特征空间如下: 对任意 $h,\ g\in H$,

$$O_\beta(H)=\{\phi\in H^*\mid\sum\langle\beta,\ g_1\rangle\langle\phi,\ g_2h\rangle\langle\beta^{-1},\ g_3\rangle=\langle\phi,\ hS^2(g)\rangle\}.$$

显然, $O_\varepsilon(H)=O(H)$ 是 H 的一个广义特征代数[13].

命题 1　对任意 $\beta\in G$, (1) $\phi\in O_\beta(H)$ 当且仅当

$$\Delta(\phi)=\sum\beta^{-1}S^2(\phi_2)\beta\otimes\phi_1.\tag{12}$$

特别地, $\varepsilon\in O_\beta(H)$ 当且仅当

$$\sum\beta 1_1\otimes 1_2=\sum S^2(1_2)\beta\otimes 1_1.\tag{13}$$

此时, $O_\beta(H)$ 是 H^* 的子代数, 其中 $O_\beta(H)$ 的单位元是 ε.

(2) 如果(12)成立, 则(6)也成立, 即, β-广义特征是定理 1中定义的特征.

证明 (1) 由定义 3易得, 特殊情况下由 (12) 和 (W 10) 可得.

(2) 事实上, 由于 $S^2 = id$, 所以

$$\sum \Pi^L(\phi_3 \beta \phi_1 \rightharpoonup \phi_2) \overset{(12)}{=} \sum \Pi^L(\phi_3 S^2(\phi_2 \beta \rightharpoonup \phi_1)) \overset{(9)}{=} \sum S(\mathbf{1}_2 S^2(\mathbf{1}_1 \phi_2 \beta \rightharpoonup \phi_1)) =$$
$$\sum S(\mathbf{1}_2 S^2(\mathbf{1}_1 S^2(\phi_2 \beta \rightharpoonup \phi_1))) = \sum S(S(\mathbf{1}_1) \mathbf{1}_2 S^2(\phi_2 \beta \rightharpoonup \phi_1)) =$$
$$\sum S(\Pi^R(1_{H^*}) \phi_2 \beta \rightharpoonup \phi_1) = \sum \phi_2 \beta \rightharpoonup \phi_1,$$

即 (6) 成立. 证毕.

[参考文献]

[1] Böhm G, Nill F, Szlachányi K. Weak Hopf algebras I. Integral theory and C^* –structure[J]. Journal of Algebra, 1999, 221: 385-438.

[2] Hayashi T. Quantum group symmetry of partition functions of IRF models and its applications to Jones's index theory[J]. Communications in Mathematical Physics, 1993, 157: 331–345.

[3] Nikshych D, Vainerman L. Finite quantum groupoids and their applications[J]. Mathematical Sciences Research Institute Publications, 2002, 43: 211-262.

[4] Yamanouchi T. Duality for generalized Kac algebras and a characterization of finite groupoid algebras[J]. Journal of Algebra, 1994, 163: 9-50.

[5] Nikshych D. A duality theorem for quantum groupoids[J]. Contemporary Mathematics, 2000, 267: 237-243.

[6] Zhang L Y, Zhu S L. Fundamental theorems of weak Doi-Hopf modules and semisimple weak smash product Hopf algebras [J]. Communications in Algebra, 2004, 32(9): 3403-3415.

[7] Doi Y. On the structure of relative Hopf modules[J]. Communications in Algebra, 1983, 11(3): 243-255.

[8] 张良云. 弱 Hopf代数上的 Maschke定理和 Morita关系[J]. 中国科学, 2006, 49(5): 587-598.

[9] Cohen M, Fishman D. Hopf algebra actions[J]. Journal of Algebra, 1986, 100: 363–379.

[10] Hu J, Zhang Y H. The β–character algebras and a commuting pair in Hopf algebras[J]. Algebra Representation Theory, 2007, 10: 497-516.

[11] Montgomery S. Hopf algebras and their actions on rings[M]. New York: CBMS, Lect Notes, 1993.

[12] Zhang L Y, Chen H X, Li J Q. Twisted products and smash products over weak Hopf algebras[J]. Acta Mathematica Scientia(English Series), 2004, 24(2): 247–258.

[13] Nikshych D. Semisimple weak Hopf algebras[J]. Journal of Algebra, 2004, 275: 639–667.

[责任编辑: 丁 蓉]