# 拓扑序空间中的广义向量值均衡问题及其应用

鲍红梅

(淮阴工学院计算科学系, 江苏 淮安 223003)

[摘要] 在拓扑序空间的框架下, 利用一个序 KKM 型定理证明了一些广义向量值均衡问题解的存在性定理. 并运用这些定理证明了在没有线性结构的拓扑序空间内非合作博弈的纳什均衡存在性定理.

[关键词] 拓扑序空间, 序 KKM 映射, 广义向量值均衡, 纳什均衡

[中图分类号] O177 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009)04-0042-04

# Generalized Vector Equilibrium Problems and Its Applications in Topological Ordered Spaces

Bao Hongmei

(Department of Computing Science, Huaiyin Institute of Technology, Huai an 223003, China)

**Abstract**: Using an O-KKM type theorem, some existence theorems of solutions for abstract generalized vector equilibrium problems in the framework of topological ordered spaces is proved. Furthermore, these existence theorems can be applied to derive some Nash equilibrium existence theorems for non-cooperative games in topological ordered spaces without linear structure.

**Key words**: topological ordered space, O-KKM mapping, generalized vector equilibrium, Nash equilibrium

广义向量值均衡在社会经济系统、工程技术等领域有着广泛的应用. 在经济学中, 它是 Von Neumann-Morgenstern效用函数的一般形式. 广义向量值均衡问题一经提出, 关于它的解的存在性、稳定性、算法和收敛性分析等引起了多方面的关注[1-4].

Giannessi首次在有限维欧式空间中引进并研究了向量值不等式问题. 近年来, 运用 SKKM 定理, Ding 在没有线性结构的广义凸空间内获得了一些广义向量值均衡问题的存在性结果. 本文主要对广义向量值问题作进一步的研究. 运用在拓扑序空间内获得的一个 KKM 型定理, 在拓扑序空间的框架下, 对广义向量值均衡问题解的存在性问题进行研究, 得到了一些关于广义向量值均衡问题的存在性结果. 本文的结果推广了最近相关文献的对应结果.

## 1 符号和定义

设 $X$ 是非空集合, $X$ 和 $2^X$ 分别表示 $X$ 的所有非空有限子集簇和 $X$ 的所有子集族. Horvath C D, Llinares Ciscar J V[5]定义了拓扑半格, 且在拓扑序空间中得到了 KKM 型定理. 半格是一偏序集 $H$, 用 表示偏序, 对任意一组元素 $(x, x)$, 有一个最小上界, 记为 $x$ $x$. 因此, 对任意 $A$ $H$, 存在一个最小上界, 记为 $\sup A$.

在偏序集 $(H, )$ 中, 如果对任意两个元素 $x$ 和 $x$, 且满足 $x$ $x$, 则称集合 $[x, x] = \{y\ X: x\ y\ x\}$ 为序区间. 现在设 $(H, )$ 是一个半格, $A$ $H$, 记 $(A) = {}_{a\ A}[a, \sup A]$, 则易知 $(A)$ 有如下性质:

(1) $A$ $(A)$;

(2) 若 $A$ $A$, 则 $(A)$ $(A)$.

设 $D$ $H$, 如果对任意的 $A$ $D$, 有 $(A)$ $D$, 则称 $D$ 是 -凸的.

Horvath C, LIinares C和 Ciscar J[5]引入了如下定义:

收稿日期: 2009-02-12

通讯联系人: 鲍红梅, 硕士, 讲师, 研究方向: 应用数学. E-mail: baohme@tom.com

定义 1　设 $X$ 为拓扑序空间 $M$ 的非空子集, $T: X \quad 2^M$ 为集值映射. 如果对任意的 $A = \{x_1, \quad , x_n\}$ $X$, 有 $(A) \quad {}_{i=1}^{n} T(x_i)$, 则称 $T$ 序 KKM 映射.

定义 2　设 $X$ 为拓扑序空间, $Z$ 为非空集合, $F: X \quad X \quad 2^Z$ 和 $C: X \quad 2^Z$ 为集值映射. 称 $F(x, y)$ 关于 $y$ 是序 $C$ – 对角拟凸的, 如果对任意的 $A = \{y_1, \quad , y_n\} \quad X$, 以及 $x_0 \quad (A)$, 存在 $j \quad \{1, \quad , n\}$, 使得 $F(x_0, y_j) \quad C(x_0)$.

注 1　令 $Z = \mathbf{R} \quad \{ \quad \}$, $F(x, y)$ 是一个单值函数, 对任何 $x \quad X$ 和某个 $\quad \mathbf{R}$, $C(x) = [- \quad , \quad \big]$, 则 $F(x, y)$ 关于 $y$ 是序 $C$ – 对角拟凸的概念就退化为 Luo[6] 引进的 $F(x, y)$ 关于 $y$ 序 – 对角拟凸的概念.

Tian[7] 引进了如下两个定义:

定义 3　设 $X$ 为非空集合, $Y$ 为拓扑空间, $T: X \quad 2^Y$ 为集值映射. 如果对任意的 $x \quad X$, 当 $y \quad T(x)$ 时, 存在 $x \quad X$, 使得 $y \quad \overline{T(x \quad)}$, 此处 $\overline{T(x \quad)}$ 代表 $T(x \quad)$ 在 $Y$ 中的闭包, 则称 $T$ 在 $X$ 上具有转移闭值.

注 2　显然, 若 $T$ 在 $X$ 上具有闭值, 则 $T$ 在 $X$ 上具有转移闭值, 反之不一定成立.

定义 4　设 $X$ 为非空集, $Y$ 为拓扑空间, $f: X \quad Y \quad \mathbf{R} \quad \{ \quad \}$ 为一函数. 对某个 $\quad \mathbf{R}$, $f$ 称在 $y$ 处 – 转移下半连续, 如果对任意的 $x \quad X$ 和 $y \quad Y$, $f(x, y) >$ 蕴涵着存在一个 $y$ 的邻域 $N(y)$ 和一个点 $x \quad X$ 使得 $f(x, z) > \quad , \quad z \quad N(y)$.

注 3　容易证明如下结论成立:

定义一个集值映射 $T: X \quad 2^Y$, 对某个 $\quad \mathbf{R}$, 令 $T(x) = \{y \quad Y: f(x, y) \quad \}$, 则 $T$ 为在 $X$ 上转移紧闭值当且仅当 $f$ 在 $y$ 处 – 转移下半连续.

我们需要如下引理:

引理 1[5]　设 $X$ 为一拓扑序空间 $M$ 的非空子集, $R \quad X \quad M$ 为二元关系, 且满足如下条件:

(1) $T: X \quad 2^M$ 为转移紧闭的, 此处 $T(x) = \{y \quad M: (x, y) \quad \mathbf{R}\}, \quad x \quad X$;

(2) 存在 $x_0 \quad X$, 使得 $\overline{T(x_0)}$ 是紧的;

(3) $T$ 是序 KKM 映射.

则 ${}_{x \quad X} T(x) \quad .$

## 2　均衡点的存在性

本节将得到如下均衡问题解的存在性结果:

设 $X$ 为拓扑序空间, $Z$ 为非空集合, $F: X \quad X \quad 2^Z$ 和 $C: X \quad 2^Z$ 为集值映射, 则广义向量值均衡问题是指在满足什么条件下存在 $x^* \quad X$, 使得 $F(x^*, y) \quad C(x^*), \quad y \quad X$.

定理 1　设 $X$ 为拓扑序空间 $M$ 的非空子集, $Z$ 为非空集合. $C: M \quad 2^Z$, $D: X \quad 2^Z$, $F: M \quad M \quad 2^Z$, $G: M \quad X \quad 2^Z$ 为集值映射. 集值映射 $T: X \quad 2^M$ 定义为 $T(x) = \{y \quad M: G(y, x) \quad D(x)\}, \quad x \quad X$.

( i) $(y, x) \quad M \quad X$, $F(y, x) \quad C(y) \quad G(y, x) \quad D(x)$;

( ii) $T: X \quad 2^M$ 具有转移紧闭值;

( iii) $y \quad M$, $\{x \quad X: F(y, x) \quad C(y)\}$ 是 – 凸的;

( iv) $y \quad M$, $G(y, x) \quad D(x), \quad x \quad X \quad F(y, x) \quad C(y), \quad x \quad X$;

( v) $y \quad M$, $F(y, y) \quad C(y)$;

( vi) 存在一点 $x_0 \quad X$, 使得 $\overline{T(x_0)}$ 是紧的.

则存在一点 $y^* \quad M$ 使得 $F(y^*, x) \quad C(y^*), \quad x \quad X$.

证明　首先, 证明 $T: X \quad 2^M$ 是序 KKM 映射. 假设不然, 则存在 $A_0 = \{x_1, \quad , x_n\} \quad X$, 使得

$$(A_0) \quad {}_{i=1}^{n} T(x_i).$$

由此可知存在 $z \quad (A_0)$ 使得 $z \quad {}_{i=1}^{n} T(x_i)$, 从而 $i \quad \{1, \quad , n\}$, $z \quad T(x_i)$, 即 $G(z, x_i) \quad D(x_i)$. 由 ( i), $F(z, x_i) \quad C(z)$. 因此, $A_0 \quad \{x \quad X: F(z, x) \quad C(z)\}$. 由 ( iii) 可知

$$z \quad (A_0) \quad \{x \quad X: F(z, x) \quad C(z)\}.$$

从而有 $F(z, z) \quad C(z)$, 这与 ( v) 矛盾, 故 $T: X \quad 2^M$ 是序 KKM 映射. 由引理 1, ${}_{x \quad X} T(x) \quad .$ 任取 $y^*$

$\bigcap_{x\in X}T(x)$, 则 $G(y^*,x)\subset D(x)$, $\forall x\in X$, 由(iv)可知 $F(y^*,x)\subset C(y^*)$, $\forall x\in X$.

**定理 2** 设 $X$ 为一拓扑序空间, $Z$ 为一非空集合. $C: X\to 2^Z$, $F: X\times X\to 2^Z$ 为集值映射, 且满足如下条件:

(i) $F(x,y)$ 关于 $y$ 是序 $C$-对角拟凸的;

(ii) 集值映射 $y\mapsto\{x\in X: F(x,y)\subset C(x)\}$ 是转移闭的;

(iii) 存在 $y_0\in X$, 使得 $\overline{\{x\in X: F(x,y_0)\subset C(x)\}}$ 是紧的.

则存在 $x^*\in X$, 使得 $F(x^*,y)\subset C(x^*)$, $\forall y\in X$.

证明 定义集值映射 $T: X\to 2^X$ 如下:

$$T(y)=\{x\in X: F(x,y)\subset C(x)\},\quad \forall y\in X.$$

由定义 2可知 $\forall A=\{y_1,\cdots,y_n\}\in\langle X\rangle$ 以及 $\forall x_0\in\Delta(A)$, 存在一个 $j\in\{1,\cdots,n\}$ 使得 $F(x_0,y_j)\subset C(x_0)$, 即 $x_0\in T(y_j)$, 从而可知 $\Delta(A)\subset\bigcup_{i=1}^{n}T(y_i)$. 因此, $T: X\to 2^X$ 是序 KKM 映射. 由引理 1, $\bigcap_{y\in X}T(y)\neq\varnothing$. 任取一点 $x^*\in\bigcap_{y\in X}T(y)$. 故存在 $x^*\in X$, 使得 $F(x^*,y)\subset C(x^*)$, $\forall y\in X$.

**定理 3** 设 $X$ 为拓扑序空间, $Z$ 为非空集合. $C: X\to 2^Z$, $F: X\times X\to 2^Z$ 为集值映射, 且满足如下条件:

(i) $F(x,x)\not\subset C(x)$;

(ii) 对任何 $x\in X$, 集合 $\{y\in X: F(x,y)\not\subset C(x)\}$ 是 $\Delta$-凸的;

(iii) 集值映射 $y\mapsto\{x\in X: F(x,y)\subset C(x)\}$ 是转移闭的;

(iv) 存在 $y_0\in X$, 使得 $\overline{\{x\in X: F(x,y_0)\subset C(x)\}}$ 是紧的.

则存在 $x^*\in X$, 使得 $F(x^*,y)\subset C(x^*)$, $\forall y\in X$.

证明 首先, 证明如下定义的集值映射 $T: X\to 2^X$ 为序 KKM 映射:

$$T(y)=\{x\in X: F(x,y)\subset C(x)\},\quad \forall y\in X.$$

假设不然, 则存在 $A=\{y_1,\cdots,y_n\}\in\langle X\rangle$, 使得

$$\Delta(A)\not\subset\bigcup_{i=1}^{n}T(y_i).$$

从而有 $x_0\in\Delta(A)$, 使得 $\forall i\in\{1,\cdots,n\}$, $x_0\notin T(y_i)$, 即 $F(x_0,y_i)\not\subset C(x_0)$, $\forall i\in\{1,\cdots,n\}$. 由(ii), $x_0\in\Delta(A)\subset\{y\in X: F(x_0,y)\not\subset C(x_0)\}$, 从而 $F(x_0,x_0)\not\subset C(x_0)$, 这与(i)产生了矛盾, 故 $T$ 为序 KKM 映射. 由引理 1, $\bigcap_{y\in X}T(y)\neq\varnothing$. 任取一点 $x^*\in\bigcap_{y\in X}T(y)$, 即存在 $x^*\in X$, 使得 $F(x^*,y)\subset C(x^*)$, $\forall y\in X$.

## 3 对 Nash 均衡问题的应用

在本节, 作为上述均衡问题解的存在性的应用, 我们在拓扑序空间中得到了两个关于非合作博弈 Nash均衡的存在性结果.

设 $I=\{1,\cdots,n\}$ 为博弈人集合, $\forall i\in I$, $S_i$ 为第 $i$个人的策略空间, $u_i: X=\prod_{i=1}^{n}X_i\to\mathbf{R}$ 为第 $i$个人的收益函数, 记 $X_{-i}=\prod_{j\in I\setminus\{i\}}X_j$, $x\in X$ 和 $x_{-i}\in X_{-i}$.

如果由各个博弈方的一个策略组成的一个集合 $(x_1^*,\cdots,x_n^*)$ 满足如下条件:

$$u_i(x_i^*,x_{-i}^*)\geq u_i(y_i,x_{-i}^*)\text{ 对任何 }y_i\in X_i\text{ 和 }i\in\{1,\cdots,n\},$$

则称 $(x_1^*,\cdots,x_n^*)$ 为非合作博弈 $\Gamma=\{X_1,\cdots,X_n;u_1,\cdots,u_n\}$ 的一个 Nash均衡.

依照 Nikaido and Isoda的方法, 我们定义如下加总的收益函数 $U: X\times X\to\mathbf{R}$:

$$U(x,y)=\sum_{i=1}^{n}[u_i(y_i,x_{-i})-u_i(x_i,x_{-i})],$$

$$x=\{x_1,\cdots,x_n\},\ y=\{y_1,\cdots,y_n\}\in X=\prod_{i=1}^{n}X_i.$$

**定理 4** 设 $I=\{1,\cdots,n\}$ 为博弈人集合, $\Gamma=\{X_1,\cdots,X_n;u_1,\cdots,u_n\}$ 为一非合作博弈, $X=\prod_{i=1}^{n}X_i$ 为拓扑序空间. $u_i: X=\prod_{i=1}^{n}X_i\to\mathbf{R}$ 为第 $i$博弈参与者的收益函数, 且满足如下条件:

(i) $A = \{y_1, \quad, y_n\} \quad X, \quad x_0 \quad (A), \quad j \quad \{1, \quad, n\}$ 使得 $U(x_0, y_j) \quad 0$;

(ii) $U(x, y)$ 在 $x$ 处是 0转移下半连续的;

(iii) $y_0 \quad X$ 使得 $\overline{\{x \quad X: U(x, y_0) \quad 0\}}$ 为紧集.

则存在 $(x_1^*, \quad, x_n^*) \quad X$ 使得 $(x_1^*, \quad, x_n^*) \quad X$ 为 $\quad = \{X_1, \quad, X_n; u_1, \quad, u_n\}$ 的一个均衡点.

证明 对任何 $(x, y) \quad X \quad X$, 令 $C(x) = (0, + \quad]$, $F(x, y) = \{U(x, y)\}$. 容易验证 $F(x, y)$ 满足定理 2的所有条件. 因此, 由定理 2, 我们知道 $x^* \quad X$ 使得 $y \quad X, F(x^*, y) \quad C(x^*)$. 现在, 固定 $i$, 取 $y = (y_i, x_{-i}^*)$, 则不等式 $U(x^*, y) \quad 0$可以重新写为:

$$u_i(y_i, x_{-i}^*) - u_i(x_i^*, x_{-i}^*) + \sum_{j \quad i} [u_j(y_j, x_{-j}^*) - u_j(x_j^*, x_{-j}^*)] \quad 0,$$

由于对任何 $j \quad i$, $x = (x_j, x_{-j}) = (y_j, x_{-j})$. 上述不等式意味着 $i \quad \{1, \quad, n\}, \quad y_i \quad X_i$, $u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \quad u_i(y_i, x_{-i}^*)$. 这也说明了 $(x_1^*, \quad, x_n^*) \quad X$ 为 $\quad = \{X_1, \quad, X_n; u_1, \quad, u_n\}$ 的一个均衡点.

**定理 5** 设 $I = \{1, \quad, n\}$ 为博弈人集合, $\quad = \{X_1, \quad, X_n; u_1, \quad, u_n\}$ 为一非合作博弈, $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ 为拓扑序空间. $u_i: X = \prod_{i=1}^{n} X_i \quad \mathbf{R}$ 为第 $i$博弈参与者的收益函数, 且满足如下条件:

(i) 对任何 $x \quad X$, 集合 $\{y \quad X: U(x, y) > 0\}$ 是 $-$凸的;

(ii) $U(x, y)$ 在 $x$ 处是 0转移下半连续的;

(iii) $y_0 \quad X$ 使得 $\overline{\{x \quad X: U(x, y_0) \quad 0\}}$ 为紧集.

则存在 $(x_1^*, \quad, x_n^*) \quad X$ 使得 $(x_1^*, \quad, x_n^*) \quad X$ 为 $\quad = \{X_1, \quad, X_n; u_1, \quad, u_n\}$ 的一个均衡点.

证明 对任何 $(x, y) \quad X \quad X$, 令 $C(x) = (0, + \quad]$, $F(x, y) = \{U(x, y)\}$. 容易验证 $F(x, y)$ 满足定理 3的所有条件. 因此, 由定理 3, 我们知道 $x^* \quad X$ 使得 $y \quad X, F(x^*, y) \quad C(x^*)$. 现在, 固定 $i$, 取 $y = (y_i, x_{-i}^*)$, 则不等式 $U(x^*, y) \quad 0$可以重新写为:

$$u_i(y_i, x_{-i}^*) - u_i(x_i^*, x_{-i}^*) + \sum_{j \quad i} [u_j(y_j, x_{-j}^*) - u_j(x_j^*, x_{-j}^*)] \quad 0,$$

由于对任何 $j \quad i$, $x = (x_j, x_{-j}) = (y_j, x_{-j})$. 上述不等式意味着 $i \quad \{1, \quad, n\}, \quad y_i \quad X_i$, $u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \quad u_i(y_i, x_{-i}^*)$. 这也说明了 $(x_1^*, \quad, x_n^*) \quad X$ 为 $\quad = \{X_1, \quad, X_n; u_1, \quad, u_n\}$ 的一个均衡点.

## [参考文献]


[1] Ansari Q, Oettli W, Schlager D. A generalization of vectorial equilibria[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 1997, 46(2): 147-152.

[2] Bianchi M, Hadjisavvas N, Schaible S. Vector equilibrium problems with generalized monotone bifunctions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1997, 92(3): 531-546.

[3] Bianchi M, Hadjisavvas N, Schaible S. Generalized monotone bifunction and equilibrium problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1996, 90(1): 531-546.

[4] Ding X, Park J. Generalized vector equilibrium problems in generalized convex spaces[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2004, 120(2): 327-353.

[5] Horvath C, LIinares C, Ciscar J. Maximal elements and fixed points for binary relations on topological ordered spaces[J]. Journal of Mathematical Economics, 1996, 25(3): 291-306.

[6] Luo Q. Ky Fan s section theorem and its applications in topological ordered spaces[J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17(10): 1 113-1 119.

[7] Tian G. Generalization of FKKM theorem and the Ky Fan minimax inequality with applications to maximal elements, price equilibrium and complementarity[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1992, 170(2): 457-471.


[责任编辑: 丁 蓉]