一类带非线性源的拟线性抛物方程解的熄灭问题

徐　兵[1], 曹玉升[2]

(1. 解放军理工大学理学院, 江苏 南京 211101)
(2. 商丘职业技术学院汽车建筑工程系, 河南 商丘 476000)

[摘要]　研究了形如 $u_t=\Delta_p u+\lambda|u|^{q-2}u$ 的拟线性抛物方程在 $\mathbf{R}^N$ $(N\geqslant 2)$中有界空间上的解的熄灭问题, 利用上下解方法得到两类在有限时间内解熄灭的结果.

[关键词]　熄灭, 拟线性抛物方程, 上下解方法, 非线性源
[中图分类号] O175.23　[文献标识码] A　[文章编号] 1001-4616(2010)01-0022-06

Extinction for a Quasi-Linear Parabolic Equation With Nonlinear Source

Xu Bing[1], Cao Yusheng[2]

(1. Institute of Science, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China)
(2. Shangqiu Professional Techniques College, Shangqiu 476000, China)

Abstract In this paper, we deal with the extinction of solution of the initial boundary value problem of quasilinear parabolic equation $u_t=\Delta_p u+\lambda|u|^{q-2}u$ in a bounded domain of $\mathbf{R}^N$ with $N\geqslant 2$. Using upper and lower solution method, we get two results of the extinction of the solution.

Key words extinction, quasi-linear parabolic equation, upper and lower solution method, nonlinear source

本文主要研究了如下拟线性抛物方程

$$\begin{cases} u_t=\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda|u|^{q-2}u, & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega, \end{cases}\tag{1}$$

非负解的熄灭问题, 其中 $T>0$, Ω是 $\mathbf{R}^N$ $(N\geqslant 2)$ 中的有界域, 具有光滑边界 $\partial\Omega$, $p>1$, $q>2$, $\lambda\geqslant 0$ 且 $u_0(x)$ 满足如下条件:

$$0\leqslant u_0\in C(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega),\quad u_0=0\text{在 }\partial\Omega\text{上}.$$

这种类型的方程起源于生物学和天体物理学相关问题. 例如在燃烧理论中, 函数 $u(x,t)$ 表示温度, $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ 表示热扩散, 而 $\lambda|u|^{q-2}u$是一个源. 方程(1)也出现在一些描述物理现象的模型里, 例如产生于研究非牛顿湍流[1,2], 非牛顿渗流[3] 以及在多孔介质中气体渗流[4] 等问题.

当 $p=2$时, 半线性方程(1)的爆破率问题已经被广泛的研究. 对于$p\neq 2$, 在过去 20年的时间里主要研究了拟线性抛物方程弱解的正则性[5-8]. 文章中一般利用 Δ算子一些好的性质, 如极大值原理以及比较原理等. 另外 $p>1$时, p-laplacian方程在有界空间内解的存在性以及结构也已经被做了充分的研究. 对于 $p\neq 2$的情形最大的障碍是 $p=2$时的一系列好的性质不再成立或者难以验证.

最近的许多文献关注了方程(1)非负解 u的熄灭问题, 即存在一个有限时间 $T>0$, 使得解在 $0<t<T$时非平凡, 但是对于所有的 $(x,t)\in\Omega\times[T,+\infty)$ 有 $u(x,t)\equiv 0$ 在这种情况下, T被称为熄灭时间. 第一个关于熄灭的结论是由 Kalashnikov在 1974得到的[9]. 对于如下带齐次 Dirichlet边值问题的半线性抛物方程:

收稿日期: 2009-06-29.
基金项目: 江苏省教育厅自然科学基金(08KJB110005).
通讯联系人: 徐　兵, 硕士, 助教, 研究方向: 偏微分方程. E-mail: xubing16@126.com

$$\begin{cases} u_t = u - u^q, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

比较完整的结论参见[10]: 方程(2)的非平凡解在有限时间消逝当且仅当 $0 < q < 1$ (即, 强的吸收项会导致解在有限时间内熄灭). 更多的关于方程(2)解的熄灭理论已经被许多作者研究得到(例如文献[11, 12]).

在文献[10]中, 作者给出如下问题解熄灭的充分必要条件:

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \lambda u^q, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\lambda > 0$. 作者得到如果 $p \in (1, 2)$ 或者 $q \in (0, 1)$ 时上述问题的解在有限时间消逝, 但是如果 $p \geqslant 2$ 且 $q \geqslant 1$, 解是非熄灭的. 在没有吸收项的情况下(即 $\lambda = 0$), Dibenedetto[13] 和 Yuan[14] 得到解熄灭的充分必要条件是 $p \in (1, 2)$.

在文献[15]中, 作者得到了如下多孔介质问题解熄灭的条件:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + \lambda u^p, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $0 < m < 1$, $p, \lambda > 0$, Ω 是一个带光滑边界的有界开域. 作者得到当 $p > m$ 并且初值充分小时, 解在有限时间内消逝; 当 $p < m$, $t > 0$ 时, 解的最大值是正的. 如果 $p = m$, 那么 Dirichlet 问题的第一特征值起了重要作用.

对问题(2)和(3)来说, 扩散项与吸收项以及快速扩散与强吸收之间的差别将导致任何有界非负解都在有限时间内趋于零. 但在 (1) 和 (4) 中, 非线性源被称为"热源". 而在(2)和(3)中, 源 $-u^q$ 被称为"冷源". 不同的源对解的性质造成完全不同的影响[13].

对于具有"热源"的问题(1), 文献[16]给出对于足够大的初值条件解将在有限时间内爆破. 在这篇文献中得到: 如果初值充分小, 方程(1)的解在有限时间内消逝.

众所周知, 由于在 $\nabla u = 0$ 的点处椭圆模量是退化的(当 $p > 2$ 时)或者是爆破的(当 $1 < p < 2$ 时), 所以当 $p > 2$ 时方程(1)是退化的, 当 $1 < p < 2$ 时方程是奇异的, 因此总之没古典解. 鉴于此, 问题(1)的非负弱解被如下定义. 方便起见, 我们定义 $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$. 当 $\rho > 0$ 时, 给出如下记号 Ω 和 Ω_ρ:

$$\Omega = \{x \in \Omega;\ u_0(x) > 0\},\quad \Omega_\rho = \{x \in \Omega;\ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \rho\}.$$

定义 1　非负函数 u 被称为问题(1)的弱解当且仅当 $u \in L^\infty(\Omega_T) \cap L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, $u_t \in L^2(\Omega_T)$, 且满足

$$\iint_{\Omega_T}(-u\phi_t + |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi - \lambda|u|^{q-2}u\phi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0, \tag{5}$$

以及

$$\lim_{t\to 0^+}\int_\Omega |u(x, t) - u_0(x)|\,\mathrm{d}x = 0,$$

此处检验函数 $\phi(x, t) \in C_0^\infty(\Omega_T)$.

注 1　当边界值是任意非负函数 $\psi \in L^\infty(\Omega_T) \cap L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, 这时定义的弱解需要用 $u - \psi \in L^\infty(\Omega_T) \cap L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ 替换 $u \in L^\infty(\Omega_T) \cap L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$. 而且, 由于 $C_0^\infty(\Omega_T)$ 在 $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ 中稠密, 可以断言对于任意的 $\phi \in L^\infty(\Omega_T) \cap L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ 上述等式成立.

类似地, 为了定义下解(上解) $\underline{u}(x, t)$ $(u(x, t))$, 对每一个 $\phi(x) > 0$, 只需要要求在 Ω 中 $\underline{u}(x, 0) \leqslant u_0(x)$ $(u(x, 0) \geqslant u_0(x))$, 在 $\partial\Omega \times [0, T]$ 上 $\underline{u}(x, t) \leqslant 0$ $(u(x, t) \geqslant 0)$, 且(1)中的等号用 $\leqslant$ $(\geqslant)$ 代替.

1　引理

在研究问题以前, 先给出一些引理. 这些引理将是稍后证明中很有用的工具. 首先, 建立比较原理.

为了证明比较原理,先给出一个关于代数不等式的简单结论.

引理 1　对任意 $x, y\in \mathbf{R}^N$, 以下不等式成立

$$(|x|^{p-2}x-|y|^{p-2}y)\cdot(x-y)\geqslant\begin{cases} C_1(|x|+|y|)^{p-2}|x-y|^2, & \text{if}\, p>1,\\ C_2|x-y|^p, & \text{if}\, p>2,\end{cases}$$

其中 C_1 和 C_2 是只依赖于 p 的正常数.

关于这个引理的详细说明,可参见文献[16]中的引理 4.10以及文献[17]中的引理 2.1. 此处,证明如下比较原理:

引理 2　假设 $\underline{u}(x,t)$, $u(x,t)$ 是(1)对应的上解和下解,那么在 Ω_T 上 $\underline{u}(x,t)\leqslant u(x,t)$ 几乎处处成立.

证明　对于足够小的 δ, 设

$$\rho_\delta(\sigma)=\begin{cases} 0, & \delta<0,\\ \dfrac{\sigma}{\delta}, & 0\leqslant\sigma\leqslant\delta,\\ 1, & \sigma<\delta,\end{cases}$$

那么 $\rho_\delta(\sigma)$ 是一个分段可微函数. 令 $\phi(x,t)=\rho_\delta((\underline{u}-u)(x,t))$, 容易验证 $\phi(x,t)$ 是一个满足定义 1条件的函数.

根据定义 1中的(5)式,有

$$\int_\Omega\underline{u}(x,t_2)\phi(x,t_2)\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\underline{u}(x,t_1)\phi(x,t_1)\,\mathrm{d}x\leqslant \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\{\underline{u}\phi_s-|\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}\nabla\phi+\lambda|\underline{u}|^{q-2}\underline{u}\phi\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

和

$$\int_\Omega u(x,t_2)\phi(x,t_2)\,\mathrm{d}x-\int_\Omega u(x,t_1)\phi(x,t_1)\,\mathrm{d}x\leqslant \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\{u\phi_s-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi+\lambda|u|^{q-2}u\phi\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

设 $t_1=\tau$, $t_2=\tau+h<T$, $\tau, h>0$, 以及 $\omega=\underline{u}-u$, 由(6)和(7)式有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\omega(x,\tau+h)\rho_\delta(\omega(x,\tau+h))\,\mathrm{d}x\leqslant&\int_\Omega\omega(x,\tau)\rho_\delta(\omega(x,\tau))\,\mathrm{d}x+\int_\tau^{\tau+h}\int_\Omega\omega\rho_\delta(\omega)\omega_s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s-\\ &\int_\tau^{\tau+h}\int_\Omega(|\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}-|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla\rho_\delta(\underline{u}-u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s+\\ &\lambda\int_\tau^{\tau+h}\int_\Omega\rho_\delta(\omega(x,s))(|\underline{u}|^{q-2}\underline{u}-|u|^{q-2}u)\phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{8}$$

把(8)式除以 h, 然后对 τ 在 $(0,t)$ 积分, $t<T$, 得到

$$\begin{aligned}&\int_0^t\frac{1}{h}\int_\Omega\omega(x,\tau+h)\rho_\delta(\omega(x,\tau+h))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\leqslant\int_0^t\frac{1}{h}\int_\Omega\omega(x,\tau)\rho_\delta(\omega(x,\tau))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau+\\ &\int_0^t\frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h}\int_\Omega\omega\rho_\delta(\omega)\omega_s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau-\int_0^t\frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h}\int_\Omega(|\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}-|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla\rho_\delta(\underline{u}-u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau+\\ &\lambda\int_0^t\frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h}\int_\Omega\rho_\delta(\omega(x,s))(|\underline{u}|^{q-2}\underline{u}-|u|^{q-2}u)\phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{9}$$

令 $h\to 0^+$, 由 Steklov's平均数[8-10]的性质并经过简单的计算,有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\omega(x,t)\rho_\delta(\omega(x,t))\,\mathrm{d}x\leqslant&\int_\Omega\omega(x,0)\rho_\delta(\omega(x,0))\,\mathrm{d}x+\int_0^t\int_\Omega\omega\rho_\delta(\omega)\omega_s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s-\\ &\int_0^t\int_\Omega(|\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}-|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla\rho_\delta(\underline{u}-u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s+\\ &\lambda\int_0^t\int_\Omega\rho_\delta(\omega(x,s))(|\underline{u}|^{q-2}\underline{u}-|u|^{q-2}u)\phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{10}$$

下面研究(10)里的项. 首先,定义

$$I_1 = \{(x, s) \in \Omega_t: \underline{u}(x, s) = 0\};$$
$$I_2 = \{(x, s) \in \Omega_t: \underline{u}(x, s) \neq 0 \text{ and } u(x, s) = 0\};$$
$$I_3 = \{(x, s) \in \omega_t: \underline{u}(x, s) \neq 0 \text{ and } u(x, s) \neq 0\}.$$

在 I_1 上 $\rho_\delta(\omega(x, s)) \equiv 0$，在 I_2 上 $\omega_+(x, s) = \underline{u}(x, s)$，以及 $\underline{u}, u \in L^\infty(\Omega_T)$，有

$$\int_0^t\int_\Omega \rho_\delta(\omega(x, s))(|\underline{u}|^{q-2}\underline{u} - |u|^{q-2}u)\,dx\,ds \leqslant$$
$$\left(\iint_{I_1} + \iint_{I_2} + \iint_{I_3}\right)(|\underline{u}|^{q-2}\underline{u} - |u|^{q-2}u)\rho_\delta(\omega(x, s))\,dx\,ds \leqslant$$
$$0 + \iint_{I_2}|\underline{u}|^{q-2}\underline{u}\omega_+\,dx\,ds + \iint_{I_3}(|\underline{u}|^{q-2}\underline{u} - |u|^{q-2}u)\omega_+\,dx\,ds \leqslant M\int_0^t\int_\Omega \omega_+\,dx\,ds,$$

和

$$\left|\int_0^t\int_\Omega \omega\rho_\delta(\omega)\omega_s\,dx\,ds\right| = \left|\int_\Omega\int_{\omega(0)}^{\omega(t)}\omega\rho_\delta(\omega)\,d\omega\,dx\right| \leqslant \int_\Omega\int_{\omega(0)}^{\omega(t)}\omega_+|\rho_\delta(\omega)|\,d\omega\,dx \leqslant$$
$$\frac{1}{\delta}\int_\Omega\int_0^\delta \omega_+\,d\omega\,dx \to 0, \quad \text{as } \delta \to 0^+.$$

其次，对于 $p > 1$，根据引理 1，有

$$(|\nabla\underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot\nabla\rho_\delta(\underline{u} - u) \geqslant 0$$

最后，有 $\int_\Omega \omega(x, 0)\rho_\delta(\omega(x, 0))\,dx \equiv 0$，以及 $\rho_\delta \geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上几乎处处成立，$\omega\rho_\delta(\omega(x, t))$ 单调增且当 $\delta^+ \to 0$ 时趋于 ω_+. 进一步，在 (10) 中令 $\delta \to 0$，可得

$$\int_\Omega \omega_+(x, t)\,dx \leqslant \lambda M\int_0^t\int_\Omega \omega_+(x, t)\,dx\,ds.$$

根据 Gronwall's 不等式，有 $\int_\Omega \omega_+(x, t)\,dx \equiv 0$，即在 Ω_T 上 $\underline{u} \leqslant u$ 几乎处处成立. 证明完毕.

下面问题的第一特征值 λ_1 对于本文的研究具有重要作用：

$$-\operatorname{div}(|\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi) = \lambda|\phi|^{p-2}\phi, \quad \text{in } \Omega; \ \phi|_{\partial\Omega} = 0 \tag{11}$$

引理 3 是关于上述第一特征值 λ_1 以及相应特征向量 $\phi(x)$ 的.

引理 3　存在具有如下性质的正常数 $\lambda_1(\Omega)$：

(i) 对任意 $\lambda < \lambda_1(\Omega)$，特征函数只具有平凡解 $\phi(x) \equiv 0$.

(ii) 当且仅当 $\lambda = \lambda_1(\Omega)$ 时 (11) 存在正解 $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$.

(iii) 当 $\lambda = \lambda_1(\omega)$ 时，问题 (11) 的解集是一维向量空间.

(iv) 若 Ω_1 和 Ω_2 是具有光滑边界的有界域，且满足 $\Omega_1 \subset \Omega_2$，则有 $\lambda_1(\Omega_1) > \lambda_1(\Omega_2)$.

(v) 设 $\{\Omega_n\}$ 是一列具有光滑边界的有界域，且满足 $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ 与 $\bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n = \Omega$，则 $\lim_{n\to\infty}\lambda_1(\Omega_n) = \lambda_1(\Omega)$.

此引理由文献 [18] 中的引理 2.1，2.2 以及文献 [16] 中的引理 1.1 得出.

特征值问题

$$-\Delta\psi = \theta\psi, \quad \text{in } \Omega; \ \psi|_{\partial\Omega} = 0 \tag{12}$$

的第一特征值 θ_1 和其相应特征函数 $\psi(x)$ 的性质已经很清楚了[19]. 而且可以利用 "Rayleigh 商" 来定义 θ_1：

$$\theta_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega),\, u \neq 0}\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega u^2\,dx}. \tag{13}$$

给出问题 (11) 第一特征值 λ_1 的类似的商如下.

引理 4

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega),\, u \neq 0}\frac{\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx}{\int_\Omega |u|^p\,dx}.$$

2 解的熄灭

这一部分着重考虑问题(1)解的熄灭.

定理1 设 $\lambda=0$, $1<p<2$, u是(1)的弱解,则存在时间T使得对任意$(x,t)\in\Omega\times(T,+\infty)$有$u\equiv 0$.

证明 定义辅助函数

$$v(x,t)=k(T-t)_+^{1/(2-p)}\ln(m+x_1+\cdots+x_n),\tag{14}$$

其中

$$k=\left\{\frac{(p-1)(2-p)n^{p/2}}{(2m)^p\ln(2m)}\right\}^{1/(2-p)},\ T=\left(\frac{\max|u_0|}{k\ln 2}\right)^{2-p},$$
$$m=\sup\{|x_1|+\cdots+|x_n|\}+2,\tag{15}$$

则

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{k}{2-p}(T-t)_+^{(p-1)/(2-p)}\ln(m+x_1+\cdots+x_n),\tag{16}$$

$$\mathrm{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)=(1-p)k^{p-1}(T-t)_+^{(p-1)/(2-p)}n^{p/2}(m+x_1+\cdots+x_n)^{-p}.\tag{17}$$

由(14)~(17)式可得

$$\frac{\partial v}{\partial t}\geqslant\mathrm{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v),\tag{18}$$

$$v(x,0)\geqslant u_0(x),\ \forall x\in\Omega;\ v(x,t)\geqslant 0,\ \forall(x,t)\in\partial\Omega\times(0,+\infty).\tag{19}$$

由引理2以及(18)、(19)式可得 $u(x,t)\leqslant v(x,t)$. 由$v(x,t)$的定义可知对所有的$(x,t)\in\Omega\times(T,+\infty)$, $u(x,t)\leqslant v(x,t)\equiv 0$.定理1得证.

定理2 设 $\lambda=0$, u是(1)的弱解,则对充分小的初值,存在时间T使得对任意$(x,t)\in\Omega\times(T,+\infty)$有$u\equiv 0$.

证明 对(1)的第一个方程乘以u^s,其中$s>0$,并在Ω上积分,可得

$$\frac{1}{s+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^{s+1}\mathrm{d}x+\frac{sp^p}{(s+p-1)^p}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{p+s-1}{p}}\right|^p\mathrm{d}x=\lambda\int_\Omega|u|^{q-2}u^{s+1}\mathrm{d}x.\tag{20}$$

由引理2,如果在Ω中$u_0\leqslant k\phi(x)$,其中$k>0$充分小,$\phi(x)$是(11)的第一特征函数,且$\max_{x\in\Omega}\phi(x)=1$,很容易验证$k\phi(x)$是(1)的上解;那么,对于所有$(x,t)\in\Omega\times(0,1)$都有$u(x,t)<k\phi(x)$. (20)式可改写为

$$\frac{1}{s+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^{s+1}\mathrm{d}x+\frac{sp^p}{(s+p-1)^p}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{p+s-1}{p}}\right|^p\mathrm{d}x\leqslant k^{q-2}\int_\Omega u^{s+1}\mathrm{d}x.$$

可得

$$\frac{1}{s+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^{s+1}\mathrm{d}x\leqslant\lambda k^{q-2}\int_\Omega u^{s+1}\mathrm{d}x.$$

通过积分,有

$$\int_\Omega u^{s+1}\mathrm{d}x\leqslant\lambda(s+1)k^{q-2}t\int_\Omega u_0^{s+1}\mathrm{d}x.\tag{21}$$

那么对充分小的初值,由(21)式知,存在时间T使得对任意$(x,t)\in\Omega\times(T,+\infty)$有$u\equiv 0$.

[参考文献]

[1] Astrita G, Marrucci G. Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics[M]. New York: McGraw-Hill, 1974.

[2] Martinson L K, Pavlov K B. Unsteady shear flows of a conducting fluid with a rheological power law[J]. Magnit Gidrodinamika, 1971, 2: 50-58.

[3] Kalashnikov A S. On a nonlinear equation appearing in the theory of non-stationary filtration[J]. Trudy Sem Petrovsk, 1978, 5: 60-68.

[4] Esteban J R, Vazquez J L. On the equation of turbulent filtration in one-dimensional porous media[J]. Nonlinear Anal,

1982, 10: 1 303-1 325.
[5] Garcia-Huidobro M, Manasevich R, Schmitt K. Positive radial solutions of quasilinear elliptic partial differential equations in a ball[J]. Nonlinear Anal, 1999, 35(2): 175-190.
[6] Guo Z M, Webb J R L. Uniqueness of positive solutions for quasilinear elliptic equations when a parameter is large[J]. Proc Roy Soc, 1994, 124(A): 189-198
[7] Hai D D, Schmitt K. On radial solutions of quasilinear boundary value problems[J]. Birkhauser Basel, 1999, 35: 349-361.
[8] Guo Z M. Existence and uniqueness of positive radial solutions for a class of quasilinear elliptic equations[J]. Appl Anal, 1992, 47: 173-190.
[9] Kalashnikov A S. The nature of the propagation of perturbations in problems of non-linear heat conduction with absorption [J]. USSR Comp Math Math Phys, 1974, 14: 70-85.
[10] Gu Y G. Necessary and sufficient conditions of extinction of solution on parabolic equations[J]. Acta Math Sinica, 1994, 37: 73-79.
[11] Evans L C, Knerr B F. Instantaneous shrinking of the support of non-negative solutions to certain nonlinear parabolic equations and variational inequalities[J]. Illinois J Math, 1979, 23: 153-166.
[12] Lair A V. Finite extinction time for solutions of nonlinear parabolic equations[J]. Nonl Anal, 1993, 21(1): 1-8.
[13] Dibenedetto E. Degenerate Parabolic Equations[M]. New York: Springer, 1993.
[14] Yuan H J, Lian S Z, Gao W J, et al. Extinction and positive for the evolution p-Laplacian equation in RN[J]. Nonl Anal, 2005, 60(6): 1 085-1 091.
[15] Li Y X, Wu J C. Extinction for fast diffusion equations with nonlinear sources[J]. Electron J Diff Equa, 2005(23): 1-7.
[16] Li Y X, Xie C H. Blow-up for p-Laplacian parabolic equations[J]. Electron J Diff Equa, 2003(20): 1-12.
[17] Diaz J I. Elliptic Equations[M]. Boston: Pitman, 1985.
[18] Fusho Y, Murata Y. Principal eigenvalue of the p-Laplacian in $\mathbf{R}^N$[J]. Nonl Anal TMA, 1997, 30(7): 4 749-4 756.
[19] McOwen R C. Partial Differential Equation: Methods and Applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.

[责任编辑: 丁　蓉]