第 33卷第 2期 南京师大学报 (自然科学版) Vol 33 No. 2
2010年 6月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition) Jun, 2010

基于 Λ-有界变差函数的性质研究

朱建国[1], 张 洁[2]

(1. 南京工业职业技术学院基础课部, 江苏 南京 210046)
(2. 南京信息工程大学数理学院, 江苏 南京 210044)

[摘要] 主要研究了 Λ-有界变差函数的性质, 讨论了 Λ-有界变差函数与有界变差函数的联系. 同时, 将本性变差的概念推广到了 Λ-本性变差, 并给出了相关结果的证明.

[关键词] 有界变差函数, Λ-有界变差函数, 本性变差, Λ-本性变差

[中图分类号] O174. 1 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010)02-0021-05

Study on the Nature of Λ-Function of Bounded Variation

Zhu Jianguo[1], Zhang Jie[2]

(1. Basic Department, Nanjing Institute of Industry Technology, Nanjing 210046, China)
(2. College of Math & Physics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China)

Abstract: This paper mainly expounds the nature of Λ-function of bounded variation, discusses the connection between the Λ-function of bounded variation and the function of bounded variation. At the same time, this paper expands the concept of essential variation to Λ-function of bounded variation, and gives the relevant justification.

Key words: function of bounded variation, Λ-function of bounded variation, essential variation, Λ-essential variation

Waterman D在 1972年首次提出了 Λ-有界变差函数的概念[1], 作为对有界变差函数的一种推广, 它在数学领域的经典分支 Fourier级数的研究中得到了广泛的应用[1,2]. 随后, Waterman D再次对 Λ-有界变差函数的性质进行了一系列的讨论[3]. 本文首先讨论了 Λ-有界变差函数与有界变差函数的联系, 并在 Λ-有界变差函数的性质基础上进一步研究了 Λ-有界变差函数的连续性, 并将本性变差的概念推广到了 Λ-本性变差. 本文所得到的一些新的结果, 都将使我们对 Λ-有界变差函数有一个更深刻的认识.

在证明主要结果之前, 先回顾一下有界变差函数和 Λ-有界变差函数的定义, 并给出一个重要引理.

定义 **1**[4] 设 $f(x)$ 是定义在区间 $I=[a,b]$ 上的实函数, 对 $[a,b]$ 的任一分划

$$\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

作变差和 $\sum\limits_{1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$, 我们称 $\sup\limits_{\pi}\sum\limits_{1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的全变差, 记作 $V(f;I)$, 即

$$V(f;I)=\sup_{\pi}\sum_{1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|.$$

如果 $V(f;I)<+\infty$, 那么就称 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 记作 $f(x)\in BV([a,b])$.

定义 **2**[1] 设 $\Lambda=\{\lambda_n\}$ 为一给定的非降正数列, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}=\infty$. 设 $f(x)$ 是定义在区间 $I=[a,b]$ 上的实函数, $\{I_n=[a_n,b_n]\}$ 为 $[a,b]$ 上互不重叠的区间列, 记 $f(I_n)=f(b_n)-f(a_n)$. 若对任意的 $\{I_n\}$, 都有

收稿日期: 2009-08-16
基金项目: 国家自然科学基金 (70871061)、江苏教育科学"十一五"规划重点课题 (B-b/2009/01/018)、南京信息工程大学精品课程教改项目 (07KC0060).
通讯联系人: 朱建国, 副教授, 研究方向: 基础数学. E-mail: zhujg@niit.edu.cn

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{|f(I_n)|}{\lambda_n}<+\infty,$$

则称 $f(x)$ 是区间 I 上的 Λ–有界变差函数, 记作 $f\in\Lambda BV(I)$, 或 $f(x)\in\{\lambda_n\}BV(I)$.

由上面定义可以看出, Λ–有界变差函数的定义不直接依赖于这种函数的定义区间的分划. 下面的引理给出了 Λ–有界变差函数的几种等价定义.

引理 1[3]　以下三个命题是等价的:

(1) $f(x)$ 是区间 $I=[a,b]$ 上的 Λ–有界变差函数($f(x)\in\Lambda BV(I)$),

(2) 存在 $M>0$, 使对 $[a,b]$ 上的任何不相重叠的闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$, 有

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{|f(b_n)-f(a_n)|}{\lambda_n}\leqslant M,$$

(3) 存在 $M>0$, 使对 $[a,b]$ 上的任何有限多个互不重叠的闭区间 $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, …, $[a_N,b_N]$, 有

$$\sum_{1}^{N}\frac{|f(b_n)-f(a_n)|}{\lambda_n}\leqslant M.$$

详细的证明参见[3].

由引理 1的(2), 自然可以引入

定义 3[3]　设 $f(x)$ 是区间 $I=[a,b]$ 上的 Λ–有界变差函数, 称

$$V_\Lambda(f;I)=\sup\left\{\sum_{1}^{\infty}\frac{|f(I_n)|}{\lambda_n}: I_n\subset I\right\}$$

为 $f(x)$ 在区间 I 上的 Λ–全变差.

而由引理 1的(3), 我们很容易得出定义 3的一个等价定义.

定义 3′　设 $f(x)$ 是区间 $I=[a,b]$ 上的 Λ–有界变差函数, 我们称

$$V_\Lambda(f;I)=\sup_{[a,b]}\sum_{1}^{N}|f(b_n)-f(a_n)|\frac{1}{\lambda_n}$$

为 $f(x)$ 在区间 I 上的 Λ–全变差, 其中 $\sup\limits_{[a,b]}$ 指取遍 $[a,b]$ 上任何有限多个互不重叠的闭区间 $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, …, $[a_N,b_N]$ 的上确界.

1　Λ–有界变差函数与有界变差函数的联系

我们知道 Λ–有界变差函数的定义不直接依赖于这种函数的定义区间的分划, 这和一般有界变差函数的定义不同. 但是, Λ–有界变差函数作为对有界变差函数的一种推广, 它们之间还是有一定联系的.

定理 1　设 $\Lambda=\{\lambda_n\}$ 是非降的正数列, 且有界. 若 $f(x)$ 是 Λ–有界变差函数, 则此时 $f(x)$ 是通常意义下的有界变差函数.

证明　由题设可知, 存在 $M>0$, 使得 $0<\lambda_n\leqslant M$, $\forall n\in N$. 考虑对 $[a,b]$ 的任一分划

$$\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b,$$

则 $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, …, $[x_{m-1},x_m]$ 是 $[a,b]$ 上的互不重叠的闭区间列. 因为 $f(x)\in\Lambda BV(I)$, 故存在 $K>0$, 使得

$$\sum_{1}^{m}\frac{|f(x_n)-f(x_{n-1})|}{\lambda_n}\leqslant K,$$

从而有

$$\sum_{1}^{m}|f(x_n)-f(x_{n-1})|=M\sum_{1}^{m}\frac{|f(x_n)-f(x_{n-1})|}{M}\leqslant M\sum_{1}^{m}\frac{|f(x_n)-f(x_{n-1})|}{\lambda_n}\leqslant MK.$$

于是

$$\sup_{\pi}\sum_{1}^{m}|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leqslant MK,$$

即 $V(f;[a,b])\leqslant MK$, $f(x)$ 是有界变差函数.

2　Λ–有界变差函数的性质

Λ–有界变差函数作为对有界变差函数的推广, 它在其定义区间 $[a,b]$ 上的许多性质, 例如连续性, 有

些是与有界变差函数的性质[4,5]是一致的. 下面的 3个定理在文献[3]中有所表述.

定理 2 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 Λ–有界变差函数, 则 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界函数.

定理 3 若 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的 Λ–有界变差函数, 则对任意 $x\in[a,b)$, $f(x+0)$ 存在; 对 $\forall x\in(a,b]$, $f(x-0)$ 存在.

定理 4 若 $f(x)$ 是区间 $I=[a,b]$ 上的 Λ–有界变差函数, 则 $f(x)$ 的不连续点的全体是可列集.

为了引入 Λ–本性变差的概念, 先回顾一下有关本性变差的一些内容. 文献[6]中提到的一个函数在区间 $[a,b]$ 上规则的定义, 为了本文的需要, 下面的定义已作了合理的推广(不仅仅局限于有界变差函数类).

定义 4 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的实函数, 且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上任一点的左、右极限都存在. 若 $f(a)=f(a+0)$, $f(b)=f(b-0)$, 且

$$f(x)\in[\min\{f(x-0),\ f(x+0)\},\ \max\{f(x-0),\ f(x+0)\}],\quad \forall x\in(a,b),$$

则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是规则的 (normal), 或称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上没有外部的跳跃点 (external saltus).

事实上, 对于 Λ–有界变差函数, 我们将证明类似的结果也是成立的.

定理 5 设 $f(x)$ 是定义在区间 $I=[a,b]$ 上的 Λ–有界变差函数, 若 $f(x)$ 在 I 上是规则的, 则 $V_\Lambda(f;I)$ 只与 $f(x)$ 在 I 上连续点的取值有关.

证明　对任意的 $\varepsilon>0$, 由定义 3′可知存在不相重叠的闭区间 $[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots,N)$ 使得

$$V_\Lambda(f;I)<\sum_1^N|f(b_n)-f(a_n)|\frac{1}{\lambda_n}+\frac{\varepsilon}{2},$$

因此, 如果能找到不相重叠的闭区间 $[\alpha_n,\beta_n]$ $(n=1,2,\cdots,N')$ 使得 α_n 和 β_n 为 $f(x)$ 的连续点, 且有

$$\sum_1^N|f(b_n)-f(a_n)|\frac{1}{\lambda_n}\leqslant\sum_1^{N'}|f(\beta_n)-f(\alpha_n)|\frac{1}{\lambda_n}+\frac{\varepsilon}{2},$$

那么就可得

$$V_\Lambda(f;I)<\sum_1^{N'}|f(\beta_n)-f(\alpha_n)|\frac{1}{\lambda_n}+\varepsilon,$$

也就是说 $V_\Lambda(f;I)$ 只与 $f(x)$ 在连续点的取值有关.

事实上, 任取一项 $|f(b_n)-f(a_n)|\dfrac{1}{\lambda_n}$, 若 b_n 为 $f(x)$ 的不连续点(对 a_n 为 $f(x)$ 的不连续点的情形可进行如下类似的处理), 则由题设可知

$$\max\{|f(a_n)-f(b_n-0)|,\ |f(a_n)-f(b_n+0)|\}\geqslant|f(b_n)-f(a_n)|,$$

由定理 3和定理 4可以取 $f(x)$ 的连续点 b'_n 充分接近 b_n 并满足

$$|f(b_n)-f(a_n)|<|f(b'_n)-f(a_n)|+\frac{\varepsilon}{2\sum\limits_1^N\dfrac{1}{\lambda_k}}.$$

假如 b_n 不是另外的 $[a_k,b_k]$ $(k\neq n)$ 的端点, 则还可使 b'_n 满足 $[a_n,b'_n]$ 代替 $[a_n,b_n]$ 后与其它的 $[a_k,b_k]$ $(k\neq n)$ 仍不重叠. 如果 b_n 是另外一个 $[a_l,b_l]$ 的端点, 那么它必为 $[b_n,c_n]$ 的形式, 这时

$$|f(c_n)-f(a_n)|\leqslant|f(b_n)-f(a_n)|+|f(c_n)-f(b_n)|.\qquad(*)$$

如(*)式中等号成立, 将两个闭区间 $[a_n,b_n]$、$[b_n,c_n]$ 换成一个闭区间 $[a_n,c_n]$, 并让它对应 $\min\{\lambda_n,\lambda_l\}$, 记 $\max\{\lambda_n,\lambda_l\}=\lambda_k$, 然后令 $[a_{k+1},b_{k+1}]$ 相应于 λ_k, $[a_{k+2},b_{k+2}]$ 相应于 λ_{k+1}, 如此等等, 显然这样得到的新和式 $\sum'$ 满足

$$\sum_1^N|f(b_n)-f(a_n)|\frac{1}{\lambda_n}\leqslant\sum{}',$$

故有

$$V_\Lambda(f;I)<\sum{}'+\frac{\varepsilon}{2}.$$

再对得到的新的闭区间列的使 $f(x)$ 不连续的端点进行如上的同样处理, 由于开始时闭区间的个数 N

是不变的,且若有使$f(x)$不连续的两个区间的共同端点使$(*)$成立等号,则经过如上处理后得到的新的闭区间列的个数减少1.由此,可不妨设对于初始的N个闭区间,若存在两个区间共同的使$f(x)$不连续的端点,那么它们使$(*)$式成立不等号.而若$(*)$式成立不等号,则$f(c_n)-f(b_n)$与$f(b_n)-f(a_n)$必异号.先设$f(a_n)<f(b_n)$,$f(c_n)<f(b_n)$,这时可取b'_n使得$f(b'_n)$充分接近$\max\{f(b_n+0),f(b_n-0)\}$,且

$$|f(b_n)-f(a_n)|<|f(b'_n)-f(a_n)|+\frac{\varepsilon}{2\sum\limits_{1}^{N}\frac{1}{\lambda_k}},$$

$$|f(c_n)-f(b_n)|<|f(c_n)-f(b'_n)|+\frac{\varepsilon}{2\sum\limits_{1}^{N}\frac{1}{\lambda_k}}.$$

而对$f(a_n)>f(b_n)$,$f(c_n)>f(b_n)$的情形,则可选b'_n,使$f(b'_n)$充分接近$\min\{f(b_n+0),f(b_n-0)\}$;在这两种情况下,都将$[a_n,b_n]$、$[b_n,c_n]$代替为$[a_n,b'_n]$、$[b'_n,c_n]$.总之,对每个以$f(x)$的不连续点为端点的闭区间$[a_n,b_n]$都作如上的处理,那么我们就可得到所需要的闭区间$[\alpha_n,\beta_n]$ $(n=1,2,\cdots,N')$.

由定理5,我们给出的Λ-本性变差的概念如下:

定义5 设$f(x)$,$g(x)$是区间$I=[a,b]$上的Λ-有界变差函数,若$f(x)=g(x)$ a.e. $x\in I$且$g(x)$在I上是规则的,那么称$V_\Lambda(g;I)$为$f(x)$在I上的Λ-本性变差,记做

$$V_{\Lambda\text{-}ess}(f;I)=V_\Lambda(g;I).$$

定理6 设$f(x)$,$g(x)$是区间$I=[a,b]$上的Λ-有界变差函数,若$f(x)=g(x)$ a.e. $x\in I$且$g(x)$在I上是规则的,则

$$V_\Lambda(g;I)\leqslant V_\Lambda(f;I).$$

证明　令$E=I\backslash(\{x: f(x)\neq g(x)\}\cup\{y: y$是$g(x)$的不连续点$\})$.因为$g(x)$在$I$上是规则的,故由定理5可知,$V_\Lambda(g;I)$的值只与$g(x)$在$E$上的取值有关,即对任意的$\varepsilon>0$,存在$I$上有限个不相重叠的闭区间$[a_n,b_n]$,其中$a_n,b_n\in E(n=1,2,\cdots,N)$,使得

$$V_\Lambda(g;I)<\sum_{1}^{N}|g(b_n)-g(a_n)|\frac{1}{\lambda_n}+\varepsilon.$$

又显然

$$\sum_{1}^{N}|g(b_n)-g(a_n)|\frac{1}{\lambda_n}=\sum_{1}^{N}|f(b_n)-f(a_n)|\frac{1}{\lambda_n}\leqslant V_\Lambda(f;I),$$

从而

$$V_\Lambda(g;I)\leqslant V_\Lambda(f;I)+\varepsilon.$$

最后,由ε的任意性,即知$V_\Lambda(g;I)\leqslant V_\Lambda(f;I)$.

下面给出引入Λ-本性变差概念以后所得到的主要结果,此结果推广了对于有界变差函数情形的结果:

$$V_{ess}(f;I)=\inf_{\substack{g\in BV(I)\\ f=g\,\text{a.e.}\,x\in I}}V(g;I).$$

定理7 设$f(x)$是区间$I=[a,b]$上的Λ-有界变差函数,则有

$$V_{\Lambda\text{-}ess}(f;I)=\inf_{\substack{g\in\Lambda BV(I)\\ f=g\,\text{a.e.}\,x\in I}}V_\Lambda(g;I).$$

证明　首先,对于任意的区间$I=[a,b]$上的Λ-有界变差函数$g(x)$,且$f(x)=g(x)$ a.e. $x\in I$,则由定理6及Λ-本性变差的定义可知

$$V_{\Lambda\text{-}ess}(f;I)\leqslant V_\Lambda(g;I),$$

因此,

$$V_{\Lambda\text{-}ess}(f;I)\leqslant\inf_{\substack{g\in\Lambda BV(I)\\ f=g\,\text{a.e.}\,x\in I}}V_\Lambda(g;I).\tag{1}$$

其次,由定理3和定理4我们可以适当改变$f(x)$在其不连续点的取值,使得到的新函数$g(x)$在I上是规则的.又显然此时有

$$f(x)=g(x)\ \text{a.e.}\ x\in I,$$

从而由定理 6, 可得

$$V_{\Lambda\text{-}ess}(f;I)=V_{\Lambda}(g;I)\geqslant\inf_{\substack{g\in\Lambda BV(I)\\ f=g\ a.e\ x\in I}}V_{\Lambda}(g;I),\tag{2}$$

最后由 (1) 和 (2), 即得所证.

[参考文献]

[1] Waterman D. On convergence of fourier series of functions of generalized bounded variation[J]. Studia Math, 1972, 44: 107-117.

[2] Waterman D. On the summability of fourier series of functions of Λ-bounded variation[J]. Studia Math, 1976, 55: 97-109.

[3] Waterman D. On Λ-bounded variation[J]. Studia Math, 1976, 57: 33-45.

[4] 夏道行, 严绍宗. 实变函数与应用泛函分析基础[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1987.

[5] 周民强. 实变函数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.

[6] Paul R Zingano, Stanly L Steinberg. On the hardy-littlewood theorem for functions of bounded variation[J]. Siam J Math Anal, 2002, 33(5): 1199-1210.

[责任编辑: 丁　蓉]

(上接第 20页)

由引理 2和引理 3的等号成立条件可得 (2) 等号成立当且仅当 $K_1=K_2=\cdots=K_n$. 定理 1得证.
有关平均值理论的一些新成果可参考文献 [5, 6]; 有关几何不等式的新成果可参考文献 [13, 14].

[参考文献]

[1] Holland F. On a mixed arithmetic-mean, geometric-mean inequality[J]. Math Competitions, 1992(5): 60-64.

[2] Hu Y J, Zhang X P, Yang Z H. Mixed mean inequalities for several positive definite matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2005, 395: 247-263.

[3] Kedlaya K. Proof of a mixed arithmetic-mean, geometric-mean inequality[J]. Amer Math Monthly, 1994, 101: 355-357.

[4] Mond B, Pečarić J. A mixed arithmetic-mean harmonic-mean matrix inequality[J]. Linear Algebra Appl, 1996, 237/238: 449-454.

[5] 孙燮华. 关于混合算术平均-几何平均不等式[J]. 中国计量学院学报, 2002, 13(1): 26-28.

[6] Yuan Jun, Li Aijun. Geometric version of mixed mean inequalities[J]. Tamkang J Math, 2009, 40(2): 129-137.

[7] Gardner R J. Geometric Tomography[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[8] Schneider R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[9] Moszyńska M. Quotient star bodies, intersection bodies and star duality[J]. J Math Anal Appl, 1999, 232(1): 45-60.

[10] Moszyńska M. Selected Topics in Convex Geometry[M]. Berlin: Springer Verlag, 2005.

[11] Beckenbach E F, Bellman R. Inequalities[M]. Berlin: Springer, 1961.

[12] Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. Inequalities[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

[13] 袁俊. L_p 逆等周不等式[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2009, 32(2): 22-24.

[14] 朱先阳, 冷岗松. 混合新几何体 $\Gamma_{(-p,i)}K$ 的不等式[J]. 数学学报, 2008, 51(4): 787-794.

[责任编辑: 丁　蓉]