一类捕食模型正解的存在性和惟一性

张艳芳[1], 陈文彦[2]

(1. 东南大学经济管理学院, 江苏 南京 210018)
(2. 东南大学数学系, 江苏 南京 210018)

[摘要] 研究了一类带有修正的 Holling-II型响应函数的捕食模型的齐次 Dirichlet边值问题. 通过分析其相应的反应扩散系统正解的渐近性, 得到了正解存在的一个必要条件, 并且应用锥上的拓扑度理论指出了该条件也是正解存在的充分条件. 此外, 研究了一维情形下正解的惟一性.

[关键词] 捕食模型, 惟一性, 存在性, 反应扩散方程
[中图分类号] O175.25 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010)02-0026-05

Existence and Uniqueness of Positive Solutions for a Predator-Prey Model

Zhang Yanfang[1], Chen Wenyan[2]

(1. School of Economics & Management, Southeast University, Nanjing 210018, China)
(2. Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing 210018, China)

Abstract: A predator-prey model with Modified Holling-Type II Schemes under homogeneous Dirichlet boundary condition is considered. By analyzing the asymptotic behaviors of positive solutions to the corresponding reaction-diffusion model, a necessary condition for the existence of positive solutions is given. Moreover, by virtue of the topological degree theory in cones, it turns out that the necessary condition is sufficient. Besides, the uniqueness of positive solutions in one dimension space is described.

Key words: predator-prey model, uniqueness, existence, reaction-diffusion equations

本文考察

$$\begin{cases} -\Delta u = u\left(a - u - \dfrac{v}{(1+bu)(1+cv)}\right), & x \in \Omega, \\ -\Delta v = v\left(\dfrac{mu}{(1+bu)(1+cv)} - d\right), & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性和惟一性, 其中 Ω是 $\mathbf{R}^N$ 中边界 $\partial\Omega$光滑的有界区域, Δ为 Laplace算子, u、v分别为食物和猎物的密度, a、b、c、d、m都是正常数. 响应函数$\dfrac{u}{(1+bu)(1+cv)}$是 Bazykin[1] 在Holling-II型响应函数的基础上引入猎物之间的竞争项建立的, 有时称这种响应函数为修正的Holling-II型响应函数. 对于猎物有正的出生率的捕食模型, Wang等人在文献[2]中应用锥上拓扑度、分支理论以及奇异扰动理论做了简单讨论. 关于捕食模型的研究还可以参看文献[3-5].

1 预备性结果

本节给出一些预备性结果, 这些结果在后面的分析中将经常遇到.

收稿日期: 2009-09-20
基金项目: 国家自然科学基金(10601011).
通讯联系人: 陈文彦, 博士, 副教授, 研究方向: 偏微分方程. E-mail: cwyseu@163.com

令 $\lambda_1(q)$ 是下述特征值问题的主特征值:

$$-\Delta w + q(x)w = \lambda w,\ x \in \Omega;\ w = 0,\ x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

其中 $q(x) \in C(\bar{\Omega})$. 众所周知, $\lambda_1(q)$ 是简单的, 即为单重的. 又若 $q_1(x) \leqslant q_2(x)$, 且 $q_1(x) \not\equiv q_2(x)$, 则有 $\lambda_1(q_1) < \lambda_1(q_2)$. 为了方便起见, 记 $\lambda_1 = \lambda_1(0)$.

考虑下面的边值问题:

$$-\Delta w = wf(x, w),\ x \in \Omega;\ w = 0,\ x \in \partial\Omega, \tag{3}$$

其中 $f(x, w): \bar{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ 满足下面的假设:

(H1) $f(x, w)$ 关于 x 属于 C^{α}, $0 < \alpha < 1$;

(H2) $f(x, w)$ 关于 w 属于 C^1, 并且 $\forall (x, w) \in \bar{\Omega} \times [0, \infty)$, $f_w(x, w) < 0$;

(H3) 存在正常数 C, 使得当 $(x, w) \in \bar{\Omega} \times [C, \infty)$ 时, $f(x, w) \leqslant 0$.

本文将反复用到下面的引理, 该引理来源于文献[6, 7].

引理 1 (i) 若 $\lambda_1(-f(x, 0)) \geqslant 0$, 则问题(3)不存在正解, 并且平凡解 0 是全局渐近稳定的;

(ii) 若 $\lambda_1(-f(x, 0)) < 0$, 则问题(3)存在惟一正解 w, 同时还满足 $w(x) \leqslant C$. 进一步, 该正解 w 是全局渐近稳定的, 平凡解 0 是不稳定的.

定义 $C_0(\bar{\Omega}) = \{w \in C(\bar{\Omega}): w|_{\partial\Omega} = 0\}$. 作为问题(3)的特例, 考虑半线性椭圆型方程:

$$-\Delta w = w(k - w),\ x \in \Omega;\ w = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{4}$$

由引理 1 知, 当 $k \leqslant \lambda_1$ 时, $w = 0$ 是问题(4)的惟一非负解. 当 $k > \lambda_1$ 时, 问题(4)有惟一正解, 记作 θ_k, 并且 $\theta_k < k$.

问题(4)对应的初边值问题为

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = w(k - w), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ w = 0,\ (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), & w(x, 0) \geqslant 0, \not\equiv 0,\ x \in \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

记问题(5)的惟一正解为 $w_k(x, t)$. 由引理 1 知, 若 $k \leqslant \lambda_1$, 则 0 是全局渐近稳定的, 而若 $k > \lambda_1$, 则当 $t \to \infty$ 时, $w_k(x, t)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛到问题(4)的正解 θ_k.

显然, 当 $a \leqslant \lambda_1$ 时, 问题(1)的非负解只有$(0, 0)$. 因此以后在本节都假设 $a > \lambda_1$. 类似于文献[4]的证明, 我们可以得到问题(1)正解的先验界.

命题 1 问题(1)的任意正解 (u, v) 满足先验估计:

$$u(x) \leqslant \theta_a(x) < a,\ v(x) < R := \frac{m\|\tilde{\theta}_a\|_{\infty}}{c},\ \forall x \in \bar{\Omega}, \tag{6}$$

其中 $\tilde{\theta}_a = (-\Delta)^{-1}\theta_a$, 这里 $(-\Delta)^{-1}$ 是算子 $(-\Delta)$ 在 Ω 上带有齐次 Dirichlet 边界条件的逆算子.

2 正解的存在性和惟一性

我们首先分析问题(1)对应的反应扩散系统:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u\left(a - u - \dfrac{v}{(1 + bu)(1 + cv)}\right), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ v_t - \Delta v = v\left(\dfrac{mu}{(1 + bu)(1 + cv)} - d\right), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u = v = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x),\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{7}$$

其中 $u_0(x)$, $v_0(x)$ 都为非负的连续函数且不恒为零.

现在, 令$(u(x, t), v(x, t))$是问题(7)的非负解. 显然, $(u(x, t), v(x, t))$是整体存在的, 且利用抛物型方程组的最大值原理可知, 对所有的 $x \in \Omega$ 和 $t > 0$, 都有 $u(x, t) > 0$, $v(x, t) > 0$. 进一步, 我们能断言下面关于$(u(x, t), v(x, t))$的渐近行为的一些结论. 从生物学意义上讲, 这些结果意味着食物或者猎物最终消亡.

命题 2 (i) 若 $a \leqslant \lambda_1$, 则当 $t \to \infty$ 时, $(u(x, t), v(x, t)) \to (0, 0)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致成立;

(ii) 若 $a > \lambda_1$, $d \geqslant -\lambda_1\left(-\frac{m\theta_a}{1+b\theta_a}\right)$, 则当 $t \to \infty$ 时, $(u(x,t), v(x,t)) \to (\theta_a, 0)$ 在 Ω 上一致成立.

证明　(i) 由于 $u_t - \Delta u \leqslant au - u^2$, 借助于抛物型方程的比较原理知, $0 \leqslant u(x,t) \leqslant w_a(x,t)$, 其中 $w_a(x,t)$ 是问题(5)对应于 $k = a$ 且带有初值 $w(x,0) = u(x,0)$ 的惟一正解. 注意到 $a \leqslant \lambda_1$, 所以当 $t \to \infty$ 时, $w_a(x,t) \to 0$ 在 Ω 上一致成立. 故 $u(x,t) \to 0$ 在 Ω 上一致成立. 选取 $\sigma > 0$, 满足 $m\sigma < \lambda_1 + d$. 利用(7)的第二个方程可得, 存在 $T \gg 1$, 使得

$$v_t - \Delta v \leqslant v\left(\frac{m\sigma}{1+cv} - d\right),\ (x,t) \in \Omega \times (T, \infty).$$

因此由抛物型方程的比较原理和引理1知, $v(x,t) \to 0$ 在 Ω 上一致成立.

(ii) 同上我们可得 $0 \leqslant u(x,t) \leqslant w_a(x,t)$. 注意到 $a > \lambda_1$, 由引理1知, $w_a(x,t) \to \theta_a(x)$ 在 Ω 上一致成立, 所以

$$\limsup_{t\to\infty} u(x,t) \leqslant \theta_a(x) \text{ 在 } \Omega \text{ 上一致成立}. \tag{8}$$

下面分两种情况证明 $v(x,t) \to 0$ 在 Ω 上一致成立.

情形 **1**　$d > -\lambda_1\left(-\frac{m\theta_a}{1+b\theta_a}\right)$. 选取 $\varepsilon > 0$, 满足 $m\varepsilon < d + \lambda_1\left(-\frac{m\theta_a}{1+b\theta_a}\right)$. 由(8)式知, 存在 $T \gg 1$, 使得 $\forall (x,t) \in \Omega \times [T,\infty)$, 有 $u(x,t) \leqslant \theta_a(x) + \varepsilon$. 于是, $\forall (x,t) \in \Omega \times [T,\infty)$, 有

$$v_t - \Delta v \leqslant v\left(\frac{m(\theta_a+\varepsilon)}{(1+b\theta_a+b\varepsilon)(1+cv)} - d\right) \leqslant v\left(\frac{m\theta_a}{(1+b\theta_a)(1+cv)} + m\varepsilon - d\right),$$

因此由抛物型方程的比较原理知, $0 \leqslant v(x, t+T) \leqslant z(x,t)$, 其中 $z(x,t)$ 是问题

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = z\left(\frac{m\theta_a}{(1+b\theta_a)(1+cz)} + m\varepsilon - d\right), & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ z = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ z(x,0) = v(x,T), & x \in \Omega \end{cases} \tag{9}$$

的正解. 由引理1知, $v(x,t) \to 0$ 在 Ω 上一致成立.

情形 **2**　$d = -\lambda_1\left(-\frac{m\theta_a}{1+b\theta_a}\right)$. 同情形1可证, 任取 $\tau > 0$, 存在 $T_\tau \gg 1$, 使得 $0 \leqslant v(x, t+T_\tau) \leqslant z_\tau(x,t)$, 其中 $z_\tau(x,t)$ 是问题(9)对应于 $\varepsilon = \tau$, $T = T_\tau$ 时的正解. 由引理1知, 当 $t \to \infty$ 时 $z_\tau(x,t)$ 在 Ω 上一致收敛到 $h_\tau(x)$, 其中 h_τ 是边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta h = h\left(\frac{m\theta_a}{(1+b\theta_a)(1+ch)} + m\tau - d\right), & x \in \Omega, \\ h = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{10}$$

的惟一正解. 因此对每个 τ,

$$\limsup_{t\to\infty} v(x,t) \leqslant h_\tau(x) \text{ 在 } \Omega \text{ 上一致成立}. \tag{11}$$

利用正则性理论和嵌入定理, 容易证明当 $\tau \to 0$ 时, $h_\tau(x) \to 0$ 在 Ω 上一致成立. 在(11)式中令 $\tau \to 0$, 我们可得, 在 Ω 上一致地有,

$$\limsup_{t\to\infty} v(x,t) \leqslant 0$$

因此 $v(x,t) \to 0$ 在 Ω 上一致成立.

再次利用(7)的第一个方程, 存在 $T_\delta \gg 1$, 使得

$$u_t - \Delta u \geqslant u(a - u - \delta),\ (x,t) \in \Omega \times (T_\delta, \infty),$$

其中 $\delta > 0$ 满足 $a - \delta > \lambda_1$. 最终, 利用比较原理有

$$u(x, t+T_\delta) \geqslant w_{a-\delta}(x,t),$$

其中 $w_{a-\delta}(x,t)$ 是问题(5)对应于 $k = a - \delta$ 且带有初值 $w(x,0) = u(x, \overline{T_\delta})$ 的正解. 这导致下面的结果:

$$\liminf_{t\to\infty} u(x,t) \geqslant \theta_{a-\delta}(x) \text{ 在 } \Omega \text{ 上一致成立}. \tag{12}$$

注意到, 当 $\delta \to 0$ 时, $\theta_{a-\delta}(x) \to \theta_a$ 在 Ω 上一致成立. 从而借助于(12)式可知

$$\limsup_{t\to\infty} u(x,t) \geqslant \theta_a(x) \text{ 在 } \Omega \text{ 上一致成立.} \tag{13}$$

结合(8)以及(13)知(ii)成立.

注 1 记 $d^* = -\lambda_1\left(\frac{-m\theta_a}{1+b\theta_a}\right)$. 由命题 2知, 若问题(1)存在正解, 则 $a>\lambda_1$, $d<d^*$. 定义 $f(k)=-\lambda_1\left(\frac{-m\theta_k}{1+b\theta_k}\right)$, 则由文献[4]知, $f(k)$ 是 (λ_1,∞) 上的严格单调增函数, 并且 $\lim_{k\to\infty} f(k)=m/b-\lambda_1$, $\lim_{k\to\lambda_1} f(k)=-\lambda_1$. 显然, $d^*>0$成立的一个必要条件是 $m/b-\lambda_1>d^*>0$, 即 $m>b\lambda_1$. 当 $m>b\lambda_1$ 时, 记 $a^*>\lambda_1$ 为 $f(k)$ 的惟一零点, 则 $d^*>0$当且仅当 $a>a^*$. 因此我们得到问题(1)存在正解的一个必要条件:

$$m>b\lambda_1,\ a>a^*,\ d<d^*. \tag{14}$$

在下面的讨论中, 没有特殊说明, 我们总认为 a, b, d, m 满足条件(14).

锥上的拓扑度理论是研究椭圆型方程组齐次 Dirichlet边值问题正解存在性的一个有力工具. 这里, 我们采用[2]的框架来讨论问题(1). 为此, 引入一些记号.

$E=[C_0^1(\Omega)]^2$, 其中 $C_0^1(\Omega)=\{w\in C^1(\Omega): w|_{\partial\Omega}=0\}$;

$W=K\times K$, 其中 $K=\{w\in C_0^1(\Omega): w(x)\geqslant 0\}$;

$D=\{(u,v)\in W: u<a, v<R\}$.

$\forall t\in[0,1]$, 定义

$$F_t(u,v)=(-\Delta+M)^{-1}\begin{pmatrix} tu\left(a-u-\dfrac{v}{(1+bu)(1+cv)}\right)+Mu \\ tv\left(-d+\dfrac{mu}{(1+bu)(1+cv)}\right)+Mv \end{pmatrix},$$

其中 $M=\max\left\{\frac{1}{c}, d\right\}+1$. 根据正则性理论和嵌入定理知, F_t 是 E 上的全连续算子序列. 再根据最大值原理, 可得 $F_t(u,v): [0,1]\times D\to W$. 同命题 1可以证明, F_t 的非负不动点都落在 D 内. 因此 $\deg_W(I-F_t, D)$ 有定义, 并且由同伦不变性知, $\deg_W(I-F_t, D)$ 不依赖于 t. 为了方便, 记 $F=F_1$. 显然求解问题(1)的正解等价于寻找算子 F 的正不动点. 同文献[2]引理 1的分析, 我们得到

引理 2 假设 $(0,0)$ 和 $(\theta_a, 0)$ 都是 F 的孤立不动点, 则

(i) $\deg_W(I-F, D)=1$;

(ii) $\mathrm{index}_W(F,(0,0))=\mathrm{index}_W(F,(\theta_a,0))=0$.

结合引理 2和注 1, 我们得到问题(1)存在正解的充分必要条件.

定理 1 问题(1)存在正解当且仅当 a, b, d, m 满足条件(14).

证明 只需要证明充分性. 假设问题(1)没有正解, 注意到 $a>a^*>\lambda_1$, 则问题(1)的非负解只有 $(0,0)$ 和 $(\theta_a, 0)$. 显然它们都是 F 的孤立不动点, 因此由引理 2知

$$1=\deg_W(I-F,D)=\mathrm{index}_W(F,(0,0))+\mathrm{index}_W(F,(\theta_a,0))=0,$$

矛盾. 因此问题(1)有正解.

最后, 利用文献[8]中介绍的方法在一维情形下讨论问题(1)正解的惟一性.

定理 2 设 $\Omega=(p,q)$, 问题(1)中的参数满足 $m>b\lambda_1$, $a>a^*$, $d<d^*$ 且 $Rb\leqslant 1$, 其中 R 由(6)式给定, 则问题(1)的正解惟一.

证明 根据定理 1, 问题(1)有正解, 记为 (u_1, v_1). 设 (u_2, v_2) 是问题(1)的另一个正解. 令

$$U:\equiv u_1-u_2,\ V:\equiv v_1-v_2,$$

$$L_1=-\frac{d^2}{dx^2}+u_1+u_2-a+\frac{v_1}{(1+bu_1)(1+bu_2)(1+cv_1)},$$

$$L_2=-\frac{d^2}{dx^2}+d-\frac{mu_1}{(1+bu_1)(1+cv_1)(1+cv_2)}.$$

直接计算可得

$$L_1U=-\frac{u_2}{(1+bu_2)(1+cv_1)(1+cv_2)}V,$$

$$L_2V=\frac{mv_2}{(1+bu_1)(1+bu_2)(1+cv_2)}U.$$

因为(u_1, v_1)是问题(1)的正解,所以根据Krein-Rutman定理知

$$\lambda_1\left(u_1-a+\frac{v_1}{(1+bu_1)(1+cv_1)}\right)=\lambda_1\left(d-\frac{mu_1}{(1+bu_1)(1+cv_1)}\right)=0. \tag{15}$$

利用$\lambda_1(\cdot)$的单调性及(15)式可以推出

$$\lambda_1\left(d-\frac{mu_1}{(1+bu_1)(1+cv_1)(1+cv_2)}\right)>\lambda_1\left(d-\frac{mu_1}{(1+bu_1)(1+cv_1)}\right)=0$$

根据先验估计(6)式和假设知,

$$v_1<R\leqslant\frac{1}{b}<\frac{(1+bu_1)(1+bu_2)(1+cv_1)}{b},$$

因此

$$u_2+\frac{v_1}{(1+bu_1)(1+bu_2)(1+cv_1)}>\frac{v_1}{(1+bu_1)(1+cv_1)}. \tag{16}$$

再利用$\lambda_1(\cdot)$的单调性,我们可得

$$\lambda_1\left(u_1+u_2-a+\frac{v_1}{(1+bu_1)(1+bu_2)(1+cv_1)}\right)>\lambda_1\left(u_1-a+\frac{v_1}{(1+bu_1)(1+cv_1)}\right)=0$$

因此由文献[8]中的定理3.1知,$(U, V)=(0, 0)$.故问题(1)的正解惟一.

注 **2**　当参数$b\ll 1$充分小或$c\gg 1$充分大时,都能保证$Rb\leqslant 1$.因为c代表猎物之间的竞争强度,所以,从生物学意义上讲,定理2的结果说明猎物之间的强竞争限制了两种群的多样性.

[参考文献]

[1] Bazykin A D. Nonlinear Dynamics of Interacting Populations[M]. Singapore: World Scientific, 1998.

[2] Wang M X, Wu Q. Positive solutions of a prey-predator model with predator saturation and competition[J]. J Math Anal Appl, 2008, 345(2): 708-718.

[3] Chen W Y, Wang M X. Qualitative analysis of predator-prey models with Beddington-Deangelis functional responses and diffusion[J]. Math Comp Modelling, 2005, 42(1/2): 31-44.

[4] 陈滨,王明新. 带有扩散和Beddington-Deangelis型响应函数的捕食模型的正平衡态[J]. 数学年刊(A辑), 2007, 28(4): 495-506.

[5] 谭远顺,陆炳新. 具有年龄结构的捕食系统的动力学行为[J]. 南京师大学报:自然科学版, 2004, 27(1): 13-19.

[6] Pao C V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations[M]. New York: Plenum Press, 1992.

[7] Delgado M, L pez-G mez J, Suarez A. On the symbiotic Lotka-Volterra model with diffusion and transport effects[J]. J Differential Equations, 2000, 160(1): 321-349.

[8] L pez-G mez J, Pardo R M. Existence and uniqueness of coexistence states for the predator-prey model with diffusion in the scalar case[J]. Extracta Math, 1991, 6(2): 115-118.

[责任编辑:丁　蓉]