含位势的超线性 p-Laplace方程无穷多解的存在性

余博强[1,2], 姚仰新[1], 郑秋芳[1], 沈 辉[1]

(1. 华南理工大学理学院数学系, 广东 广州, 510640
(2. 广州城建职业学院基础部, 广东 广州, 510900

[摘要] 研究了一类含 Hardy位势的 p 阶 Laplace方程, 运用 Hardy不等式验证了 Cerami条件. 进一步, 通过带 Cerami条件的喷泉定理讨论了无穷多解的存在性.

[关键词] Hardy不等式, 无穷多解, Cerami条件, 喷泉定理

[中图分类号] O175.25 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010 03-0014-05

Infinitely Many Solutions for a Superlinear p-Laplacian Equation With Hardy Potential

Yu Boqiang[1,2], Yao Yangxin[1], Zheng Qiufang[1], Shen Hui[1]

(1. Department of Mathematics, School of Science, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China
(2. Guangzhou City Construction College, Guangzhou 510900, China

Abstract This paper considers a superlinear p-Laplacian equation with Hardy potential. Thanks to Hardy's inequality, infinitely many solutions are obtained through the Fountain theorem with Cerami's condition.

Key words Hardy's inequality, infinitely many solutions, Cerami's condition, Fountain theorem

有关 p-Laplace方程非平凡解和无穷多解的存在性已经有了很多好的结果, Garcia Azorero J等在文[1, 2]中都有所讨论. 在文[3]中, Ubilla P在较弱的条件下研究了 p-Laplace方程的边值问题, 得到了无穷多解的存在性, 本文研究了一类含 Hardy位势的 p-Laplace方程

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = \mu\dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} + f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $1 < p < N$, $0 \leqslant \mu < \bar{\mu} = \left(\dfrac{N-p}{p}\right)^p$, Ω是 $\mathbf{R}^N$ 中的有界光滑区域, 引进如下记法, $F(x, t) = \int_0^t f(x, s)\,ds$, 定义泛函

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |Du|^p dx - \frac{\mu}{p}\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p} dx - \int_\Omega F(x, u)\,dx. \tag{2}$$

众所周知, 问题(1)的弱解恰为泛函 $I(u)$的临界点. 对任意 $u, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\langle I'(u), \varphi\rangle = \int_\Omega |Du|^{p-2}DuD\varphi dx - \mu\int_\Omega \frac{|u|^{p-2}u\varphi}{|x|^p} dx - \int_\Omega f(x, u)\varphi dx, \tag{3}$$

记 $\mathscr{F}(x, s) = f(x, s)s - pF(x, s)$. 对于问题(1)中的非线性项 $f(x, s)$ 我们做如下假设:

(f_1) $f(x, s) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$, 且存在 $q \in (p, p^*)$, $p^* = Np/(N-p)$ 表示 Sobolev嵌入的临界指数, 使得对 $(x, s) \in \Omega \times \mathbf{R}$有 $|f(x, s)| \leqslant C(1 + |s|^{q-1})$.

(f_2) $\lim\limits_{|s|\to\infty} \dfrac{f(x, s)s}{|s|^p} = +\infty$对于 $x \in \Omega$一致.

收稿日期: 2009-06-10
基金项目: 国家自然科学基金(10471047).
通讯联系人: 姚仰新, 教授, 研究方向: 非线性偏微分方程及其应用. E-mail: mayxyao@scut.edu.cn

(f_3) 存在 $\theta \geqslant 1, M > 0$, 对 $(x, s) \in \Omega \times \mathbf{R}$ 且 $|s| \geqslant M$, $t \in [0, 1]$, 有 $\theta \mathscr{F}(x, s) \geqslant \mathscr{F}(x, ts)$.

(f_4) 对 $(x, s) \in \Omega \times \mathbf{R}$, 有 $f(x, -s) = -f(x, s)$.

本文 L^p 空间的范数用 $|\cdot|_p$ 表示, $W_0^{1,p}(\Omega)$ 空间的范数记为 $\|\cdot\|$, 即 $\|u\| = \left(\int_\Omega |Du|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. 由于条件 (f_2) 的存在, 我们称问题 (1) 为超线性问题, 容易验证条件 (f_3) 也可以写成如下形式, 存在 $M_0 > 0$ 使得当 $t \in [0, 1]$ 时

$$\theta \mathscr{F}(x, s) + M_0 \geqslant \mathscr{F}(x, ts). \tag{4}$$

我们通过验证泛函 $I(u)$ 满足 Cerami条件, 并利用带 Cerami条件的喷泉定理得到如下结论:

定理　如果 $f(x, u)$ 满足条件 (f_1) ~ (f_4), 则问题 (1) 存在无穷多个弱解 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, 且当 $n \to \infty$ 时, 有 $I(u_n) \to +\infty$.

1　引理

在论证定理之前我们先给出 Hardy不等式并验证 Cerami条件, 对于任意 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 有如下 Hardy不等式[4]

$$\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p} \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\mu} \int_\Omega |Du|^p \mathrm{d}x.$$

下面给出 Cerami条件的定义:

定义　假设 X 是一 Banach空间, 称 $I(u) \in C^1(X, R)$ 对于 $c \in \mathbf{R}$ 满足 Cerami条件, 如果

(i) 任何满足 $I(u_n) \to c$ 及 $I'(u_n) \to 0$ 的有界点列 $\{u_n\} \subset X$ 都有收敛子列;

(ii) 存在正常数 δ, R 及 β, 使得 $\|u\| \cdot \|I'(u)\|_{X^*} \geqslant \beta$ 当 $u \in I^{-1}[c - \delta, c + \delta]$ 且 $\|u\| \geqslant R$ 时成立. 这里 $\|\cdot\|_{X^*}$ 表示 X 的对偶空间 X^* 中的范数.

由条件 (f_1), 不难验证 $I(u) \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbf{R})$, 接着我们引入本文的引理.

引理　假设条件 (f_1) ~ (f_3) 成立, 则泛函 $I(u)$ 满足 Cerami条件.

证明　由 Sobolev嵌入 $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ $(1 \leqslant r < p^*)$ 的紧性容易验证定义中的条件 (i), 详细可参考文 [1]. 下面我们验证定义中的条件 (ii).

采用反证法, 假设有某个 $c \in \mathbf{R}$ 使得引理结论不成立, 因而存在 $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ 满足 $I(u_n) \to c$, $\|u_n\| \to \infty$, 但却有 $\|u_n\| \cdot \|I'(u_n)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \to 0$ $(n \to \infty)$, 其中 $\|\cdot\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}$ 表示 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 的对偶空间 $W^{-1,p'}(\Omega)$ 中的范数, 这里 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. 由此容易知道 $\langle I'(u_n), u_n \rangle \leqslant \|u_n\| \cdot \|I'(u_n)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \to 0$, 因此

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{p} f(x, u_n) - F(x, u_n)\right) \mathrm{d}x = I(u_n) - \frac{1}{p} \langle I'(u_n), u_n \rangle \to c, \ (n \to \infty), \tag{5}$$

记 $w_n = u_n / \|u_n\|$, 显然 $\|w_n\| = 1$, 故 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的有界序列, 因此存在子列 (不妨依然记为 $\{w_n\}$) 和 $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 使得

$$\begin{cases} w_n \rightharpoonup w, & \text{in } W_0^{1,p}(\Omega), \\ w_n \to w, & \text{in } L^r(\Omega), \ (1 \leqslant r < p^*), \\ w_n(x) \to w(x), & \text{a.e. in } \Omega. \end{cases} \tag{6}$$

下面分两种情况产生矛盾, 如果 w 不恒为零, 记 $\Omega_0 = \{x \in \Omega, w(x) = 0\}$, 则 $|\Omega \backslash \Omega_0| > 0$, 将 $\langle I'(u_n), u_n \rangle$ 记为 $o(1)$, 于是

$$\|u_n\|^p = \int_\Omega |Du_n|^p \mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega \left(|Du_n|^p - \mu \frac{|u_n|^p}{|x|^p}\right) \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x, u_n) u_n \mathrm{d}x + o(1),$$

两边除以 $\|u_n\|^p$, 上式变为

$$1 \geqslant \int_\Omega \frac{f(x, u_n) u_n}{\|u_n\|^p} \mathrm{d}x + o(1) = \left(\int_{\Omega_0} + \int_{\Omega \backslash \Omega_0}\right) \frac{f(x, u_n) u_n}{|u_n|^p} |w_n|^p \mathrm{d}x + o(1). \tag{7}$$

当 $x \in \Omega\backslash\Omega_0$ 时, $|u_n| \to +\infty$, 由条件(f_2)知,

$$\frac{f(x,u_n)u_n}{|u_n|^p}|w_n|^p \to +\infty,\ n \to +\infty.$$

由 Fatou 引理可得

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_0}\frac{f(x,u_n)u_n}{|u_n|^p}|w_n|^p dx \to +\infty,\ n \to +\infty. \tag{8}$$

另一方面, 由(f_2)知道, 存在常数 $G>0$, 使得 $f(x,u)u \geqslant 0$ 当 $(x,u) \in \Omega\times\left((-\infty,-G]\cup[G,+\infty)\right)$. 因此, 对于所有的 n, 我们有

$$\int_\Omega \frac{f(x,u_n)u_n}{\|u_n\|^p}dx = \frac{1}{\|u_n\|^p}\left(\int_{\Omega(|u_n|\leqslant G)} + \int_{\Omega(|u_n|>G)}\right)f(x,u_n)u_n dx \geqslant$$

$$-\frac{1}{\|u_n\|^p}\int_{\Omega(|u_n|\leqslant G)}|f(x,u_n)u_n|dx \geqslant -\frac{C}{\|u_n\|^p}\int_{\Omega(|u_n|\leqslant G)}(|u_n|+|u_n|^q)dx \geqslant -\frac{C}{\|u_n\|^p}(G+G^q)|\Omega|.$$

注意到当 $n\to\infty$ 时, $\|u_n\| \to +\infty$, 故上式右端有下界, 即存在常数 $A \geqslant 0$, 使得

$$\int_\Omega \frac{f(x,u_n)u_n}{\|u_n\|^p}dx \geqslant -A. \tag{9}$$

由(7)~(9)得出矛盾, 故 w 不恒为零不成立.

如果 w 恒为零, 对于 $t\in[0,1]$ 我们可以定义 C^1 类函数 $I(tu_n)$, 并通过下式定义一列实数 $\{t_n\}$,

$$I(t_n u_n) = \max_{t\in[0,1]} I(tu_n), \tag{10}$$

如果对于某个自然数 n 有多个 t_n 满足上式, 我们任取其中一个.

可以断言 $\|u_n\|\to\infty$ 蕴含着(在子列意义下) $|u_n|_q \to \infty$. 事实上, 如果不然, 则存在 $M>0$, 使得 $|u_n|_q \leqslant M$. 由(f_1)可以得到 $|F(x,s)| \leqslant C(|s|+|s|^q)$, 利用 Hardy 不等式我们有

$$I(u_n) = \frac{1}{p}\int_\Omega |Du_n|^p dx - \frac{\mu}{p}\int_\Omega \frac{|u_n|^p}{|x|^p}dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx \geqslant$$

$$\frac{\gamma}{p}\|u_n\|^p - C\int_\Omega(|u_n|+|u_n|^q)dx \geqslant \frac{\gamma}{p}\|u_n\|^p - C(M'+M^q),$$

其中 M' 是与 M 有关的常数, $\gamma = 1-\frac{\mu}{\bar{\mu}}$. 故 $I(u_n)\to\infty$, 这与假设中 $I(u_n)\to c$ 矛盾. 因此 $|u_n|_q\to\infty$ 成立. 记 $m_n = \|u_n\|/|u_n|_q$, 由 $|u_n|_q\to\infty$ 知当 n 充分大时,

$$\frac{m_n}{\|u_n\|} = \frac{\|u_n\|}{|u_n|_q}\cdot\frac{1}{\|u_n\|} = \frac{1}{|u_n|_q} \leqslant 1.$$

故由(10)式知

$$I(t_n u_n) \geqslant I\left(\frac{m_n}{u_n}\|u_n\|\right) = I(m_n w_n) \geqslant \frac{\gamma}{p}m_n^p - \int_\Omega F(x,m_n w_n)dx. \tag{11}$$

另外由(f_1)可知

$$\left|\int_\Omega F(x,m_n w_n)dx\right| \leqslant C(|m_n w_n|_1 + |m_n w_n|_q^q) = C\left(\frac{|u_n|_1}{|u_n|_q}+1\right) \leqslant C',$$

因此当 n 充分大时, (11)可变为

$$I(t_n u_n) \geqslant \frac{\gamma}{p}m_n^p - \int_\Omega F(x,m_n w_n)dx \geqslant \frac{\gamma}{p}m_n^p - C'.$$

另外可以验证 $m_n\to\infty$, 事实上, 由(6)知 $|w_n|_q \to |w|_q = 0$, 即得

$$m_n = \frac{\|u_n\|}{|u_n|_q} = \left(\frac{|u_n|_q}{\|u_n\|}\right)^{-1} = \left|\frac{u_n}{\|u_n\|}\right|_q^{-1} = \frac{1}{|w_n|_q} \to \infty,$$

故 $I(t_n u_n)\to+\infty$ 当 $n\to\infty$. 又由 $I(0)=0$, $I(u_n)\to c$ 可知 $0<t_n<1$, 故当 n 充分大时

$$\langle I'(t_n u_n), t_n u_n\rangle = t_n \frac{dI(tu_n)}{dt}\bigg|_{t=t_n} = 0 \tag{12}$$

由(4)和(12)可知

$$\theta\int_\Omega\left(\frac{f(x,u_n)u_n}{p}-F(x,u_n)\right)dx \geqslant \int_\Omega\left(\frac{f(x,t_nu_n)t_nu_n}{p}-F(x,t_nu_n)\right)dx-\frac{M_0}{p}|\Omega|=$$

$$I(t_nu_n)-\frac{1}{p}\langle I'(t_nu_n),t_nu_n\rangle-\frac{M_0}{p}|\Omega|=I(t_nu_n)-\frac{M_0}{p}|\Omega|\to+\infty.$$

因此由上式可得

$$I(u_n)-\frac{1}{p}\langle I'(u_n),u_n\rangle=\int_\Omega\left(\frac{f(x,u_n)u_n}{p}-F(x,u_n)\right)dx\geqslant\frac{1}{\theta}\left(I(t_nu_n)-\frac{M_0}{p}|\Omega|\right)\to+\infty.$$

这与(5)式矛盾, 因此 w 恒为零不成立.

综上可得 w 恒为零和不恒为零均不可, 这是不可能的, 引理得证.

至此, 我们完整地证明了泛函 $I(u)$ 满足 Cerami条件. 众所周知, Cerami条件比(PS)条件弱, 但 Cerami条件完全能使形变定理成立.

2 定理的证明

下面我们利用带 Cerami条件的喷泉定理证明问题(1)无穷多解的存在性. 在论证定理之前, 我们给出 Bartsch的喷泉定理.

假设 X 是可分的 Banach空间, 且存在 $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset X$, $\{\phi_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset X^*$, 使得

(i) $\langle\phi_n,e_m\rangle=\delta_n^m$, 其中 $\delta_n^m=1$, 当 $n=m$ 时. $\delta_n^m=0$, 当 $n\neq m$ 时.

(ii) $\overline{\mathrm{span}\{e_n,n\in\mathbf{N}\}}=X$, $\overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{\phi_n,n\in\mathbf{N}\}=X^*$.

令 $X_j=\mathrm{span}\{e_j\}$, 则 $X=\overline{\oplus_{j\geqslant1}X_j}$, 再记 $Y_k=\oplus_{j=1}^kX_j$, $Z_k=\overline{\oplus_{j\geqslant k}X_j}$, 有如下喷泉定理[5].

命题 若 $I\in C^1(X,\mathbf{R})$ 满足 Cerami条件, $I(-u)=I(u)$, 又设对每个 $k\in\mathbf{N}$, 存在 $\rho_k>r_k>0$, 使得

(i) $b_k=\inf_{u\in Z_k,\|u\|=r_k}I(u)\to+\infty$, 当 $k\to+\infty$,

(ii) $a_k=\max_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k}I(u)\leqslant0$,

则 $I(u)$ 有一列使之趋于 $+\infty$ 的临界点.

下面我们介绍前面所述定理的证明.

定理的证明 对可分的 Banach空间 $X=W_0^{1,p}(\Omega)$, 引进上面定义的 X_k, Y_k, Z_k. 首先由(f_1)知, 对任给的 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 有 $I(-u)=I(u)$, 由前述引理知 $I(u)$ 满足 Cerami条件. 下面我们逐一验证泛函(2)满足喷泉定理的条件.

(i) 由(f_1), 存在 $C_0>0$, 使得 $|F(x,s)|\leqslant C_0(1+|s|^q)$, 令 $\beta_k=\sup_{u\in Z_k,\|u\|=1}|u|_q$, $k=1,2,\cdots$, 由文[6], 当 $k\to\infty$, $\beta_k\to0$, 取 $r_k=\left(\frac{2C_0p}{\gamma}\beta_k^q\right)^{1/(p-q)}$, 则对 $u\in Z_k$, $\|u\|=r_k$, 利用 Hardy不等式以及 β_k 的定义有

$$I(u)=\frac{1}{p}\int_\Omega\left(|Du|^p-\mu\frac{|u|^p}{|x|^p}\right)dx-\int_\Omega F(x,u)dx\geqslant$$

$$\frac{\gamma}{p}\|u\|^p-C_0|u|_q^q-C_0|\Omega|\geqslant\frac{\gamma}{p}\|u\|^p-C_0\beta_k^q\|u\|^q-C_0|\Omega|=$$

$$C_0\left(\frac{2C_0p}{\gamma}\right)^{q/(p-q)}\beta_k^{pq/(p-q)}-C_0|\Omega|.$$

因为 $\beta_k\to0$, 再由 $q>p$, 所以由上式可得

$$b_k=\inf_{u\in Z_k,\|u\|=r_k}I(u)\to+\infty,\ k\to+\infty.$$

(ii) 为了直观, 我们定义范数 $\|u\|_{\mu,p}=\left(\int_\Omega\left(|Du|^p-\mu\frac{|u|^p}{|x|^p}\right)dx\right)^{\frac{1}{p}}$. 因为 $\dim Y_k<+\infty$, 而有限维空间上各种范数等价, 故存在 $C_k,B_k>0$, 对任意 $u\in Y_k$ 有

$$\frac{1}{p}\int_{\Omega}\left(|Du|^p-\mu\frac{|u|^p}{|x|^p}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\|u\|_{\mu,p}^p\leqslant C_k|u|_p^p=C_k\int_{\Omega}|u|^p\mathrm{d}x,\tag{13}$$

$$\|u\|^p\leqslant B_k|u|_p^p.\tag{14}$$

由(f_2)知存在 $R_k>0$,当 $|s|>R_k$ 时, $F(x,s)\geqslant 2C_k|s|^p$, 另一方面当 $|s|\leqslant R_k$ 时, 我们取 $M_k=\max\{0,\inf_{x\in\Omega,|s|\leqslant R_k}F(x,s)\}$, 则对任意 $(x,s)\in\Omega\times\mathbf{R}$ 有

$$F(x,s)\geqslant 2C_k|s|^p-M_k.\tag{15}$$

由(13)~(15)式, 对 $u\in Y_k$ 有

$$I(u)=\frac{1}{p}\|u\|_{\mu,p}^p-\int_{\Omega}F(x,u)\mathrm{d}x\leqslant -C_k|u|_p^p+M_k|\Omega|\leqslant -\frac{C_k}{B_k}\|u\|^p+M_k|\Omega|.$$

由此可见对充分大的 $\rho_k>0$(可以要求 $\rho_k>r_k$) 有 $a_k=\max_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k}I(u)\leqslant 0$ 于是喷泉定理得证, 因此 $I(u)$ 有一列临界点 $\{u_k\}_{k\in\mathbf{N}}$, 使得 $I(u_k)\to+\infty$, 证毕.

[参考文献]

[1] Garcia Azorero J, Peral Alonso I. Existence and nonunqueness for the p-Laplacian[J]. Nonlinear eigenvalues Communications in P. D. E, 1987, 12(12): 1389-1430.

[2] Garcia Azorero J, Peral Alonso I. Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1991, 323(2): 877-895.

[3] Ubilla P. Multiplicity results for the 1-Dimensional generalized p-Laplacian[J]. J Math Anal Appl, 1995, 190(2): 611-623.

[4] Caffarelli L, Kohn R, Nirenberg L. First order interpolation inequality with weights[J]. Compus Math, 1984(53): 259-275.

[5] Bartsch T. Infinity many solutions of a symmetric Dirichlet problem[J]. Nonl Anal TMA, 1993, 20: 1205-1216.

[6] Yang H, Fan X L. Exisitence of infinity many solutions of the p-Laplace equation with p-concave and convex nonlinearities[J]. J Lanzhou Univ Nat Sci, 1992, 35(2): 12-16.

[责任编辑: 丁　蓉]